文章编号: 1001-0920 (2016) 06-1148-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0427

离散线性周期系统的模型匹配

吕灵灵[1], 岳金明[1], 侯明哲[2]

(1. 华北水利水电大学 电力学院，郑州 450045；2. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心，哈尔滨 150001)

摘 要: 考虑离散线性周期系统的模型匹配问题, 提出一种基于参数化极点配置的模型匹配方法. 该方法从时域的角度出发, 采用周期状态反馈, 使得闭环系统充分接近目标系统. 由于所采用的参数化极点配置算法提供了充分的自由度, 所提出的方法能够实现零误差匹配. 数值算例验证了所提出算法的有效性.

关键词: 离散周期系统；模型匹配；极点配置

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Model matching for discrete linear periodic systems

LÜ Ling-ling[1], *YUE Jin-ming*[1], *HOU Ming-zhe*[2]

(1. School of Electric Power, North China University of Water Resources and Electric Power，Zhengzhou 450045, China；2. Center for Control Theory and Guidance Technology，Harbin Institute of Technology，Harbin 150001, China．Correspondent：LÜ Ling-ling，E-mail：lingling_lv@163.com)

Abstract: The model matching problem for the discrete linear periodic system is considered, and a model matching method based on parameterized poles assignment algorithm is proposed. Starting from the viewpoint of time-domain, by periodic state feedback, the closed-loop system is made sufficiently to reach the target system. Due to the sufficient degree of freedom provided by using the parametric poles assignment algorithm, the proposed method can achieve zero error matching. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: discrete periodic system；model matching；poles assignment

0 引 言

随着系统理论研究的扩大和计算机技术的广泛应用, 离散控制系统理论得到了迅速发展. 实际工程中, 许多具有重复或循环特性的动态过程都可以在一定条件下建模成一个线性周期系统, 因此, 研究离散线性周期系统的控制问题显得尤为重要. 离散周期系统的概念和方法构成了近代控制理论的基础, 国内外学者争相关注并取得了很多有价值的成果[1-5]. 文献 [6] 验证了通过一种可行的等价变换, 可以将大量的线性定常系统理论的结果扩展到离散线性周期系统中. 文献 [7] 认为, 对于能控的离散周期系统, 可以获得任意希望的周期控制律, 同时给出了一个状态反馈增益法则, 可用于任意配置系统的特征值. 文献 [8] 介绍了经典周期系统领域的基本概念: 单值性矩阵、能控性、能达性和奇异点等. 文献 [9] 提出了一种运用周期状态反馈控制律使离散线性周期系统稳定的方案, 并验证了其可行性.

在离散线性周期系统得到迅速发展的同时, 国内外许多学者也相继研究了模型匹配问题, 并在模型匹配问题方面取得了显著成果. 文献 [10] 在零匹配的条件下, 通过周期状态反馈控制律匹配一个目标周期系统, 前提是周期系统可以在状态反馈的作用下转化成闭环时不变系统. 文献 [11] 指出, 模型差分涉及识别要匹配的模型需要计算模型之间的分歧, 并概述和总结了模型差分的基本步骤和现有模型差分方法的优缺点. 文献 [12] 描述了基于系统的输入输出结构属性的模型匹配算法, 表明此算法可以通过状态反馈控制律直接扩展到动态模型匹配问题中. 文献 [13] 指出,

收稿日期: 2015-04-07；**修回日期:** 2015-08-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1204605, 11501200)；中国博士后科学基金项目(2014M550189)；河南省高校杰出青年骨干教师项目(2013GGJS-087)；华北水利水电大学研究生教育创新计划基金项目(YK2015-07).

作者简介: 吕灵灵(1983−), 女, 副教授, 博士, 从事周期系统控制、鲁棒控制等研究；岳金明(1988−), 男, 硕士生, 从事周期系统控制的研究.

对于给定线性系统, 其精确的模型匹配方案就是找到一个状态反馈, 使整个系统的传递函数等于给定的传递函数.

本文针对离散线性周期系统的模型匹配问题, 区别于频域的方法, 从时域的角度考虑, 设计周期状态反馈控制律, 使得闭环系统和目标系统充分接近, 从而将该问题转化为一个优化问题. 目标函数定义为目标系统特征向量和闭环系统特征向量匹配误差的范数之和. 此外, 实现模型匹配的控制律必须满足闭环系统和目标系统特征值完全一致的约束. 通过采用参数化极点配置算法并求解该优化问题, 得到关于模型匹配指标的优化决策矩阵, 代入参数化控制律表达式求得模型匹配问题的解. 最后, 通过数值例子表明了所提出设计方法的应用过程, 显示了设计方法的有效性.

