

基于收缩理论的一类非线性系统自适应动态面控制

胡超芳, 张志鹏

(天津大学 电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘要: 针对一类不确定非线性参数严反馈系统, 提出基于收缩理论的自适应动态面控制方法. 动态面控制器设计保证了各子系统关于状态误差部分收缩; 对不确定参数构造收缩自适应律, 并利用收缩下的奇异摄动分析降阶处理子系统, 确保降阶前后状态误差间的偏差及滤波误差有界; 通过分层子系统的收缩鲁棒性分析, 证明了原闭环系统状态半全局收敛到以期望轨迹为中心的球域内, 保证了跟踪误差及自适应估计有界. 刚性机械臂系统仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: 动态面; 收缩理论; 收缩自适应; 奇异摄动理论; 严反馈系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Contraction theory-based adaptive dynamic surface control for a class of nonlinear systems

HU Chao-fang, ZHANG Zhi-peng

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China. Correspondent: HU Chao-fang, E-mail: cfhu@tju.edu.cn)

Abstract: For a class of uncertain nonlinear systems in the parametric strict feedback form, an adaptive dynamic surface control method based on the contraction theory is proposed. Every subsystem is partially contracting in the state error by designing the dynamic surface controller. The adaptive estimation via contraction is designed for the uncertain parameters. Moreover, the contraction-based singular perturbation analysis is used to reduce the subsystem dynamics, which ensures the differences of the state errors between the original and the reduced subsystems' and the differences of the filters are bounded. By analyzing the contraction-based robustness of the hierarchical interconnection of the subsystems, it is proved that the states of the original closed-loop system can semi-globally converge to a ball centered about the desired trajectory, and it is guaranteed that both of the tracking error and adaptive estimation are bounded. Finally, simulation results of the rigid-link electrically driven robot manipulators system show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: dynamic surface; contraction theory; contracting adaptive; singular perturbation theory; strict feedback system

0 引言

非线性是在科学研究领域及实际中普遍存在的问题, 因此非线性系统控制特别是跟踪控制研究, 有着重要的理论和应用价值. 电驱动刚性机械臂系统是非常典型的非线性跟踪控制问题, 该系统由电机、齿轮连接的刚性连杆以及负载组成, 通过设计电机输入电压, 以达到需要的电流, 从而使连杆跟踪期望的角度轨迹. 但由于机械、材料和电气特性变化等原因, 存在参数不确定、未建模动态和扰动等问题. 为了保证系统稳定, 现有的研究大多是在李雅普诺夫稳定性基

础上设计非线性控制器. 文献[1]针对不确定参数提出了自适应积分反步方法; 文献[2]和文献[3]针对未建模动态和扰动, 提出了自适应神经网络方法等. 这些方法都是将轨迹跟踪转化成具体平衡点意义下的稳定性问题进行讨论, 因此不但需要标称状态或平衡点的详细信息, 并强调对初始状态的连续性, 而且有些时候李雅普诺夫函数的选取也存在难度, 这些都在一定程度上限制了控制器的设计. 在实际应用中, 某些基于李雅普诺夫的控制方法还存在调节参数难以实现的问题^[4].

收稿日期: 2015-04-08; **修回日期:** 2015-09-06.

基金项目: 天津市自然科学基金项目(12JCZDJC30300); 国家留学基金项目.

作者简介: 胡超芳(1973—), 男, 副教授, 从事飞行器自主控制、自适应控制和非线性控制等研究; 张志鹏(1990—), 男, 硕士生, 从事鲁棒自适应控制及无人机应用的研究.

近年来,收缩理论^[5]成为一种研究非线性系统轨迹收敛性的新方法.收缩分析基于连续介质力学和微分几何,通过采用虚位移的概念来研究系统的稳定性^[6].其总体思想是,若存在一个区域,且在该区域内系统的初始条件能够被遗忘,则这个系统是稳定的.该思想在无明确平衡点信息的情况下仍可进行收缩性分析,即使不确定参数改变了平衡点的位置也仍然能够判别系统稳定性,因此是一种更有前景的分析方法.目前,收缩理论已在非线性控制中得到了一定的应用^[7-9].如在反步法方面,文献[10]首次研究了基于收缩稳定性理论的反步控制器设计,文献[11]进一步提出了收缩自适应反步控制方法,文献[12]则对于收缩反步控制进行了系统分析和阐述.

本文在文献[11]的基础上,针对一类带有不确定参数的非线性参数反馈系统,提出基于收缩理论的自适应动态面控制方法.通过设计动态面控制器,保证每个子系统对于状态误差具有部分收缩性,同时设计收缩自适应律估计不确定参数;通过对各子系统进行降阶简化,并利用基于收缩的奇异摄动理论来确保降阶前后状态误差间的偏差及滤波误差有确切界,进而将降阶前后的各子系统形成分层连接结构;收缩鲁棒性结论保证了闭环系统状态收敛到以期望轨迹为中心的球域内,从而确保系统跟踪误差和自适应估计的有界性.最后通过刚性机械臂仿真验证了闭环系统的控制性能.

1 问题描述和基本理论介绍

1.1 一类非线性参数反馈系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(X_i) + g_i x_{i+1}, \\ \dot{x}_n = f_n(X_n) + \beta^T q(X_n) + g_n u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $X_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$, $i = 1, 2, \dots, n$, 是状态向量; $f_i(X_i)$ 是一阶连续可导非线性函数; $\beta \in R^p$ 是未知参数向量; $q(X_n)$ 是 p 维光滑函数向量; g_i 是非零常数; u 和 y 分别是输入和输出.

