

## 基于矩阵对角化变换的高阶容积卡尔曼滤波

赵利强, 陈坤云, 王建林, 于涛

(北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029)

**摘要:** 为了提高高阶容积卡尔曼滤波器(CKF)的滤波性能, 提出一种基于矩阵对角化变换的高阶CKF算法. 该算法基于高阶容积准则, 利用矩阵对角化变换代替标准高阶CKF中的Cholesky分解, 使得协方差矩阵分解后的平方根矩阵保留了原有的特征空间信息, 状态统计量计算更加准确, 从而提高了滤波精度; 同时, 矩阵对角化变换不要求协方差矩阵正定, 增强了算法滤波稳定性. 仿真结果表明, 所提出的算法是可行而有效的, 明显改善了标准高阶CKF的滤波效果.

**关键词:** 高阶容积卡尔曼滤波; 矩阵对角化变换; Cholesky分解; 非线性高斯滤波

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## High-degree cubature Kalman filter based on diagonalization of matrix

ZHAO Li-qiang, CHEN Kun-yun, WANG Jian-lin, YU Tao

(College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China. Correspondent: WANG Jian-lin, E-mail: wangjl@mail.buct.edu.cn)

**Abstract:** In order to improve the filtering performance of the high-degree cubature Kalman filter(CKF), a high-degree cubature Kalman filter based on the diagonalization of the matrix is proposed. Based on the high-degree cubature rule, the diagonalization of the matrix is used to take place of the Cholesky decomposition and the square-rooting matrix of the covariance can preserve the information of the original feature space, so that the state statistics can be calculated accurately and the filtering accuracy is improved. At the same time, the diagonalization of the matrix does not require the condition that the covariance matrix must be the positive definite matrix and the stability of filtering algorithm is enhanced. The simulation results show that the proposed algorithm is feasible and effective, and it can obviously improve the filtering effect of the standard high-degree CKF algorithm.

**Keywords:** high-degree cubature Kalman filter; diagonalization of matrix; Cholesky decomposition; nonlinear Gaussian filter

## 0 引言

非线性状态估计是一个热门的研究领域, 广泛应用于化工过程、目标跟踪、信号处理、宏观经济预测等工程领域. 非线性滤波是解决非线性状态估计的重要方法, 目前已有较多的研究成果. Ito等<sup>[1]</sup>提出了高斯非线性滤波框架, 给出了高斯假设下非线性滤波的最优解决办法. 而在实际处理中很难得到最优解, 因此只能用次优的近似方法来代替.

常用的非线性滤波算法有扩展卡尔曼滤波(EKF)<sup>[2]</sup>、不敏卡尔曼滤波(UKF)<sup>[3]</sup>、高斯厄米特卡尔曼滤波(GHF)<sup>[4]</sup>、容积卡尔曼滤波(CKF)<sup>[5]</sup>等. EKF在处理多维非线性模型时, 滤波容易发散、精度低, 而且

需要计算Jacobian矩阵<sup>[6]</sup>. UKF克服了EKF的缺点, 将对非线性系统的函数近似转换成对其后验概率密度进行近似, 其滤波效果较EKF有显著的提升<sup>[3]</sup>. 但系统维数过高时, UKF滤波不佳, 甚至会发散, 而且其滤波效果容易受参数设定的影响<sup>[5-6]</sup>. GHF处理非线性模型的滤波精度高、稳定性好, 但当维数较高时, 存在着“维数灾难”问题. 冉昌艳等<sup>[7]</sup>在高斯厄米特数值积分基础上引入稀疏网格理论<sup>[8]</sup>, 在保持原有积分精度的同时, 避免了积分点随维数指数增长, 并提出了稀疏网格高斯求积卡尔曼滤波(SGQF). CKF非线性逼近特性强、实现简单, 其数值稳定性和滤波精度较UKF好<sup>[9]</sup>. 因而它一被提出即得到广泛运用, 引

收稿日期: 2015-04-10; 修回日期: 2015-07-07.

基金项目: 国家重大科学仪器设备开发专项资金项目(2012YQ090208); 国家自然科学基金项目(61503019); 北京市自然科学基金项目(4152041); 北京高等学校青年英才计划项目(YETP0504).

作者简介: 赵利强(1982—), 男, 讲师, 博士, 从事非线性系统状态估计、复杂工业过程智能检测与控制等研究; 王建林(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂工业过程智能检测与优化控制等研究.

起众多学者对其进行改进. Bin等<sup>[10]</sup>利用任意阶全对称球面插值准则<sup>[11]</sup>和矩匹配原理, 给出了高阶容积准则, 利用该准则可以导出高阶CKF, 提高CKF的滤波精度; 而且在相同精度等级下, 高阶CKF计算量要比SGQF小.