1 问题形成

本文中: $\overline{i,j}$ 为整数集 $\{i,i+1,\cdots,j-1,j\}$; $\mathrm{tr}(A)$ 为方阵 A 的迹; $\alpha(A)$ 为矩阵 A 所有特征值的集合; $\deg(\alpha(s))$ 为多项式 $\alpha(A)$ 的阶, 代表对角线元素依次是 $A_i\,(i\in\overline{1,n})$、其他元素为0的一个块对角矩阵; $\|A\|_F$ 为矩阵 A 的 Frobenius 范数.

给定如下目标离散线性周期系统:

$$x(t+1)=A_0(t)x(t). \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统的状态向量; $A_0(t)$ 为系统矩阵, 以 T 为周期, 即

$$A_0(t)=A_0(t+T),\ t\in\boldsymbol{Z}. \tag{2}$$

考虑离散周期系统

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t). \tag{3}$$

其中: $t\in\boldsymbol{Z}$; $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $u(t)\in\boldsymbol{R}^r$ 分别为系统的状态向量和输入向量; $A(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$、$B(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$ 为系统的系数矩阵, 以 T 为周期, 即

$$A(t+T)=A(t),B(t+T)=B(t),\quad \forall t\in\boldsymbol{Z}. \tag{4}$$

目标系统 (1) 表达了控制系统的希望特性, 希望找到周期状态反馈控制律

$$u(t)=K(t)x(t),K(t+T)=K(t),\quad t\in\boldsymbol{Z}, \tag{5}$$

使得系统 (3) 在周期控制律 (5) 的作用下得到的闭环系统

$$\begin{aligned}&x(t+1)=A_c(t)x(t),\\&A_c(t)=A(t)+B(t)K(t),\end{aligned} \tag{6}$$

与目标系统 (1) 充分接近.

对于上述问题, 许多研究者都是从极小化入手, 不但求解复杂, 而且难以获得关于解的最优性的确定结论, 本文从另一个角度考虑这一问题.

经过简单计算可得, 闭环系统 (6) 的单值性矩阵为

$$\Psi_c=A_c(T-1)A_c(T-2)\cdots A_c(0). \tag{7}$$

对目标系统的单值性矩阵作如下实约当分解:

$$\Psi_0=A_0(T-1)A_0(T-2)\cdots A_0(0)=V_0FV_0^{-1}, \tag{8}$$

其中 V_0 和 F 分别为目标系统的特征向量矩阵和实约当标准型, 且

$$V_0=[v_1^0\ \ v_2^0\ \ \cdots\ \ v_n^0]. \tag{9}$$

欲使闭环系统 (6) 能够匹配系统 (1), 需要使得 Ψ_c 和 Ψ_0 具有相同的特征结构, 即

$$\Psi_c=VFV^{-1}, \tag{10}$$

$$V=[v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n]. \tag{11}$$

并进一步使得 V 和 V_0 充分接近.

根据上述分析, 离散线性周期系统的模型匹配问题可以描述如下.

问题 1 给定欲匹配的离散线性周期目标系统 (1) 和 (3), 其中目标系统 (1) 的特征值和特征向量分别为 s_i 和 $v_i^0\,(i\in\overline{1,n})$, 求解一个周期状态反馈控制律 $K(t)\in\boldsymbol{R}^{r\times n}$, 使得闭环系统 (6) 的单值性矩阵 Ψ_c 满足如下条件:

1) 矩阵 Ψ_c 的特征值为 $s_i\,(i\in\overline{1,n})$;

2) 矩阵 Ψ_c 的特征向量 v_i 和 Ψ_0 的特征向量 v_i^0 尽量接近, 即

$$\|v_i-v_i^0\|=\min,\ i\in\overline{1,n}.$$

为了便于进一步分析计算, 需要引入右互质分解的定义[14].

