

文章编号: 1001-0920(2016)06-0976-07

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0454

变速控制力矩陀螺的飞轮参数与构型倾侧角优化设计

刘 锋, 赵 辉, 姚 郁

(哈尔滨工业大学 航天学院控制与仿真中心, 哈尔滨 150086)

摘 要: 为了在保证姿控和储能功能条件下设计出变速控制力矩陀螺(VSCMG)簇参数, 在已有动量包络分析的基础之上, 给出了考虑飞轮调速范围存在上限和下限约束条件下的动量包络空间和储能特性分析, 提出了VSCMG簇的飞轮参数和构型倾侧角的优化设计方法. 将VSCMG簇的参数优化设计问题描述为非线性、多约束、强耦合的单目标静态优化问题, 采用序列二次规划算法求解优化问题, 获得优化的单元参数, 并计算出动量包络面, 验证了所提出优化方法的有效性.

关键词: 变速控制力矩陀螺; 动量包络特性分析; 储能容量; 构型倾侧角; 飞轮动量参数; 优化设计

中图分类号: V448.22+2

文献标志码: A

Optimization design of flywheel parameters and configuration skew angle for variable speed control moment gyros

LIU Feng, ZHAO Hui, YAO Yu

(Control and Simulation Center, School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150086, China.
Correspondent: LIU Feng, E-mail: ycxh101_cc@126.com)

Abstract: Based on the existing results of the momentum envelop for the variable speed control moment gyroscope(VSCMG) cluster, in order to design parameters for the multifunction of attitude control and energy storage, the specificity analysis of the momentum envelop and energy storage under the condition of upper speed limit and lower speed limit of flywheel is firstly proposed. The optimal method of flywheel parameters and skew angle of pyramid configuration is cast as the nonlinear, multi-constrains, and strong coupling single objection optimal problem. The sequential quadratic program method is applied to solve the problem of optimal parameters. Finally, the momentum envelop, based on optimal parameters is calculated, and the results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: VSCMG; analysis of the characteristic of momentum envelop; energy capacity; configuration skew angle; the parameters of flywheel; optimal design

0 引 言

控制力矩陀螺(CMG)是一种具有线性力矩输出能力的执行机构, 能够保证航天器实现大角度机动和高精度指向任务要求^[1-5]. 考虑飞轮转速是否可调整, CMG可以分为飞轮转速恒定的单框架控制力矩陀螺(SGCMG)和变速控制力矩陀螺(VSCMG). 其中, SGCMG已经获得了广泛的应用, 如在天空实验室、国际空间站和天宫一号上^[6]. 由于SGCMG存在严重的奇异问题, 直接限制了其空间应用. 虽然俄罗斯人证明了五棱锥构型的SGCMG簇内部大部分动量包络不存在不可规避奇异点^[7-9], 但是不适用于质量和功率有严格要求的小型、敏捷的航天器. 增加飞轮速

度可调自由度的VSCMG簇, 能够完全规避内部奇异点, 实现难度不大, 无需额外的硬件开销, 对于小型、敏捷航天器具有优势. VSCMG首次由Ford等^[1]提出, 但直到目前为止, 尚未见到有关VSCMG实际上天的应用报道, 国外还处在理论验证的阶段. 考虑到VSCMG系统的特殊性(能够同时实现姿控和储能功能^[10-17]), 有必要分析VSCMG簇的动量包络优化, 给出对应单元参数的合理设计, 为将VSCMG从理论推向工程实现奠定基础.

2004年, Yoon等^[10]在飞轮的机械能约束条件下, 采用优化理论获得的VSCMG簇动量包络面是椭球体, 内部不存在奇异点, 而且所得出的一体化的姿控/

收稿日期: 2015-04-13; 修回日期: 2015-07-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203191).

作者简介: 刘锋(1984—), 男, 博士生, 从事航天器姿态控制系统的研究; 赵辉(1973—), 男, 教授, 博士生导师, 从事航天器姿态控制系统等研究.

储能(IPACS)不可逃避的奇异点为整个饱和动量包络面及其外部. 在VSCMG的单元指标分配方面, 日本东京工业大学采用VSCMG基本方程获得单元参数^[18], 但其没有考虑包络面和操纵律; Riche等^[14]从储能角度实现了特殊飞行任务, 完成了金字塔构型的VSCMG单元参数的优化设计, 其研究侧重于飞轮转子储能特性分析, 并在2009年完成了VSCMG簇的硬件设计与实现^[15]. 直到目前, 尚未见到考虑飞轮储能容量和飞轮调速范围约束条件下的VSCMG动量包络面的相关研究成果报道, 而该问题是实现VSCMG参数优化设计的关键.