1.2 收缩理论

考虑以下非线性系统:

$$\dot{v} = \vartheta(v, t), \quad (2)$$

其中 $v \in R^n$ 是系统(2)的状态.运用系统轨迹虚位移的概念,该系统的虚拟动态可写为 $\delta\dot{v} = (\partial\vartheta(v, t)/\partial v)\delta v$, δv 表示轨迹的虚位移.

定义 1(收缩域)^[5] 对于系统(2),如果在状态空间里存在一个区域,使得 $\partial\vartheta(v, t)/\partial v$ 是一致负定的,则该区域称作一个收缩域.

引理 1(收缩性)^[13] 对于系统(2), $\vartheta(v, t)$ 是非线性光滑函数,如果起始于不同初始条件的任意两条轨迹是相互指数收敛的,则称系统是收缩的.收缩性的

一个充分条件是,如果存在某种矩阵测度 μ ,对于任意 $v, t > 0$,都有 $\lambda > 0$ 使得 $\mu(\partial\vartheta(v, t)/\partial v) \leq -\lambda$ 成立,则系统是收缩的, λ 称作收缩率.

本文采用以下矩阵测度^[14]判定系统收缩性:

$$\mu(A) = \frac{\lambda_{\max}(A + A^T)}{2},$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵最大特征值.

本质上,收缩控制系统设计等价于实现系统坐标变换^[6] $\delta\omega = \Theta\delta v$, Θ 为变换矩阵.变换后,系统的虚拟动态可写为 $\delta\dot{\omega} = F(v, t)\delta\omega$, 其中 $F = (\dot{\Theta} + \Theta(\partial\vartheta/\partial v))\Theta^{-1}$ 是一般化的 Jacobian 矩阵.

标准的收缩分析是与收缩子系统的连接方式息息相关的^[15],包括反馈式^[10-11]和分层式^[15].若采用分层连接,则系统具有以下形式的虚拟动态:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

如果子矩阵 F_{11} 和 F_{22} 是一致负定的,且 F_{12} 有界,则整个系统的任意一条轨迹都是指数收敛的.

引理 2(鲁棒性)^[13] 假定系统(2)在坐标变换 Θ 下是收缩的,且收缩率为 λ .若其摄动系统 $\dot{v}_p = \vartheta(v_p, t) + d(v_p, t)$ 的干扰有界,即对于任意 v_p 和 t ,都存在 d 使得 $\|d(v_p, t)\| \leq d$ 成立,则摄动系统任意轨迹都满足 $\|v_p(t) - v(t)\| \leq \chi \|v_p(0) - v(0)\| e^{-\lambda t} + d\chi/\lambda$, χ 是 Θ 条件数的上界.

针对引理 2,有分层鲁棒性结论^[5]:考虑式(3)的摄动系统,有 $\delta\omega_1 = \Theta_1\delta v_1$, $\delta\omega_2 = \Theta_2\delta v_2$,且存在有界干扰 $\Theta_1 d_1$ 和 $\Theta_2 d_2$ 分别作用到 $\delta\omega_1$ 和 $\delta\omega_2$ 动态上.令 F_{12} 为非零常数, $R_i = \|\Theta_i(v_{ip}(t) - v_i(t))\|$, 可得

$$\begin{cases} \dot{R}_1 + |\mu(F_{11})|R_1 \leq \|\Theta_1 d_1\| + \|F_{12}\|R_2, \\ \dot{R}_2 + |\mu(F_{22})|R_2 \leq \|\Theta_2 d_2\|. \end{cases} \quad (4)$$

$|\mu(F_{ii})|$ 是各子系统的收缩率.对于有界扰动 $\Theta_1 d_1$ 和 $\Theta_2 d_2$,当系统符合分层连接时,整个系统轨迹指数收敛到一个以期望轨迹为中心的有界球内.

1.3 基于收缩理论的奇异摄动系统

标准奇异摄动系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, t), \\ \varepsilon\dot{z} = g(x, z, \varepsilon). \end{cases} \quad (5)$$

定义 2(部分收缩)^[13] 对于任意 z 及时间 t ,如果虚拟系统

$$\dot{y}_x = f(y_x, z, t) \quad (6)$$

是收缩的,则称系统(5)对 x 是部分收缩的.

同样,对于任意 x 和 ε ,如果虚拟系统

$$\varepsilon\dot{y}_z = g(x, y_z, \varepsilon) \quad (7)$$

是收缩的,则称系统(5)对 z 是部分收缩的.

引理 3^[13] 如果系统(5)对 z 是部分收缩的,则方程 $g(x, z, \varepsilon) = 0$ 可以等效为 $z = \gamma(x, \varepsilon)$,即在 x, ε