定义 1 多项式矩阵 $N(s)\in\boldsymbol{R}^{n\times r}[s]$ 和 $D(s)\in\boldsymbol{R}^{r\times r}[s]$ 称为是右互质的, 如果对于任意的 $\lambda\in\boldsymbol{C}$, 有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}N(\lambda)\\D(\lambda)\end{bmatrix}=r.$$

2 主要结果

与离散线性周期系统 (3) 紧密相关的是其提升时不变系统

$$x^L(t+1)=A^L(t)x^L(t)+B^L(t)u^L(t). \tag{12}$$

其中

$$A^L=A(T-1)A(T-2)\cdots A(0), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}B^L=[&A(T-1)\ \ A(T-2)\ \ \cdots\ \ B(0)\ \ \cdots\rightarrow\\&\leftarrow A(T-1)\ \ B(T-2)\ \ B(T-1)],\end{aligned} \tag{14}$$

$$u^L(t) = [u^{\mathrm{T}}(tT)\ \ u^{\mathrm{T}}(tT+1)\ \ \cdots\ \ u^{\mathrm{T}}(tT+T-1)]^{\mathrm{T}},$$

$$x^L(t) = x^L(tT),$$

即提升系统的状态和输入分别由原离散周期系统的状态和输入通过有规则地取样和排列构成.

多项式矩阵分解如下:

$$(sI - A^L)^{-1}B^L = N(s)D^{-1}(s), \tag{15}$$

其中 $N(s) \in R^{n\times Tr}$、$D(s) \in R^{Tr\times Tr}$ 为关于 s 的右互质矩阵多项式. 记

$$N(s) = [n_{ij}(s)]_{n\times Tr},\ D(s) = [d_{ij}(s)]_{Tr\times Tr},$$

$$\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}.$$

其中

$$\omega_1 = \max_{i,j\in\overline{1,Tr}}\{\deg(d_{ij}(s))\},$$

$$\omega_2 = \max_{i\in\overline{1,n},j\in\overline{1,Tr}}\{\deg(n_{ij}(s))\}.$$

进一步, 将 $N(s)$、$D(s)$ 重新改写为如下形式:

$$\begin{cases} N(s) = \sum\limits_{i=0}^{\omega} N_i s^i,\ N_i \in C^{n\times Tr}; \\ D(s) = \sum\limits_{i=0}^{\omega} D_i s^i,\ D_i \in C^{Tr\times Tr}. \end{cases} \tag{16}$$

做好以上准备工作, 对于给定的目标系统, 求出其实约当标准型矩阵 F ,令

$$\begin{cases} V(Z) = N_0 Z + N_1 ZF + \cdots + N_\omega ZF^\omega, \\ W(Z) = D_0 Z + D_1 ZF + \cdots + D_\omega ZF^\omega, \end{cases} \tag{17}$$

其中 $Z \in R^{Tr\times n}$ 为任意的参数矩阵. 记

$$\varGamma = \Big\{Z\Big|\det\Big(\sum_{i=0}^{\omega} N_i Z F^i\Big) \neq 0\Big\}, \tag{18}$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} K(0) \\ K(1) \\ \vdots \\ K(T-1) \end{bmatrix} \Bigg| \{X(Z) = W(Z)V^{-1}(Z),$$

$$Z \in \varGamma,\ K(0) = X_1,\ \det(A_c(0) \neq 0),$$

$$K(i) = X_{i+1}\prod_{j=0}^{i-1} A_c^{-1}(j),\ \det(A_c(i) \neq 0),$$

$$i \in \overline{1, T-1}\}. \tag{19}$$

引理 1[15] 给定完全能达的离散线性周期系统 (3), 采用周期状态反馈控制律 (5) 将系统 (3) 的极点配置到集合 $\{s_i,\ i \in \overline{1,n}\}$, 其周期状态反馈增益可以由式 (17) ∼ (19) 进行刻画, 其中 F 为由集合 $\{s_i,\ i \in \overline{1,n}\}$ 构成的实约当标准型. 此时, 问题 1 的第 1 个条件已经得到满足, 并且为求解问题 1 的第 2 个条件提供了参数化解集. 为了满足第 2 个条件, 需要最小化目标函数

$$J(Z) = \alpha_i \sum \|v_i - v_i^0\|_F. \tag{20}$$

其中: v_i 为由式 (17) 得到的矩阵 $V(Z)$ 对应的第 i 个特征向量; 加权因子 $\alpha_i \geqslant 0$, 表示各个特征向量对应的特征值对系统动态性能的影响.