本文以金字塔构型为例, 给出考虑飞轮转速上限与下限条件下的VSCMG簇动量包络面, 分析储能空间与动量包络空间的相互映射关系; 在飞轮转子质量最小的条件下, 将VSCMG簇的构型倾侧角和飞轮动量参数优化设计问题描述为非线性、多约束的静态优化问题; 采用序列二次规划算法, 完成金字塔构型VSCMG的构型倾侧角和飞轮动量参数的优化设计, 并分析设计参数, 给出对应的VSCMG簇动量包络面.

1 金字塔构型的VSCMG簇系统描述

1.1 系统描述

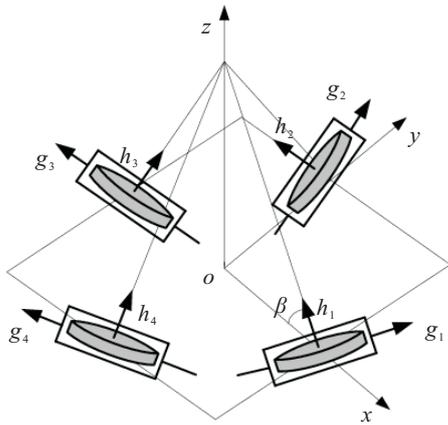


图1 金字塔构型的VSCMG簇

金字塔构型的VSCMG簇如图1所示. 建立金字塔构型的VSCMG簇的本地坐标系为 O_{xyz} . 令 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 分别为坐标系 O_{xyz} 的 x 轴、 y 轴和 z 轴的单位基矢量. 其中: β 为金字塔构型的倾侧角, \mathbf{g}_i 为每个单元的框架轴所在的矢量方向. 根据构型的空间对称分布特性, 4个框架轴矢量分别可以描述为

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= s\beta\mathbf{i} + c\beta\mathbf{k}, \\ \mathbf{g}_2 &= s\beta\mathbf{j} + c\beta\mathbf{k}, \\ \mathbf{g}_3 &= -s\beta\mathbf{i} + c\beta\mathbf{k}, \\ \mathbf{g}_4 &= -s\beta\mathbf{j} + c\beta\mathbf{k}. \end{aligned}$$

其中: $c\beta = \cos\beta$, $s\beta = \sin\beta$. 定义动量包络空间内所有可能的奇异矢量方向为

$$\mathbf{u} = s\theta_1\mathbf{i} - s\theta_1c\theta_2\mathbf{j} + c\theta_1c\theta_2\mathbf{k}.$$

其中: θ_1 和 θ_2 为经纬角, $c\theta_1 = \cos\theta_1$, $c\theta_2 = \cos\theta_2$, $s\theta_1 = \sin\theta_1$, $s\theta_2 = \sin\theta_2$. 金字塔构型的VSCMG簇可用于姿控任务的总动量描述^[5], 即

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4. \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= J\Omega_1[-c\beta s\delta_1 \quad c\delta_1 \quad s\beta \quad s\delta_1]^T, \\ \mathbf{h}_2 &= J\Omega_2[-c\delta_2 - c\beta s\delta_2 \quad s\beta s\delta_2]^T, \\ \mathbf{h}_3 &= J\Omega_3[c\beta s\delta_3 \quad -c\delta_3 \quad s\beta s\delta_3]^T, \\ \mathbf{h}_4 &= J\Omega_4[c\delta_4 \quad c\beta s\delta_4 \quad s\beta s\delta_4]^T. \end{aligned}$$

J 为飞轮转动惯量, Ω_i 为每个飞轮转速, δ_i 为框架位置, \mathbf{h}_i 为每个飞轮的动量, $s\delta_i = \sin\delta_i$, $c\delta_i = \cos\delta_i$, $i = 1, 2, \dots, 4$.