标准高阶CKF滤波算法中, 协方差矩阵分解的方法为Cholesky分解, 获得的结果只是从形式上满足, 而不是理论意义上的平方根<sup>[12]</sup>. 由于计算误差和舍入误差、模型失准等原因, 协方差矩阵容易失去正定性, 导致滤波中断<sup>[13]</sup>. 对于3阶CKF可以用平方根滤波的方法避免, 而高阶CKF中有些容积点所对应的权值可能为负, 不能用传统的均方根滤波<sup>[14-15]</sup>.

针对上述问题, 本文在高阶CKF基础上, 引入矩阵对角化变换, 提出一种基于矩阵对角化变换的高阶CKF(高阶DMCKF), 推导出5阶容积点及其权值, 并用5维目标跟踪模型进行仿真实验.

## 1 非线性高斯滤波

考虑如下非线性离散系统:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{Z}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{X}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{Z}_k \in \mathbf{R}^m$  分别为系统状态向量和量测向量;  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  为相互独立的系统噪声和量测噪声, 且  $\mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$ ,  $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ ; 初始状态  $\mathbf{X}_0 \sim N(0, \mathbf{P}_0)$  与  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  不相关.

Ito等<sup>[1]</sup>基于高斯假设和贝叶斯最优估计, 给出了非线性滤波在理论意义上的递推最优解决办法, 并指出非线性滤波难点在于求解形如

$$\mathbf{I}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{X})N(\mathbf{X}; 0, \mathbf{I})d\mathbf{X} \quad (2)$$

的多维高斯非线性积分. 一般情况下, 无法得到这类积分的精确解析值, 因此需要用近似的方法获得其解析值的近似解. 对于服从标准正态分布的变量, 这些近似准则都可以用下式表示:

$$\mathbf{I}(f) \approx \sum_{i=1}^{N_p} \omega_i f(\boldsymbol{\xi}_i). \quad (3)$$

其中:  $f(\mathbf{X})$  为任意函数,  $\mathbf{R}^n$  为积分区域,  $N_p$  为积分点总数,  $\omega_i$  与  $\boldsymbol{\xi}_i$  分别为权值和积分点. 而对于服从一般高斯分布的变量, 可以通过协方差变换得到, 如

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(f) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{X})N(\mathbf{X}; \widehat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})d\mathbf{X} = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{S}\mathbf{X} + \widehat{\mathbf{X}})N(\mathbf{X}; 0, \mathbf{I})d\mathbf{X} \approx \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} \omega_i f(\mathbf{S}\boldsymbol{\xi}_i + \widehat{\mathbf{X}}), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$ ,  $\mathbf{S}$  为协方差  $\mathbf{P}$  的平方根.

$\omega_i$  与  $\boldsymbol{\xi}_i$  可由很多方法获得, 如高斯厄米特求积准则、不敏变换准则、球面径向容积准则等. 对于高

维非线性系统, 球面径向容积准则数值稳定性强, 滤波精度高, 计算量较小<sup>[6]</sup>. 为了进一步提高估计精度, 可将CKF中3阶容积准则进行推广, 构建相同精度等级下计算量远小于高斯厄米特求积准则的高阶容积准则.

## 2 高阶容积准则原理

由全对称球面插值准则和径向准则将式(4)转化为<sup>[5,10]</sup>

$$\mathbf{I}(f) \approx \frac{1}{\pi^{n/2}} \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_s} \omega_{r,j} \omega_{s,i} f(\sqrt{2}\sqrt{\mathbf{P}_k} r_j \mathbf{s}_i + \widehat{\mathbf{X}}_k). \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{s}_i$ ,  $\omega_s$  和  $N_s$  分别为全对称球面插值准则的积分点、权值和积分点总数;  $r_j$ ,  $\omega_r$  和  $N_r$  分别为径向准则的积分点、权值和积分点总数. 当全对称球面插值准则和径向准则的逼近精度到达  $d$  阶时, 理论证明了积分  $\mathbf{I}(f)$  的逼近精度也达到  $d$  阶. 因此, 为了获得精度等级更高的容积准则, 需要同时提升全对称球面插值准则和径向准则的估计精度等级.

### 2.1 任意阶全对称球面插值准则原理

一种可以到达任意精度等级的全对称球面插值准则的原理如下<sup>[11]</sup>:

$$\mathbf{I}_{U_n}(f) \triangleq \int_{U_n} f(\mathbf{y})d\sigma(\mathbf{y}), \quad (6)$$

$$\mathbf{I}_{U_n, 2m+1}(f) = \sum_{|\mathbf{p}|=m} \omega_{\mathbf{p}} G\{u_{\mathbf{p}}\}. \quad (7)$$