综上所述, 可以将问题 1 的解法总结成如下定理.

定理 1 给定目标系统 (1) 和完全能达的离散线性周期系统 (3), 记约束优化问题

$$\min\ \ J(Z);$$

$$\text{s.t. } Z \in \varGamma,\ \det(A_c(i)) \neq 0,\ i \in \overline{1, T-1} \tag{21}$$

的解为 $Z_{\rm opt}$, 则问题 1 的解可由式 (19) 给出, 其中 $Z = Z_{\rm opt}$.

为了使所提出的方法便于实施, 下面给出求解离散线性周期系统模型匹配问题的详细步骤.

算法 1 离散周期系统的模型匹配.

Step 1: 对给定目标系统矩阵 (1) 进行实约当分解, 求出对应的实约当矩阵 F 和特征向量 $v_i^0,\ i \in \overline{1,n}$.

Step 2: 由式 (13) 和 (14) 计算系统 (3) 的提升系统矩阵 A^L、B^L.

Step 3: 解右互质分解多项式 (15), 求得多项式矩阵 $N(s)$、$D(s)$, 进一步根据式 (16) 求取 N_i 和 D_i, $i \in \overline{0,\omega}$.

Step 4: 由式 (17) 计算 $V(Z)$ 和 $D(Z)$, 进一步得到 $v_i,\ i \in \overline{1,n}$.

Step 5: 由式 (20) 求解最优化问题 (21), 得到最优决策矩阵 $Z_{\rm opt}$.

Step 6: 将 $Z = Z_{\rm opt}$ 代入式 (19), 求得矩阵 $K(i)$, $i \in \overline{0, T-1}$.

注 1 矩阵 F 为欲匹配周期系统单值性矩阵的实约当标准型, 其中重根按重数计算. 例如, 欲匹配周期系统的单值性矩阵的特征值集合为 $\{a_1, a_2, a_2, a_3 + jb_3, a_3 - jb_3\}$, 则

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & 1 & & \\ & & a_2 & & \\ & & & a_3 & b_3 \\ & & & -b_3 & a_3 \end{bmatrix}.$$

经过验证, 所提出的方法不要求单值性矩阵具有完全的特征向量系. 例如, 某周期系统的单值性矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} 4.4 & 3.2 \\ -1.8 & -0.4 \end{bmatrix},$$

其特征值为 $\{2, 2\}$, 其实约当标准型为

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

其特征向量矩阵为

$$V=\begin{bmatrix}0.8 & -0.8\\ -0.6 & 0.6\end{bmatrix}.$$

此时, 特征向量是线性相关的. 经过验证, 不完全特征向量和完全特征向量都可以实现运算, 且没有任何影响.

3 数值算例

考虑一个周期为3的二阶离散线性周期时变系统

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t). \tag{22}$$

该系统具有如下参数矩阵:

$$A(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ t=3k;\\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix},\ t=3k+1;\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ t=3k+2.\end{cases}$$

其中 $k\in\boldsymbol{Z}$. 目标是寻找周期状态反馈控制律

$$u(t)=\begin{cases}K(0)x(t),\ t=3k;\\ K(1)x(t),\ t=3k+1;\\ K(2)x(t),\ t=3k+2.\end{cases}$$

使得闭环系统 $x(t+1)=(A(t)+B(t)K(t))x(t)$ 和目标系统 $x(t+1)=A_0(t)x(t)$ 实现模型匹配, 其中

$$A_0(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ t=3k;\\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ t=3k+1;\\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix},\ t=3k+2.\end{cases}$$

通过验证可知, 系统 (22) 是完全能达的. 此外, 通过计算可以得到目标系统的实约当标准型和相应的特征向量矩阵为

$$F=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ V_0=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}.$$

有

$$v_1^0=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ v_2^0=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}.$$

根据式 (13) 和 (14), 求得系统 (22) 的提升系统矩阵为

$$A^L=\begin{bmatrix}9 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ B^L=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

求右互质分解 (15) 可得

$$D(s)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ s-9 & -s & -3\\ 0 & s-2 & 0\end{bmatrix},\ N(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