和 z 之间存在唯一一个全局映射。

引理 4^[13] 定义全局可微函数 $\gamma(x) := \gamma(x, 0)$, 如果系统 (5) 满足下述条件: 1) $g(x, z, \varepsilon)$ 在 ε 域中关于常数 K 是 Lipschitz 连续的; 在坐标变换 Θ_z 下对 z 是部分收缩的, λ_z/ε 是收缩率; 存在非负常数 d' , 使得 $\left\| \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} f(x, z, t) \right\| \leq d'$ 对任意的 x, z, t 成立. 2) $f(x, z, t)$ 在 z 域中关于常数 α 是 Lipschitz 连续的; 在坐标变换 Θ_x 下对 x 也是部分收缩的, λ_x 是对应的收缩率. 在上述条件成立的同时, $\gamma(x)$ 在 x 域中关于常数 α_γ 也是 Lipschitz 连续的, 并记 x_γ 是如下降阶系统的一个解:

$$\dot{x}_\gamma = f(x_\gamma, \gamma(x_\gamma), t). \quad (8)$$

则系统 (5) 的任意轨迹在 $t \geq 0$ 时满足

$$\|x(t) - x_\gamma(t)\| \leq \chi_x \|x(0) - x_\gamma(0)\| e^{-\lambda_x t} + \varepsilon (C_1 (e^{-\lambda_x t} - e^{-(\lambda_z/\varepsilon)t}) + C_2 (1 - e^{-\lambda_x t})), \quad (9)$$

$$\|z(t) - \gamma(x_\gamma(t))\| \leq \|z(0) - \gamma(x(0))\| \chi_z e^{-(\lambda_z/\varepsilon)t} + \alpha_\gamma \chi_x \|x(0) - x_\gamma(0)\| e^{-\lambda_x t} + (d' + K) \chi_z / \lambda_z \varepsilon + \alpha_\gamma \varepsilon (C_1 (e^{-\lambda_x t} - e^{-(\lambda_z/\varepsilon)t}) + C_2 (1 - e^{-\lambda_x t})). \quad (10)$$

其中: χ_x 和 χ_z 分别是 Θ_x 和 Θ_z 条件数的上界, $C_1 = \frac{\chi_x \alpha \chi_z \|z(0) - \gamma(x(0))\|}{\lambda_z - \varepsilon \lambda_x}$, $C_2 = \frac{\chi_x \alpha \chi_z (d' + K)}{\lambda_z \lambda_x}$.

2 控制器设计及稳定性分析

2.1 控制器设计

本文从状态轨迹收敛性的角度出发, 在非线性系统 (1) 的动态面控制器设计过程中引入收缩理论.

假设 1 期望跟踪轨迹 y_d 是光滑且有界的.

Step 1 定义第 1 个动态面 $s_1 = x_1 - y_d$, 并微分.

$$\dot{s}_1 = f_1(X_1) + g_1 x_2 - \dot{y}_d. \quad (11)$$

设计如下虚拟控制量使得第一阶子系统对 s_1 是部分收缩的:

$$\bar{\alpha}_1(X_1, s_1) = \frac{-k_1 s_1 - f_1(X_1) + \dot{y}_d}{g_1}. \quad (12)$$

引入一阶滤波器 $\tau_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 = \bar{\alpha}_1(X_1, s_1)$, 定义滤波误差 $y_1 = \alpha_1 - \bar{\alpha}_1(X_1, s_1)$, 并定义第 2 个动态面 $s_2 = x_2 - \alpha_1$, 最终可得第一阶子系统的动态

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 y_1, \quad (13)$$

$$\tau_1 \dot{y}_1 = -y_1 - \tau_1 \dot{\bar{\alpha}}_1(X_1, s_1). \quad (14)$$

Step i 对第 i 个动态面 $s_i = x_i - \alpha_{i-1}$ 求导得

$$\dot{s}_i = f_i(X_i) + g_i x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1} = f_i(X_i) + g_i x_{i+1} + y_{i-1} / \tau_{i-1}. \quad (15)$$

同理, 设计虚拟控制量以保证子系统的动态对 s_i 是部分收缩的.

$$\bar{\alpha}_i(X_i, s_i) = \frac{-f_i(X_i) - k_i s_i - y_{i-1} / \tau_{i-1}}{g_i}. \quad (16)$$

引入一阶滤波器 $\tau_i \dot{\alpha}_i + \alpha_i = \bar{\alpha}_i(X_i, s_i)$, 滤波误

差 $y_i = \alpha_i - \bar{\alpha}_i(X_i, s_i)$, 并定义第 $i+1$ 个动态面 $s_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$, 可得第 i 阶子系统动态

$$\dot{s}_i = -k_i s_i + g_i s_{i+1} + g_i y_i, \quad (17)$$

$$\tau_i \dot{y}_i = -y_i - \tau_i \dot{\bar{\alpha}}_i(X_i, s_i). \quad (18)$$

由此, 该阶子系统与第 $i-1$ 阶的虚拟误差动态形成如下分层连接结构:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta s_{i-1} \\ \delta s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{i-1} & g_{i-1} & 0 \\ 0 & -k_i & g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta s_{i-1} \\ \delta s_i \\ \delta s_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{i-1} \\ \xi_i \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中 ξ_{i-1} 和 ξ_i 分别表示第 $i-1$ 阶和第 i 阶子系统滤波误差的虚拟动态.

Step n 对第 n 个动态面 $s_n = x_n - \alpha_{n-1}$ 微分

$$\dot{s}_n = f_n(X_n) + \beta^T q(X_n) + g_n u + y_{n-1} / \tau_{n-1}. \quad (20)$$

设计实际控制量

$$u = \frac{-f_n(X_n) - \hat{\beta}^T q(X_n) - k_n s_n - y_{n-1} / \tau_{n-1}}{g_n}, \quad (21)$$

其中 $\hat{\beta}$ 为不确定参数估计向量. 设计实际控制量使得第 n 阶子系统动态对 s_n 是部分收缩的, 并与上一阶子系统的虚拟误差动态形成如下分层连接结构:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta s_{n-1} \\ \delta s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{n-1} & g_{n-1} \\ 0 & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta s_{n-1} \\ \delta s_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中 ξ_{n-1} 表示第 $n-1$ 阶子系统滤波误差的虚拟动态. 定义估计误差向量为 $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta$, 可得第 n 阶子系统动态

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - (\tilde{\beta} - \beta)^T q(X_n). \quad (23)$$

设计相对应的收缩自适应控制律^[6, 11]为

$$\dot{\hat{\beta}} = q(X_n) s_n. \quad (24)$$

2.2 稳定性分析

假设 2 $f_i(X_i)$ 满足 $\left| \frac{\partial f_i(X_i)}{\partial x_i} \right| \leq l_i$, l_i 是正常数, 且 $i = 1, 2, \dots, n-1$.