式(6)定义了一个球面积分,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ ,  $U_n$  为  $n$  维单位超球面, 有  $U_n = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1\}$ ,  $\sigma(\cdot)$  为  $U_n$  上的面积元. 式(7)中  $2m+1$  表示可精确积分的多项式阶数, 且  $m \geq 1$ .  $\omega_{\mathbf{p}}$  和  $G\{u_{\mathbf{p}}\}$  的定义如下:

$$\omega_{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{I}_{U_n} \left\{ \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{p_i-1} \frac{y_i^2 - u_i^2}{u_{p_i}^2 - u_i^2} \right\}, \quad (8)$$

$$G\{u_{\mathbf{p}}\} \triangleq 2^{-c(u_{\mathbf{p}})} \sum_v f(v_1 u_{p_1}, v_2 u_{p_2}, \dots, v_n u_{p_n}). \quad (9)$$

式(8)右端是一个球面积分, 被积变量为  $y_i$ , 下标  $p_i$  为非负整数, 且  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ ,  $|\mathbf{p}| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ . 式(9)上标  $c(u_{\mathbf{p}})$  表示  $u_{\mathbf{p}} = (u_{p_1}, u_{p_2}, \dots, u_{p_n})$  中非零元素的个数,  $n$  为系统的维数. 球面准则的积分点  $k$  为  $\mathbf{s}_i = [v_1 u_{p_1}, v_2 u_{p_2}, \dots, v_n u_{p_n}]^T$ ,  $v_i = \pm 1$ ,  $u_{p_i} = \sqrt{p_i/m}$ ,  $p_i = 0, 1, \dots, m$ , 积分点相应的权值为  $2^{-c(u_{\mathbf{p}})} \omega_{\mathbf{p}}$ .

为了方便求解式(8), 文献[11]给出了如下等式:

$$\begin{aligned} &\int_{U_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} d\sigma = \\ &= \frac{\Gamma((k_1+1)/2)\Gamma((k_2+1)/2)\dots\Gamma((k_n+1)/2)}{\Gamma(|\mathbf{K}|+n)/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

其中:  $|\mathbf{K}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ,  $\Gamma(x)$  为 Gamma 函数, 具体积分形式为  $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-\lambda)\lambda^{x-1}d\lambda$ .

根据上述原理, 求解任意精度等级  $m$  球面积分的积分点和权值步骤为:

- 1) 根据积分精度水平  $m$  和系统维数  $n$ , 由  $|\mathbf{p}| = m$  确定  $\mathbf{p}$  的取值排列组合;
- 2) 根据  $\mathbf{p}$  的取值, 由  $u_{p_i} = \sqrt{p_i/m}$  ( $p_i = 0, 1, \dots, m$ ) 确定  $u_{p_i}$  的值, 从而确定积分点;
- 3) 根据  $\mathbf{p}$  的取值求解式 (8), 从而确定相应的权值.

## 2.2 任意阶径向准则原理

径向积分的近似可由高斯拉盖尔积分公式求出, 也可由矩匹配的方法得到. 矩匹配的基本原理是, 寻找积分点  $\mathbf{r}_j$  和相应权值  $\omega_{r,j}$ , 使其满足如下矩方程:

$$\sum_{j=1}^{N_r} \omega_{r,j} \mathbf{S}(\mathbf{r}_j) = \int_0^\infty \mathbf{S}(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr. \quad (11)$$

令  $\mathbf{S}(r) = r^l$  为  $r$  的单项式, 因球面准则和球面-径向准则都为全对称准则, 所以  $l$  为偶整数<sup>[5]</sup>, 则式 (11) 转化为

$$\sum_{j=1}^{N_r} \omega_{r,j} \mathbf{S}(\mathbf{r}_j) = \int_0^\infty r^{l+n-1} \exp(-r^2) dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+l}{2}\right). \quad (12)$$

若要得到  $2m+1$  阶径向准则, 则式 (12) 要对  $l = 0, 2, \dots, 2m$  的积分精确成立, 从而产生  $m+1$  个方程, 解出该方程组即可完成任意精度等级下的径向准则积分点和权值的计算.

## 2.3 高阶容积准则表达式

对于给定的积分精度水平  $m$ , 将满足式 (9) 的全对称球面插值点  $\mathbf{s}_i$ 、权值  $\omega_s$  和式 (12) 的径向积分点  $\mathbf{r}_j$ 、权值  $\omega_r$  代入式 (5), 便可得到对应精度的高阶容积准则近似积分的具体表达式, 即

$$\mathbf{I}(f) \approx \sum_{l=1}^{N_p} \omega_l f(\sqrt{\mathbf{P}_k} \boldsymbol{\xi}_l + \widehat{\mathbf{X}}_k). \quad (13)$$

其中:  $N_p = N_r N_s$ ,  $\omega_l = (\pi)^{-n/2} \omega_{r,j} \omega_{s,i}$ ,  $\boldsymbol{\xi}_l = \sqrt{2} \mathbf{r}_j \mathbf{s}_i$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_r$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_s$ .