1.2 包络面的简化计算方法

在飞轮簇的机械能给定条件下, Yoon等^[10]基于微分几何法, 将VSCMG簇动量表示为

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^4 \frac{(\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}) \times \mathbf{g}_i}{|\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|} J\Omega_i. \quad (2)$$

基于优化理论, 将VSCMG簇的饱和和动量包络求解问题转换为如下所描述的优化问题:

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_i, \delta_i} J_{ME} &= \sum_{i=1}^4 J\Omega_i \mathbf{s}_i \mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 J\Omega_i^* \alpha(\delta_i); \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^4 J\Omega_i^* &= 2E. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, 4$; E 为所有飞轮的总机械能; $\alpha(\delta_i) \leq \alpha_{\max}$, $\alpha_{\max} = \sqrt{1 - (\mathbf{g}_i \mathbf{u})^2}$; \mathbf{s}_i 为每个飞轮动量对应的单位矢量. 式(3)所描述的优化问题求解难度大, 为此采用微分几何法对该优化问题进行简化处理. 式(3)所描述的优化问题是在总机械能给定的条件下, 求框架对应的4H饱和奇异面, 因此在4H奇异面上对式(3)的指标求偏导数, 可以获得如下结论

$$\frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u})}{\partial\delta_i} = 0, \quad \frac{\partial^2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u})}{\partial\delta_i^2} < 0. \quad (4)$$

即在金字塔构型的VSCMG簇的4H奇异面上, 当框架处于任意位置时, 一定能够保证式(3)的指标函数达到最大值. 结合金字塔构型奇异面处的微分方程(即式(2)), 4H奇异面上飞轮的动量的单位矢量可描述为^[5]

$$\mathbf{s}_i = \frac{(\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}) \times \mathbf{g}_i}{|\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|}. \quad (5)$$

基于式(5)的奇异面处的飞轮动量描述, 采用矢量内积原理, 得到 \mathbf{s}_i 在 \mathbf{u} 方向的投影描述为

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|. \quad (6)$$

将式(6)代入(3)中, 化简得到

$$\max_{\Omega_i} J_{ME} = \sum_{i=1}^4 J\Omega_i |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|;$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^4 J\Omega_i^* = 2E. \quad (7)$$

求解式(7)的优化问题,得到

$$\Omega_i^* = -\frac{|\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|}{2\lambda_0},$$

其中 $\lambda_0 = \pm\sqrt{\frac{J}{8E} \sum_{i=1}^4 |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|^2}$. 将式(7)的求解结果代入式(2),得到在给定飞轮总机械能一定的条件下, VSCMG 簇的饱和动量包络面为下式所描述的椭球体:

$$\frac{H_x^2(t)}{4EJ(1+c^2\beta)} + \frac{H_y^2(t)}{4EJ(1+c^2\beta)} + \frac{H_z^2(t)}{8EJs^2\beta} = 1. \quad (8)$$

分析式(8)可知,在飞轮的机械能一定的条件下,总有一个对应的饱和动量包络面存在,在该饱和动量包络面以及饱和包络面以外,框架与飞轮的零运动不存在^[10],而在饱和包络面内部,始终存在零运动,能够用于规避框架奇异点.

2 考虑飞轮调速范围与储能容量约束的 VSCMG 簇饱和动量包络

2.1 不考虑框架轴区域的动量包络

在任一框架轴附近,由式(2)的分析可知,该框架轴对应的单元的动量对姿控所需动量的贡献为零,为了保证所有飞轮的机械能总量不变,该框架对应的飞轮转速为零,其余3个飞轮转速必须上升.因此,式(8)所描述的动量方程对应的飞轮转速可以过零工作,且没有给出最高飞轮转速限制.当飞轮转速为零时,操纵框架运动无陀螺力矩输出,产生“零奇异”问题.为了规避该奇异问题,增加飞轮转速下限约束.增加飞轮转速下限约束的饱和动量包络面求解可以描述为如下的优化问题:

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_i} J_{ME} &= \sum_{i=1}^4 J\Omega_i^* |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|; \\ \text{s.t. } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 J\Omega_i^{*2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 J\Omega_{\min}^2 &= \text{Cap}. \end{aligned} \quad (9)$$

其中: Cap 为飞轮能存储或释放的机械能,可以描述为

$$E = \text{Cap} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 J\Omega_{\min}^2.$$

当 $\Omega_i^* = \Omega_{\max}$ 时,即飞轮转速达到上限约束时,储能容量达到最大.求解式(9)的优化问题,得到

$$\Omega_i^* = \frac{-|\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|}{2\lambda_0},$$

并求得

$$\lambda_0 = \pm\sqrt{\frac{J}{8\text{Cap} + 16J\Omega_{\min}^2} \sum_{i=1}^4 |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|^2},$$

代入式(2)可获得 VSCMG 簇的动量描述方程为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} J \sum_{i=1}^4 \frac{(\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}) \times \mathbf{g}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|^2}} \sqrt{\frac{8\text{Cap} + 16J\Omega_{\min}^2}{J}}. \quad (10)$$