假设 3 原闭环系统与降阶系统的初始值相同.

定理 1 对于非线性系统 (1), 在假设 1~假设 3 成立的条件下, 如果设计虚拟控制输入 (12)、(16) 及实际控制输入 (21), 使得降阶系统是收缩的, 且原系统与降阶系统误差及滤波误差在半全局范围内满足以下条件:

$$\|S_n - S_{n\gamma}\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i, \quad (25)$$

$$\|y_i(t)\| \leq \|y_i(0)\| e^{-(L_i/\tau_i)t} + M_i \tau_i, \quad \forall t \geq 0. \quad (26)$$

其中: $S_n = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_i(t), \dots, s_n(t)]^T$, $S_{n\gamma} =$

$[s_{1\gamma}(t), s_{2\gamma}(t), \dots, s_{i\gamma}(t), \dots, s_{n\gamma}(t)]^T$, k_i 、 Ω_{i+1} 、 Ω_i 、 L_i 和 M_i 为正常数, $i = 1, 2, \dots, n-1$. 则原闭环系统所有状态变量都能够半全局收敛到以期望轨迹为中心的球内, 且滤波器误差与自适应估计值是有界的, 同时滤波参数满足 $\tau_i < 1/(k_i + l_i)$.

证明 以第 i 阶系统为例. 式 (18) 在坐标变换 $\Theta_{y_i} = 1$ 下, 通过调节参数使 $\mu\left(\frac{\partial(-y_i - \tau_i \dot{\alpha}_i(X_i, s_i))}{\partial y_i}\right) = -1 + \tau_i(k_i + \partial f_i/\partial x_i) \leq -1 + \tau_i(k_i + l_i) < 0$, 负定成立, 即滤波参数满足 $\tau_i < 1/(k_i + l_i)$, 现定义 $L_i = |-1 + \tau_i(k_i + l_i)|$. 由定义 2 可知, 式 (18) 对 y_i 是部分收缩的, 且 L_i/τ_i 是对应的收缩率.

由引理 3 可知, 可将方程 $-y_i - \tau_i \dot{\alpha}_i(X_i, s_i) = 0$ 等效为 $y_i = y_i(s_i, \tau_i) = -\tau_i \dot{\alpha}_i(X_i, s_i)$, 且 $y_i(s_i) := y_i(s_i, 0) = 0$. 显然存在常数 $d'_i = 0$, 使得 $\left\|\frac{\partial y_i(s_i)}{\partial s_i} \dot{s}_i\right\| \leq d'_i$ 对于任意的 s_i, y_i, t 成立. 同时, $\dot{\alpha}_i(X_i, s_i) = \eta_i(s_1, s_2, \dots, s_i, y_1, y_2, \dots, y_i, k_1, k_2, \dots, k_i, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d)$ 连续且为紧函数, 则在一定初始紧集内满足 $|\dot{\alpha}_i(X_i, s_i)| \leq M_i$, 故 $|\tau_{ia} \dot{\alpha}_i(X_i, s_i) - \tau_{is} \dot{\alpha}_i(X_i, s_i)| \leq M_i |\tau_{ia} - \tau_{is}|$ 恒成立, 即 $-y_i - \tau_i \dot{\alpha}_i(X_i, s_i)$ 在 τ_i 域内关于常数 M_i 是 Lipschitz 连续的.

第 i 步误差动态 (17) 在 $\Theta_{s_i} = 1$ 下对 s_i 是部分收缩的, k_i 是对应的收缩率, 且 $-k_i s_i + g_i s_{i+1} + g_i y_i$ 对于 y_i 关于正常数 $|g_i|$ 是 Lipschitz 连续的. $s_{i\gamma}$ 表示降阶系统

$$\dot{s}_{i\gamma} = -k_i s_{i\gamma} + g_i s_{(i+1)\gamma} \quad (27)$$

的一个解, 那么由引理 4 及分层结构的鲁棒性结论可得, 系统动态 (17) 和 (18) 的任何轨迹在 $t \geq 0$ 时分别满足下述不等式:

$$\|s_i(t) - s_{i\gamma}(t)\| \leq \|s_i(0) - s_{i\gamma}(0)\| e^{-k_i t} + e^{-k_i t} \Pi_i + \tau_i(C_{i1} E_{i1} + C_{i2} E_{i2}), \quad (28)$$

$$\|y_i(t)\| \leq \|y_i(0)\| e^{-(L_i/\tau_i)t} + M_i \tau_i. \quad (29)$$

其中: $C_{i1} = \frac{|g_i| \|y_i(0)\|}{L_i - \tau_i k_i}$, $C_{i2} = \frac{|g_i| M_i}{k_i}$; $E_{i1} = e^{-k_i t} - e^{-(L_i/\tau_i)t}$, $E_{i2} = 1 - e^{-k_i t}$; $\chi_{xi} = \chi_{zi} = 1$; $\Pi_i = \int_0^t |g_i| \|s_{i+1}(\varsigma) - s_{(i+1)\gamma}(\varsigma)\| e^{k_i \varsigma} d\varsigma$, $i = 1, 2, \dots, n-2$.