## 3 基于矩阵对角化变换的高阶 CKF

协方差矩阵作为实对称正定矩阵, 其理论意义上的平方根矩阵唯一, 可由矩阵对角化变换方法获得<sup>[12]</sup>. 理论意义上的平方根矩阵保留了协方差矩阵原有的特征空间信息, 可以使协方差的传递更加准确, 从而提高滤波精度. 基于矩阵对角化变换的方法不要求协方差矩阵正定, 可以避免协方差非正定引起的滤波中断问题, 从而增加算法的稳定性. 因此, 矩阵对角化变换的引入, 可以有效提高标准高阶 CKF 的滤波

精度和滤波稳定性.

### 3.1 矩阵对角化变换

**定理 1** 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶实对称矩阵, 则必有  $n$  阶正交矩阵  $\mathbf{V}$ , 使得  $\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{D}$ , 即  $\mathbf{A} = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}$ , 其中  $\mathbf{D}$  是以  $\mathbf{A}$  的  $n$  个特征值为对角元素的对角阵.

定理证明详见文献 [12].

协方差矩阵  $\mathbf{P}$  为实对称矩阵, 由定理可得  $\mathbf{P} = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}$ , 其中  $\mathbf{D}$  是以  $\mathbf{P}$  的  $n$  个特征值为对角元素的对角阵, 为  $n$  个特征值对应的两两正交的特征向量构成的正交矩阵. 令

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}^T \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \mathbf{V}, \quad (14)$$

则有

$$\mathbf{S} \mathbf{S} = \mathbf{V}^T \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} = \mathbf{P},$$

易知  $\mathbf{S}$  为实对称矩阵, 故  $\mathbf{P} = \mathbf{S} \mathbf{S}^T$ . 对  $\mathbf{P}$  进行特征值分解得到特征根矩阵  $\mathbf{D}$  和特征向量  $\mathbf{V}$ , 利用式 (14) 即可求出其平方根矩阵  $\mathbf{S}$ . 该方法获得的平方根矩阵为理论意义的平方根矩阵, 保留了协方差矩阵原有的特征空间信息, 使得协方差的传递更加准确, 可以有效提高滤波精度.

### 3.2 高阶 DMCKF 算法

结合高斯统一滤波框架、高阶容积准则以及矩阵对角化变换, 给出高阶 DMCKF 算法流程. 根据式 (1) 给出的非线性系统, 设初始状态  $\widehat{\mathbf{X}}_{0|0} \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}_{0|0}, \mathbf{P}_{0|0})$  与  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  互不相关, 误差协方差阵的特征平方根初值  $\mathbf{S}_{0|0} = \text{chol}(\mathbf{P}_{0|0})^T$ , 高阶 DMCKF 算法流程如下所示.

1) 时间更新.

① 用上时刻  $\mathbf{S}_{k-1|k-1}$  更新容积点  $\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}$  和传播后的容积点  $\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^*$ , 即

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \widehat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}, \quad (15)$$

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^* = f_{k-1}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}); \quad (16)$$

② 更新一步状态预测值

$$\widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^* \omega_i; \quad (17)$$

③ 更新一步预测误差协方差

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^* - \widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1})(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^* - \widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1})^T$$

$$\widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1})^T * \omega_i + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (18)$$

2) 量测更新.

① 计算容积点

$$[\mathbf{V} \ \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{P}_{k|k-1}), \mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{V}, \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1}\boldsymbol{\xi}_i + \widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1}; \quad (20)$$

② 更新测量方程传播容积点

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = h_k(\mathbf{X}_{i,k|k-1}); \quad (21)$$

③ 更新测量预测值

$$\widehat{\mathbf{Z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^* \omega_i; \quad (22)$$

④ 更新预测输出协方差

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{zz,k|k-1} = & \\ & \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^* - \widehat{\mathbf{Z}}_{k|k-1}) \times \\ & (\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^* - \widehat{\mathbf{Z}}_{k|k-1})^T \omega_i + \mathbf{R}_k; \end{aligned} \quad (23)$$

⑤ 更新互协方差

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xz,k|k-1} = & \\ & \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \times \\ & (\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^* - \widehat{\mathbf{Z}}_{k|k-1})^T \omega_i; \end{aligned} \quad (24)$$

⑥ 更新卡尔曼滤波增益

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{P}_{xz,k|k-1} \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{-1}; \quad (25)$$

⑦ 更新预测状态值

$$\widehat{\mathbf{X}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k(\mathbf{Z}_k - \widehat{\mathbf{Z}}_{k|k-1}); \quad (26)$$

⑧ 更新误差协方差阵

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{P}_{zz,k|k-1} \mathbf{W}_k^T, \quad (27)$$

$$[\mathbf{V} \ \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{P}_{k|k}), \mathbf{S}_{k|k} = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{V}. \quad (28)$$

式(19)和(28)中的 eig() 表示特征值分解, 与标准高阶CKF中所用的Cholesky分解相比计算复杂度相同, 都为  $O(n^3)$ . 而这两个计算公式只是多了一步矩阵相乘, 所增加的计算复杂度为  $O(n^3)$ . 不同精度等级的DMCKF算法流程相同, 区别在于不同阶容积准则得到的容积点和权值. 精度等级越高, 其近似精度越高. 对于实时性要求高的非线性系统, 5阶容积准则在计算量和估计精度权衡得当, 有较强的应用价值.