进一步, 根据式 (16), 可得到

$$D_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -9 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$N_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $Z=\begin{bmatrix}z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\\ z_{31} & z_{32}\end{bmatrix}$, 根据式 (17), 可得到

$$V(Z)=\begin{bmatrix}z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\end{bmatrix},$$

$$W(Z)=$$

$$\begin{bmatrix}z_{31} & z_{32}\\ -3z_{11}-3z_{31}-6z_{21} & -10z_{12}-3z_{32}+z_{22}\\ 4z_{21} & -2z_{32}-z_{22}\end{bmatrix},$$

进而有

$$v_1=\begin{bmatrix}z_{11}\\ z_{21}\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}z_{12}\\ z_{22}\end{bmatrix}.$$

根据上述所得, 目标函数可以表示为

$$J=\|v_1-v_1^0\|_F+\|v_2-v_2^0\|_F.$$

取式 (20) 中的 $\alpha_1=\alpha_2=1$,利用 Matlab 优化工具箱进行优化, 可以得到一个最优决策矩阵

$$Z_{\text{opt}}=\begin{bmatrix}1.0000 & 2.0000\\ 2.0000 & -3.0000\\ -0.3011 & 0.0223\end{bmatrix}.$$

将其代入式 (19), 可得

$$K(0)=[-0.1227\ \ -0.0892],$$

$$K(1)=[-4.3902\ \ -0.5620],$$

$$K(2)=[-0.2500\ \ -1.5000],$$

此时匹配误差 $J=0$, 即利用此控制器可以实现零误差匹配. 由此可见, 本文所提出的离散线性周期系统模型匹配的方法是有效的.

4 结　论

本文研究了基于周期状态反馈的离散线性周期系统的模型匹配问题. 不同于已有结果中基于频域的考虑, 从时域角度出发, 采用参数化极点配置算法, 将上述模型匹配问题转化为一个约束优化问题. 其中, 目标函数为目标系统特征向量和闭环系统特征向量匹配误差的加权范数之和. 此外, 由于参数化极点配置算法给出了无数个周期控制律, 给优化问题的求解提供了极大的自由度, 从而降低了设计的保守性. 最后通过数值算例充分表明了所提出方法可以使得给定的离散线性周期系统和目标离散线性周期系统实现精确匹配.

参考文献(References)

[1] Kabamba P T. Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, 31(10): 950-952.

[2] Yan W Y, Bitmead R R. Control of linear discrete-time periodic systems: A decentralized control approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(10): 1644-1648.

[3] Varga A, Pieters S. Gradient-based approach to solve optimal periodic output feedback control problems[J]. Automatica, 1998, 34(4): 477-481.

[4] De Souza C E, Trofino A. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems[J]. Int J of Control, 2000, 73(8): 696-703.

[5] Farges C, Peaucelle D, Arzelier D, et al. Robust H_2 performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs[J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(2): 159-166.

[6] Misra P. Time-invariant representation of discrete periodic systems[J]. Automatica, 1996, 32(2): 267-272.

[7] Al-Rahmani H M, Franklin G F. Linear periodic systems: Eigenvalue assignment using discrete periodic feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(1): 99-103.

[8] Bittanti S, Colaneri P. Analysis of discrete-time linear periodic systems[J]. Control and Dynamic Systems, 1996, 78: 313-339.

[9] SreedharJ, Van Dooren P. On finding stabilizing state feedback gains for a discrete-time periodic system[C]. American Control Conf. Urbana Champaign: IEEE, 1994, 1: 1167-1168.

[10] Colaneri P, Kucera V. The model matching problem for periodic discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(10): 1472-1476.

[11] Kolovos D S, Di Ruscio D, Pierantonio A, et al. Different models for model matching: An analysis of approaches to support model differencing[C]. Comparison and Versioning of Software Models. Washington DC: IEEE, 2009: 1-6.

[12] Moore B, Silverman L M. Model matching by state feedback and dynamic compensation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(4): 491-497.

[13] Wang S, Desoer C A. The exact model matching of linear multivariable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(3): 347-349.

[14] Zhou B, Duan G R. A new solution to the generalized Sylvester matrix equation $AV-EVF=BW$[J]. Systems & Control Letters, 2006, 55(3): 193-198.

[15] Lü L, Duan G, Zhou B. Parametric pole assignment and robust pole assignment for discrete-time linear periodic systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2010, 48(6): 3975-3996.

(责任编辑：郑晓蕾)