类似地, 第 $n-1$ 阶子系统也符合上述结论, 但由于最后一阶子系统不包含滤波, 无需采用奇异摄动分析, 故第 n 阶子系统的原系统轨迹与降阶系统轨迹是同一条轨迹, 即 $s_n(t) \equiv s_{n\gamma}(t)$, 则第 $n-1$ 阶子系统中任何轨迹满足

$$\begin{aligned} \|s_{n-1}(t) - s_{(n-1)\gamma}(t)\| &\leq e^{-k_{n-1}t} \Pi_{n-1} + \\ \|s_{n-1}(0) - s_{(n-1)\gamma}(0)\| &e^{-k_{n-1}t} + \\ \tau_{n-1}(C_{(n-1)1} E_{(n-1)1} + C_{(n-1)2} E_{(n-1)2}) &= \\ \|s_{n-1}(0) - s_{(n-1)\gamma}(0)\| &e^{-k_{n-1}t} + \end{aligned}$$

$$\tau_{n-1}(C_{(n-1)1} E_{(n-1)1} + C_{(n-1)2} E_{(n-1)2}), \quad (30)$$

$$\|y_{n-1}(t)\| \leq \|y_{n-1}(0)\| e^{-\frac{L_{n-1}}{\tau_{n-1}}t} + M_{n-1} \tau_{n-1}. \quad (31)$$

其中: $C_{(n-1)1} = \frac{|g_{n-1}| \|y_{n-1}(0)\|}{L_{n-1} - \tau_{n-1} k_{n-1}}$, $C_{(n-1)2} = \frac{|g_{n-1}| M_{n-1}}{k_{n-1}}$, $E_{(n-1)1} = e^{-k_{n-1}t} - e^{-\left(\frac{L_{n-1}}{\tau_{n-1}}\right)t}$, $E_{(n-1)2} = 1 - e^{-k_{n-1}t}$, $\chi_{x(n-1)} = \chi_{z(n-1)} = 1$, $\Pi_{n-1} = \int_0^t |g_{n-1}| \|s_n(\varsigma) - s_{n\gamma}(\varsigma)\| e^{k_{n-1}\varsigma} d\varsigma$.

对于每一步降阶子系统 (27) 进行整理, 可得变换后的降阶系统综合形式

$$\dot{S}_{n\gamma} = \varpi S_{n\gamma}, \quad (32)$$

其中

$$\varpi = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & g_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n \end{bmatrix}.$$

可以看出, 降阶后系统形成分层结构, 选取适当的参数 $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_n$ 使 $\mu(\varpi) \leq -\lambda_1$ ($\lambda_1 > 0$) 成立. 由引理 1 可知, 降阶系统状态变量是收缩的, 且渐近收敛到期望轨迹, 即降阶系统的跟踪误差渐近收敛到 0.

由式 (30) 及假设 3, 并定义 $\Omega_{n-1} = \tau_{n-1}(C_{(n-1)1} + C_{(n-1)2})$, 有

$$\|s_{n-1}(t) - s_{(n-1)\gamma}(t)\| \leq \Omega_{n-1}. \quad (33)$$

对于第 $n-2$ 阶, 有

$$\begin{aligned} \|s_{n-2}(t) - s_{(n-2)\gamma}(t)\| &\leq \\ \frac{|g_{n-2}| \Omega_{n-1} E_{(n-2)2}}{k_{n-2}} + & \\ \|s_{n-2}(0) - s_{(n-2)\gamma}(0)\| &e^{-k_{n-2}t} + \\ \tau_{n-2}(C_{(n-2)1} E_{(n-2)1} + C_{(n-2)2} E_{(n-2)2}) &\leq \\ \tau_{n-2}(C_{(n-2)1} + C_{(n-2)2}) + \frac{|g_{n-2}| \Omega_{n-1}}{k_{n-2}} &= \Omega_{n-2}. \end{aligned} \quad (34)$$

其中: $C_{(n-2)1} = \frac{|g_{n-2}| \|y_{n-2}(0)\|}{L_{n-2} - \tau_{n-2} k_{n-2}}$, $C_{(n-2)2} = \frac{|g_{n-2}| M_{n-2}}{k_{n-2}}$, $E_{(n-2)1} = e^{-k_{n-2}t} - e^{-\left(\frac{L_{n-2}}{\tau_{n-2}}\right)t}$, $E_{(n-2)2} = 1 - e^{-k_{n-2}t}$, $\chi_{x(n-2)} = \chi_{z(n-2)} = 1$.

依次类推, 可得第 i 阶不等式

$$\|s_i(t) - s_{i\gamma}(t)\| \leq \frac{|g_i| \Omega_{i+1}}{k_i} + \tau_i(C_{i1} + C_{i2}) = \Omega_i. \quad (35)$$

综合以上不等式, 则下式成立:

$$\|S_n - S_{n\gamma}\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i. \quad (36)$$

由以上分析可知: 对原闭环系统引入基于收缩理论的奇异摄动分析方法, 可得到降阶前后系统状态误差间的偏差有确切界, 且滤波器误差也是有界的.