### 3.3 5阶容积准则推导

按照高阶容积准则原理, 分别求解5阶球面准则和5阶径向准则的积分点与权值, 继而导出5阶容积准则的积分点和权值.

#### 3.3.1 5阶全对称球面插值准则

对于5阶球面准则, 有  $2m + 1 = 5, m = 2$ , 其求

解步骤如下.

1) 确定式(8)中  $p$  取值的所有组合

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 0), (0, 1, 1, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, 1, 1),}_{n \text{ dimensions}} \quad (2n(n-1) \text{ kinds})$$

or

$$\underbrace{(2, 0, \dots, 0), (0, 2, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, 2)}_{n \text{ dimensions}}. \quad (29)$$

$n \text{ kinds}$

2) 由任意阶球面准则的求解步骤的步骤2)可知

$$\begin{aligned} u_{p_i} = & \left( \sqrt{\frac{p_1}{2}}, \sqrt{\frac{p_2}{2}}, \dots, \sqrt{\frac{p_n}{2}} \right) = \\ & \left( \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \dots, 0 \right), \left( 0, \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \dots, 0 \right), \dots, \\ & \left( 0, 0, \dots, \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} u_{p_i} = & \\ & (\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1), \end{aligned} \quad (30)$$

故积分点共有  $2n + 2n(n-1) = 2n^2$  个, 即  $N_s = 2n^2$ .

3) 对于式(30)中的两类组合, 分别有

$$\begin{aligned} \omega_{(2,0,\dots,0)} = & \int_{U_n} \frac{x_1^2 \left( x_1^2 - \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2}} d\sigma = \frac{4-n}{n(n+2)Y_n}; \\ \omega_{(1,1,\dots,0)} = & \int_{U_n} \frac{x_1^2 x_2^2}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} d\sigma = \frac{4}{n(n+2)Y_n}. \end{aligned}$$

其中  $Y_n = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$ , 该组合中只有一个非零整数, 从而  $c(u_p) = 1$ , 故其权值为

$$\omega_s = \frac{4-n}{2n(n+2)Y_n}. \quad (31)$$

该组合中有两个非零整数, 从而  $c(u_p) = 2$ , 故其权值为

$$\omega_s = \frac{Y_n}{n(n+2)}. \quad (32)$$

#### 3.3.2 5阶径向准则

对于5阶径向准则有  $N_r = 2$ , 存在两个积分点  $r_1, r_2$  和相应权值  $\omega_{r,1}, \omega_{r,2}$ , 且  $l = 0, 2, 4$ , 从而得到如下方程组:

$$\begin{cases} \omega_{r,1}r_1^0 + \omega_{r,2}r_2^0 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \\ \omega_{r,1}r_1^2 + \omega_{r,2}r_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right), \\ \omega_{r,1}r_1^4 + \omega_{r,2}r_2^4 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right). \end{cases} \quad (33)$$

式(32)中有4个未知变量, 但只有3个方程, 因而上述方程有无数组解. 若将其中一个未知数设为定值, 则方程组存在唯一解. 为了获得最少的积分点, 设

$r_1 = 0$ , 则有

$$\begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = \sqrt{\frac{n}{2} + 1}; \\ \omega_{r,1}r_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{n+2}, \\ \omega_{r,1}r_2 = \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(n+2)}. \end{cases} \quad (34)$$

### 3.3.3 5阶容积点及其权值

将式(30)~(32)中的5阶球面准则的积分点与权值和式(34)中的5阶径向准则的积分点与权值代入式(13)中, 有  $N_p = N_r N_s = 2 \times 2n^2$ . 由于式(34)中径向积分点  $r_1 = 0$ , 使得  $2n^2$  个容积点  $\xi_l = \sqrt{2}r_1 \mathbf{s}_i(l, i = 1, 2, \dots, 2n^2)$  都为  $n$  维零向量, 故不同容积点总数为  $N_p = 2n^2 + 1$ . 将相同的容积点看为一个, 所对应的权值相加, 则得到形如式(13)的5阶容积准则的容积点和权值分别为

$$\xi_l = \begin{cases} [0 \ 0 \ \dots \ 0], & l = 1; \\ \sqrt{n+2} \mathbf{a}_l, & l = 2, 3, \dots, 2n+1; \\ \sqrt{n+2} \mathbf{b}_l, & l = 2n+2, 2n+3, \dots, 2n^2+1; \end{cases} \quad (35)$$

$$\omega_l = \begin{cases} \frac{2}{n+2}, & l = 1; \\ \frac{4-n}{2(n+2)^2}, & l = 2, 3, \dots, 2n+1; \\ \frac{2}{(n+2)^2}, & l = 2n+2, 2n+3, \dots, 2n^2+1. \end{cases} \quad (36)$$