同理, 将原闭环系统综合表示为

$$\dot{S}_n = \varpi S_n + \Lambda Y. \quad (37)$$

其中: $\Lambda = \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, 0\}$, $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0]^T$. 则式 (37) 可看作降阶系统 (32) 的摄动系统, 由以上分析可知, 原闭环系统与降阶系统的跟踪误差在一定条件下满足式 (36), 由收缩理论下的分层结构鲁棒性结论可知, 原闭环系统的状态变量是半全局收敛到以期望轨迹为中心的球内, 从而可保证前 $n-1$ 阶系统状态误差是半全局有界的. 对于第 n 阶系统, 由以上分析可知降阶前后满足 $s_n(t) \equiv s_{n\gamma}(t)$, 故第 n 阶系统降阶前后有相同的收敛性.

此外, 第 n 阶动态 (23) 和自适应律 (24) 属于典型的收缩自适应控制, 参考以下引理.

引理 5^[6] 当系统 (2) 满足以下虚拟动态时:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} & -W^T \\ W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta \hat{\beta} \end{bmatrix},$$

如果 ϑ 是收缩的, 期望轨迹是有界的, 且 W 是光滑的, 则 v 渐近收敛到期望轨迹, $\hat{\beta}$ 有界.

本文中式 (23) 和 (24) 构成以下形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta s_n \\ \delta \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_n & -q^T(X_n) \\ q(X_n) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta s_n \\ \delta \hat{\beta} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

通过控制器设计可得第 n 阶系统是收缩的, 且已知 $q(X_n)$ 是光滑的, 由引理 5 可得, s_n 是渐近收敛到 0 的, $\hat{\beta}$ 是有界的.

综上可得, 原闭环系统所有状态变量都能够半全局收敛到以期望轨迹为中心的球内, 且滤波参数具有一定取值范围, 同时滤波器误差与自适应估计值有界, 从而保证了原闭环系统跟踪误差的半全局有界性, 通过调节控制参数可收敛到很小的域内. \square

3 仿真实例

3.1 电驱动刚性机械臂系统^[1,11]

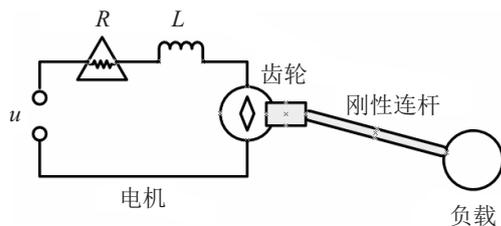


图 1 刚性机械臂系统示意图

图 1 所示是刚性机械臂系统, 通过控制电机电压来调整连杆转过的角度. 根据牛顿第二定律, 建立该系统如下的机械和动力学 Euler-Lagrange 方程:

$$\begin{cases} D\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin q = I, \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = u. \end{cases} \quad (39)$$

其中: $D = \frac{J}{K_\tau} + \frac{ml_o^2}{3K_\tau} + \frac{M_o l_o^2}{K_\tau} + \frac{2M_o r_o^2}{5K_\tau}$, $B =$

$\frac{B_o}{K_\tau}$, $N = \frac{ml_o G}{2K_\tau} + \frac{M_o l_o G}{K_\tau}$, m, l_o 分别是连杆质量和长度, M_o, r_o 分别是负载质量和半径, G 是重力系数, B_o 是粘滞摩擦系数, $J, q(t)$ 分别是电机转动惯量和转过的角度, $I(t), L$ 和 R 分别是电枢电流、电感和电阻, K_τ 是转矩系数, K_m 是反电动势系数, u 是电压控制输入.

3.2 无扰动刚性机械臂系统

本文从电磁系统不确定角度出发, 以电机温度变化导致电枢电阻及反电动系数未知情况为例, 验证本文方法. 由文献 [1,11] 可知, 以上系统可写成以下参数严反馈形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (-N \sin x_1 - Bx_2)/D + x_3/D, \\ \dot{x}_3 = -(K_m x_2 + Rx_3)/L + u/L, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (40)$$

其中: $x_1 = q(t), x_2 = \dot{q}(t), x_3 = I(t)$, 未知常数 K_m 和 R 的真实值分别是 $10 \text{ N} \cdot \text{m/A}$ 和 0.5Ω , 其他各参数取值见文献 [11]. 系统输出跟踪期望轨迹信号 $y_d = \sin t$.

按照本文方法设计收缩自适应动态面控制器, 并与基于李雅普诺夫的自适应动态面控制进行仿真比较. 为了对比两种控制器对于滤波参数选择要求的不同, 本方法选取符合滤波参数条件的不同数值进行仿真, 即 τ 分别取 0.1 和 0.01. 李雅普诺夫方法要求滤波参数远小于 1, 即选取 $\tau = 0.001$. 仿真结果如图 2 ~ 图 6 所示. 图中 Contraction 表示本文方法, Lyapunov 表示传统方法结果.

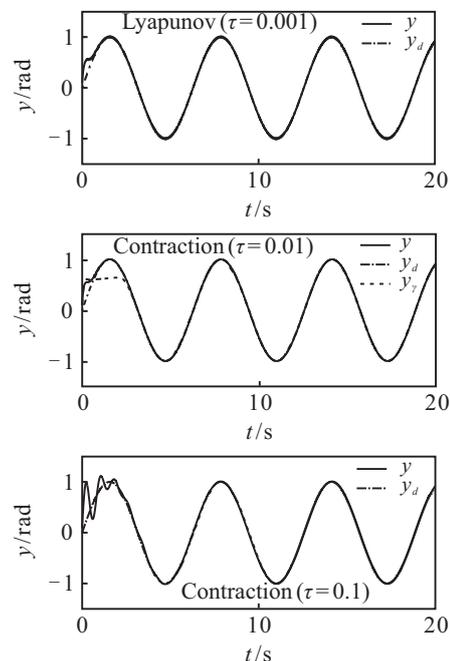


图 2 系统输出跟踪曲线

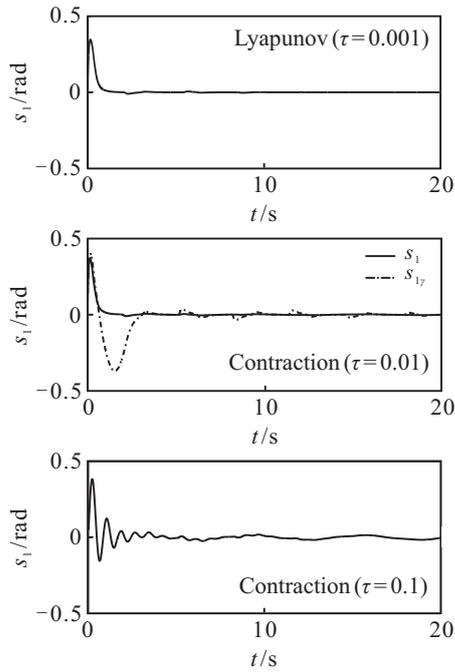


图3 系统输出跟踪误差

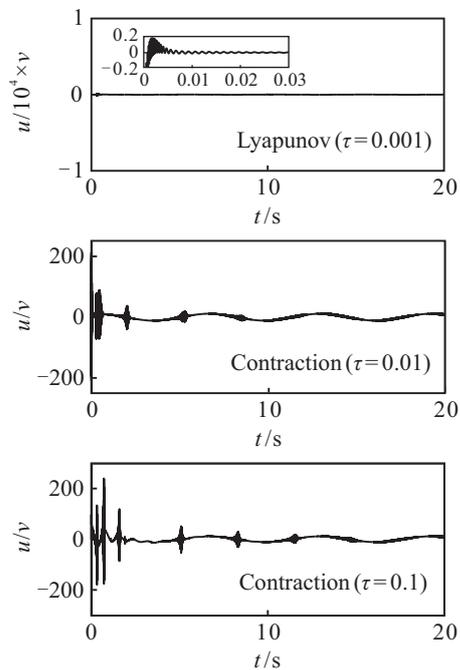
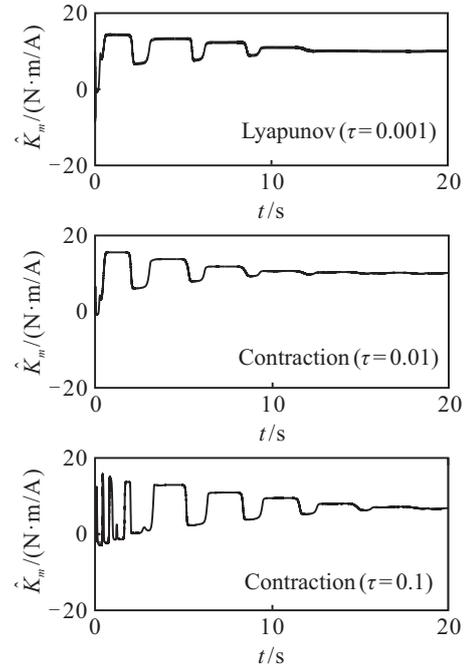
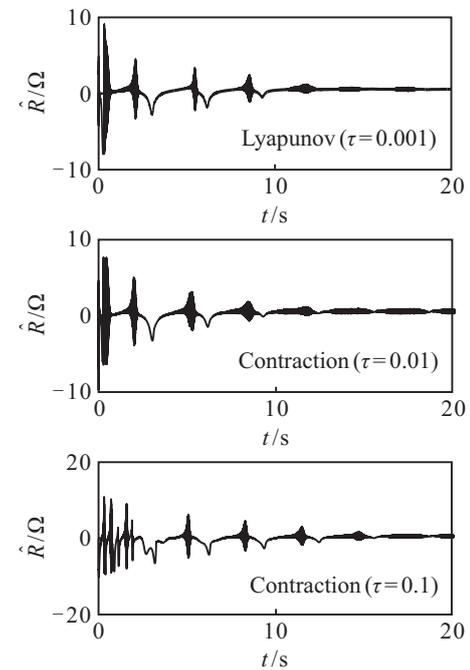
图4 控制输入 u

图2和图3中, y_γ 和 $s_{1\gamma}$ 分别表示本文方法降阶系统输出及跟踪误差. 由图可知, 尽管在不同滤波参数下本文方法的输出在初始时刻略有抖动, 但其原系统与降阶系统都能很好地跟踪期望轨迹, 具有接近于0的跟踪误差, 表现出与传统方法相同的跟踪性能. 图4~图6分别表示系统控制输入以及 K_m 、 R 的自适应估计值. 就控制输入而言, 可以看出, 由于滤波参数过小, 传统方法是控制输入过大; 而对于自适应估计值, 虽然初始阶段本文方法在 $\tau = 0.1$ 时自适应参数相对偏大, 但经过一段时间, 自适应值基本能保持在真实值附近. 由仿真分析可知, 本文方法不但具

图5 自适应参数 \hat{K}_m 图6 自适应参数 \hat{R}

有与传统方法相同的性能, 而且扩大了滤波参数的选择范围, 有利于系统实现. 虽然滤波参数的增大在一定程度上略微降低了动态性能, 但却体现了参数选择与控制性能上的折衷.