式(35)中  $\mathbf{a}_l$  表示矩阵  $\mathbf{B}$  的第  $l$  列,  $\mathbf{B} = [\mathbf{I} \ -\mathbf{I}]$ ,  $\mathbf{I}$  为单位阵.

$$\mathbf{b}_l = \begin{cases} \mathbf{b}_j^+, & l = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}; \\ -\mathbf{b}_j^+, & l = \frac{n(n-1)}{2+1}, \dots, \frac{2n(n-1)}{2}; \\ \mathbf{b}_j^-, & l = \frac{2n(n-1)}{2+1}, \dots, \frac{3n(n-1)}{2}; \\ -\mathbf{b}_j^-, & l = \frac{3n(n-1)}{2+1}, \dots, \frac{4n(n-1)}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_j^+ \triangleq \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_p); k < p; k, p = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$$\mathbf{b}_j^- \triangleq \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_p); k < p; k, p = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_p$  为单位阵  $\mathbf{I}$  的第  $k$ 、第  $p$  列.

## 4 实验与分析

用5维目标跟踪模型来验证非线性滤波器的性能<sup>[4-5,10]</sup>, 飞行器在水平方向以未知的角速度  $\Omega(k)$  持续不断地飞行, 动力学方程如下:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 & \frac{-1 + \cos(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 \\ 0 & \cos(\Omega(k)T) & 0 & -\sin(\Omega(k)T) & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 1 & \frac{\sin(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 \\ 0 & \sin(\Omega(k)T) & 0 & \cos(\Omega(k)T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}. \quad (37)$$

其中: 状态量  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega(k)]^T$ ,  $[x, y]$  和  $[\dot{x}, \dot{y}]$  为坐标轴  $x$  和  $y$  方向对应的位置和速度,  $T$  为两次测量时间的间隔 1 s, 过程噪声满足  $\mathbf{w}_k \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{Q})$ .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 T^3}{3} & \frac{q_1 T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q_1 T^2}{2} & q_1 T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q_1 T^3}{3} & \frac{q_1 T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q_1 T^2}{2} & q_1 T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 T \end{bmatrix}. \quad (38)$$

$q_1 = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  和  $q_2 = 1.75 \times 10^{-3} \text{ s}^{-3}$  为过程噪声强度参数.

雷达对飞行器进行测量, 两者斜距为  $\sigma$ , 方位为  $\theta$ . 测量方程为

$$\begin{bmatrix} \sigma_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \text{atan} 2(x_k, y_k) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \quad (39)$$

其中  $\text{atan} 2$  为四象限反正切函数,  $\mathbf{v}_k \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{R})$ .

$$\mathbf{R} = \text{diag}[1000 \text{ m}^2, 100 \text{ mrad}^2]. \quad (40)$$

其真实状态初始值和真实状态协方差分别为

$$\mathbf{x}_0 = [1000 \text{ m}, 300 \text{ m/s}, 1000 \text{ m}, 0 \text{ m/s}, -3^\circ/\text{s}]^T,$$

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}[100 \text{ m}^2, 10 \text{ m}^2/\text{s}^2, 100 \text{ m}^2,$$

$$10 \text{ m}^2/\text{s}^2, 100 \text{ mrad}^2/\text{s}^2].$$

状态估计初始值  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  为  $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_{0|0})$  的随机生成, 均方根误差 (RMSE) 为不同非线性滤波器性能的评价指标,  $k$  时刻位置、速度和角速度的 RMSE 定义为

$$\text{RMSE}_{\text{pos}}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N ((x_k^n - \hat{x}_{k|k}^n)^2 + (y_k^n - \hat{y}_{k|k}^n)^2)}, \quad (41)$$

$$\text{RMSE}_{\text{vel}}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N ((\dot{x}_k^n - \hat{\dot{x}}_{k|k}^n)^2 + (\dot{y}_k^n - \hat{\dot{y}}_{k|k}^n)^2)}, \quad (42)$$

$$\text{RMSE}_{\Omega}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\Omega_k^n - \hat{\Omega}_{k|k}^n)^2}. \quad (43)$$

其中:  $N$  为 Monte-Carlo 仿真次数,  $(x_k^n, y_k^n)$  和  $(\hat{x}_{k|k}^n, \hat{y}_{k|k}^n)$  为第  $n$  次 Monte-Carlo 仿真中位置的真实值和估计值, 式 (43) 和 (42) 中表达式的含义与式 (41) 类似.

仿真平台主频为 2.26 GHz, 仿真工具为 Matlab 2010a, 仿真时间  $T = 100$  s, Monte-Carlo 仿真次数  $N = 50$ .