3.3 带扰动刚性机械臂系统

考虑加入由于电流以及电压波动等所产生的扰动^[3], 以此来验证本文方法的抗扰性能.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (-N \sin(x_1) - Bx_2)/D + x_3/D + \Delta_1, \\ \dot{x}_3 = -(K_m x_2 + R x_3)/L + u/L + \Delta_2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (41)$$

其中: $\Delta_1 = \cos(\pi t/2)$, $\Delta_2 = 1.5e^{-2t}$. 仿真结果如图7和图8所示.

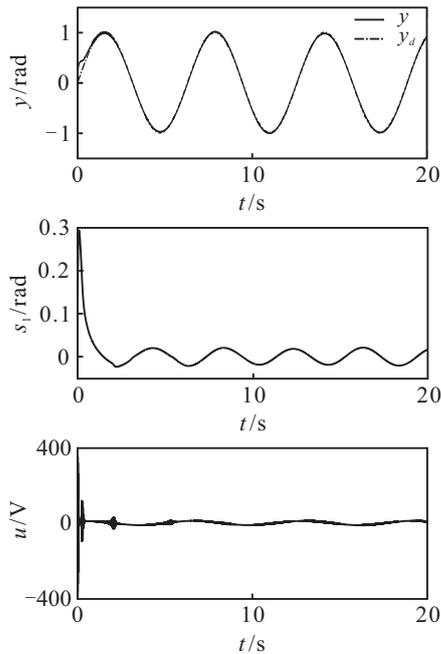


图7 带扰动系统输出及输入

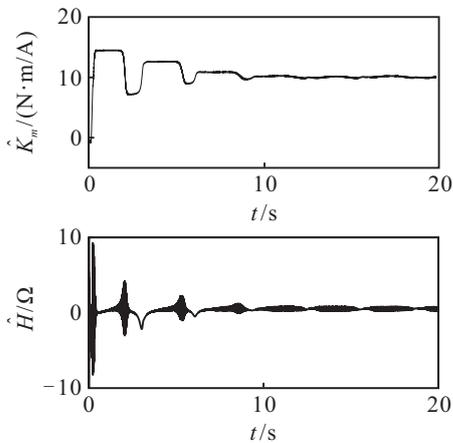


图8 带扰动系统自适应参数

由图7和图8可知, 对带扰动模型进行控制, 尽管系统输出跟踪误差有波动, 但利用本文方法仍能够保持在有界值内, 且未知参数自适应值也能收敛到真实值附近. 由此可知, 本文控制器对扰动具有很好的鲁棒性.

4 结 论

本文针对一类带有不确定非线性参数严反馈系统, 提出了基于收缩理论的自适应动态面控制方法. 与传统李雅普诺夫稳定性方法不同的是, 本文方法通过将收缩理论与自适应动态面控制结合, 不但避免了反步法虚拟控制反复求导带来的“微分爆炸”问题, 而且保证了原闭环系统变量半全局收敛到期望轨迹附近的一个小球域内, 从而确保了闭环系统的稳定性和跟踪性能, 并有效拓宽了滤波参数的选取范围, 为一般非线性系统控制的稳定性研究提供了新的思路.

参考文献(References)

- [1] Dawson D W, Carroll J J, Schneider M. Integrator backstepping control of a brush DC motor turning a robotic load[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1994, 2(3): 233-245.
- [2] Huang S N, Tan K K, Lee T H. Adaptive neural network algorithm for control design of rigid-link electrically driven robots[J]. Neurocomputing, 2008, 71(4): 885-894.
- [3] Cheng L, Hou Z G, Tan M. Adaptive neural network tracking control for manipulators with uncertain kinematics, dynamics and actuator model[J]. Automatica, 2009, 45(10): 2312-2318.
- [4] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [5] Lohmiller W, Slotine J J E. On contraction analysis for nonlinear systems[J]. Automatica, 1998, 34(6): 683-696.
- [6] Jouffroy J, Slotine J J E. Methodological remarks on contraction theory[C]. Proc of 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Paradise Island: IEEE, 2004: 2537-2543.
- [7] Pham Q C, Tabareau N, Slotine J J E. A contraction theory approach to stochastic incremental stability[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(4): 816-820.
- [8] Zhang X, Cui B. Synchronization of Lurie system based on contraction analysis[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 223(15): 180-190.
- [9] Wang W, Slotine J J E. Contraction analysis of time delayed communications and group cooperation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 54(4): 712-717.
- [10] Jouffroy J, Lottin J. Integrator backstepping using contraction theory: A brief methodological note[C]. Proc of 15th IFAC World Congress. Barcelona: 2002: 471-475.
- [11] Sharma B B, Kar I N. Contraction based adaptive control of a class of nonlinear systems[C]. Proc of American Control Conference. St Louis: IEEE, 2009: 808-813.
- [12] Sharma B B, Kar I N. Contraction theory-based recursive design of stabilizing controller for a class of nonlinear systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(6): 1005-1018.
- [13] Del Vecchio D, Slotine J J E. A contraction theory approach to singularly perturbed systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 53(3): 752-757.
- [14] Russo G, Di Bernardo M, Slotine J J E. A graphical approach to prove contraction of nonlinear circuits and systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2011, 58(2): 336-348.
- [15] Kiat T C, Son H, Chai P Y. UAV flight path control using contraction-based backstepping control[J]. Open J of Applied Sciences, 2013, 3(2): 65-70.