综合考虑滤波精度与计算量, 选择 5 阶 DMCKF 进行仿真实验, 并与 3 阶 CKF、5 阶 CKF、3 阶 GHF 和 3 阶 SGQF 进行对比. 其中, 3 阶 CKF 可精确积分 3 次多项式, 5 阶 CKF、积分精度水平为 3 的 GHF 和 SGQF 可精确积分 5 次多项式. 根据积分点数量, 计算量从大到小分别为积分精度水平为 3 的 GHF、SGQF, 5 阶 CKF 和 3 阶 CKF. 位置、速度和角速度的 RMSE 如图 1~图 3 所示, 仿真前 40 s 结果相差很小, 故只对比 40 s~100 s 的仿真结果.

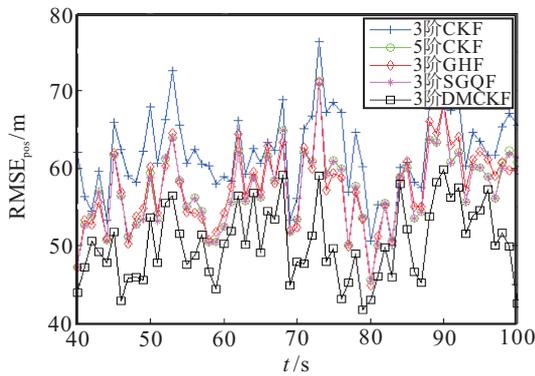


图 1 位置的均方根误差

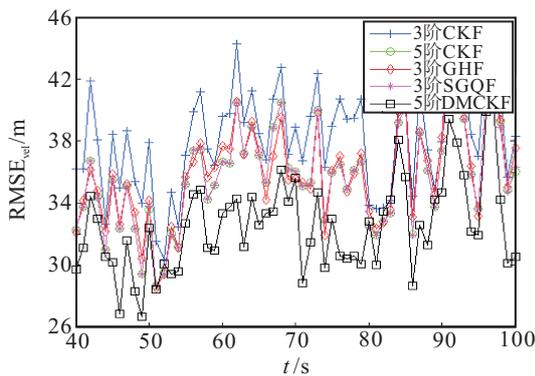


图 2 速度的均方根误差

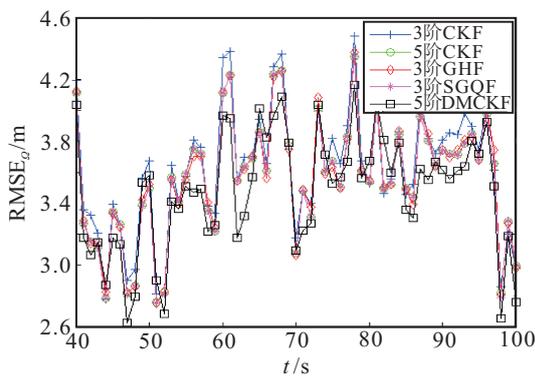


图 3 角速度的均方根误差

不同算法的  $\xi$  点数量和计算时间的对比如表 1 所示, 40~100 s 的平均均方根误差的对比结果如表 2 所示.

表 1 不同算法的  $\xi$  点数量和计算时间

算法	$\xi$ 点数量	t/s
3阶 CKF	10	1.26
5阶 CKF	51	5.53
3阶 GHF	243	25.58
3阶 SGQF	61	6.48
5阶 DMCKF	51	6.63

表 2 不同算法的各项平均均方根误差

算法	位置/m	速度/(m/s)	角速度/(Deg/s)
3阶 CKF	62.2057	38.2299	3.6203
5阶 CKF	57.1692	35.7485	3.5604
3阶 GHF	57.4439	35.9844	3.5646
3阶 SGQF	57.1207	35.7311	3.5598
5阶 DMCKF	50.2600	32.5577	3.4807

不同滤波算法的仿真结果表明, CKF 在提高估计精度等级后, 5 阶 CKF 滤波精度高于 3 阶 CKF. 5 阶 CKF、3 阶 GHF 和 3 阶 SGQF 滤波精度接近, 但 5 阶 CKF 计算量最小. 5 阶 DMCKF 的滤波精度明显高于 5 阶 CKF, 原因在于矩阵对角化变换的引入, 使得协方差的传递更加准确. 式 (19) 和 (28) 涉及两次矩阵相乘的计算, 其计算量比 5 阶 CKF 略大. 由表 1 和表 2 可以看出, 5 阶 DMCKF 在计算复杂性增加不多的情况下, 估计精度较 5 阶 CKF 大为提高.

为了进一步测试不同条件下新算法的适应性, 考虑量测噪声为混合高斯分布情况下的滤波<sup>[10]</sup>, 加入的仿真量测噪声如下所示:

$$v \sim 0.5N(0, R_1) + 0.5N(0, R_2),$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1000 \text{ m}^2 & 150 \text{ m} \cdot \text{mrad} \\ 150 \text{ m} \cdot \text{mrad} & 100 \text{ mrad}^2 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 50 \text{ m}^2 & 100 \text{ m} \cdot \text{mrad} \\ 100 \text{ m} \cdot \text{mrad} & 1000 \text{ mrad}^2 \end{bmatrix}.$$

滤波器中采用的等效高斯白噪声如下所示:

$$R = \begin{bmatrix} 525 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 550 \text{ mrad}^2 \end{bmatrix},$$

系统其他各个参数和初始值不变.

3 阶积分精度水平的 SGQF 多次出现滤波中断, 故选择 5 阶 DMCKF 进行仿真实验, 并与 3 阶 CKF、5 阶 CKF 和 3 阶积分精度水平的 GHF 进行对比. 位置的 RMSE 如图 4 所示, 速度和角速度的 RMSE 也是 5 阶 DMCKF 最小. 该组实验中, 3 阶 CKF 出现了较大的误差; 5 阶 CKF 和 3 阶积分精度水平的 GHF 滤波精度相当, 且明显优于 3 阶 CKF; 5 阶 DMCKF 表现出较好的滤波性能, 滤波精度最高, 而且具有较高的滤波稳定性.

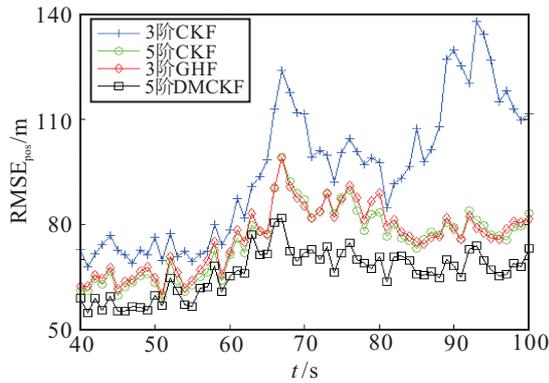


图 4 位置的均方根误差

## 5 结 论

基于矩阵对角化变换的高阶CKF引入了矩阵对角化变换,使得协方差矩阵分解后的平方根矩阵保留了原有的特征空间信息,有效地提高了高阶CKF的滤波精度.矩阵对角化变换不要求协方差矩阵正定,改善了高阶CKF的滤波稳定性.在处理高维非线性状态估计问题时,基于矩阵对角化变换的高阶CKF比标准高阶CKF具有更高的数值稳定性和估计精度.

### 参考文献(References)

- [1] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.
- [2] Bucy R S, Senne K D. Digital synthesis of nonlinear filters[J]. Automatica, 1971, 7(3): 287-298.
- [3] Julier S J, Uhlmann J K. A new approach for filtering nonlinear system[C]. Proc of the 1995 American Control Conf. Washington, 1995: 1628-1632.
- [4] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(5): 953-977.
- [5] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(8): 1254-1269.
- [6] 王小旭, 潘泉, 黄鹤, 等. 非线性系统确定采样型滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 801-812.  
(Wang X X, Pan Q, Huang H, et al. Overview of deterministic sampling filtering algorithms for nonlinear system[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 801-812.)
- [7] 冉昌艳, 程向红, 王海鹏. 稀疏网格高斯滤波器在SINS初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2013, 21(5): 591-597.  
(Ran C Y, Cheng X H, Wang H P. Application of sparse-grid gauss filter in SINS initial alignment[J]. J of Chinese Inertial Technology, 2013, 21(5): 591-597.)
- [8] Heiss F, Winschel V. Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids[J]. J of Econometrics, 2008, 144(1): 62-80.
- [9] 孙枫, 唐李军. Cubature 卡尔曼滤波和 Unscented 卡尔曼滤波估计精度比较[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 303-308.  
(Sun F, Tang L J. Estimation precision comparison of Cubature Kalman filter and Unscented Kalman filter[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 303-308.)
- [10] Bin Jia, Ming Xin, Yang Cheng. High-degree cubature Kalman filter[J]. Automatica, 2013, 49(2): 510-518.
- [11] Alan Genz. Fully symmetric interpolatory rules for multiple integrals over hyper-spherical surfaces[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2003, 157(1): 187-195.
- [12] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 167-257.
- [13] 巫春玲, 韩崇昭. 基于平方根求积卡尔曼滤波器的弹道目标跟踪[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 721-725.  
(Wu C L, Han C Z. Tracking ballistic target based on square root quadrature Kalman filter[J]. Control and Decision, 2010, 25(5): 721-725.)
- [14] 张秋昭, 张书毕, 刘志平, 等. 基于奇异值分解的鲁棒容积卡尔曼滤波及其在组合导航中的应用[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 341-345.  
(Zhang Q Z, Zhang S B, Liu Z P, et al. Robust cubature Kalman filter based on SVD and its application to integrated navigation[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 341-345.)
- [15] 黄湘远, 汤霞清, 武萌. 5阶CKF在捷联惯导非线性对准中的应用研究[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(3): 633-638.  
(Huang X Y, Tang X Q, Wu M. Application of 5th-degree CKF in SINS nonlinear initial alignment[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(3): 633-638.)

(责任编辑: 孙艺红)