对式(10)两边求内积,得到

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \pm \frac{J}{2\lambda_0} \left[4 - \sum_{i=1}^4 (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u})^2 \right]. \quad (11)$$

将采用式(9)求解的 λ_0 平方之后,代入式(11)可以得到

$$\lambda_0^2 = \pm\lambda_0(4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2)^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}.$$

由于 $\lambda_0 \neq 0$,可以得到

$$\lambda_0 = \pm(4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2)^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u},$$

对式(11)两边求内积,有

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{H} = (4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2) \eta \mathbf{u}. \quad (12)$$

其中 $\eta = \text{diag}[1 + c^2\beta \quad 1 + c^2\beta \quad 2s^2\beta]^T$. 式(11)可以变形为

$$\mathbf{u} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}) [J(4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2)]^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H},$$

两边再点乘 \mathbf{H} ,有

$$\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{u} = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}}{J(4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2)} \mathbf{H}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}. \quad (13)$$

式(13)可以化简为 $\mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H} = 1$, 矩阵 \mathbf{B} 为椭球体的半径,可以描述为

$$\mathbf{B} = \text{diag}[\Upsilon^{-1} \quad \Upsilon^{-1} \quad \Psi^{-1}]. \quad (14)$$

其中: x 轴与 y 轴的半轴长相等,其半轴长的平方为 $\Upsilon = J(4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2)[1 + c^2\beta]$, z 轴的半轴长度的平方为 $\Psi = 2J(4\text{Cap} + 8J\Omega_{\min}^2)s^2\beta$,即在考虑飞轮转速下限约束条件下, VSCMG 簇的动量包络为式(13)所描述的椭球体.当储能容量从零到最大时,始终存在一个饱和动量包络面,该饱和动量包络面的半径大于等于 $\text{Cap} = 0$ 时对应的饱和动量包络面对应的半径.

2.2 考虑框架轴区域的动量包络

分析式(9)可知,当 $\mathbf{u} = \mathbf{g}_i$ 时, \mathbf{h}_i 对和动量的贡献为零,因此飞轮存在转速下限约束,框架轴区域的动量包络特性必须重新分析.根据金字塔构型的对称性,这里分析 \mathbf{g}_i 附近的情形,其他框架轴矢量方向具有对称性.

当考虑飞轮转速存在最高转速和最低转速约束时,最大的饱和动量面在框架轴区域存在“凹陷”部分,不再是理想的椭球体.

定义 1 $|\mathbf{H}_{OE}|$ 为框架 \mathbf{g}_1 方向的最大和动量, $\mathbf{h}_{i\max}$ 为第 i ($i = 1, 2, \dots, 4$) 单元的飞轮转速为 Ω_{\max} 时对应的动量, $\mathbf{h}_{i\min}$ 为第 i ($i = 1, 2, \dots, 4$) 单元的飞轮转速为 Ω_{\min} 时对应的动量.

定理 1 当 $|\mathbf{H}_{OE}|$ 达到最大时,2单元、3单元和4单元的飞轮转速达到最大 Ω_{\max} ,1单元的飞轮转速

达到最小 Ω_{\min} , 且这种组合方式唯一。

证明 假设还有另外一种组合, 使得 $|\mathbf{H}_{OE}|$ 在 \mathbf{g}_1 矢量方向达到最大和动量, 必然存在如下条件:

$$\left| \sum_{i=1}^4 \mathbf{h}_i \right| \geq \left| \mathbf{h}_{1 \min} + \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \right|. \quad (15)$$

因为 $\mathbf{g}_1 \perp \mathbf{h}_1$, 所以只有2单元、3单元和4单元的飞轮动量的最大和在 \mathbf{g}_1 方向达到最大, 并且在垂直 \mathbf{g}_1 方向达到最小, 与 \mathbf{h}_1 抵消, 才能使 \mathbf{H}_{OE} 达到最大, 式(15)可以重写为

$$\left| \mathbf{h}_1^* + \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_i^* \right| \geq \left| \mathbf{h}_{1 \min} + \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \right|. \quad (16)$$

于是有

$$\sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_i^* \mathbf{h}_1 = |\mathbf{h}_1^*| \leq |\mathbf{h}_{1 \min}|,$$

得到 $|\mathbf{h}_{1 \min}^*| = |\mathbf{h}_{1 \min}|$, 因此必有

$$\left| \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_i^* \right| = \left| \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \right|. \quad (17)$$

所以, 2单元、3单元和4单元的飞轮转速都达到最大时, 式(17)才能满足。□

基于上述定理, $|\mathbf{H}_{OE}|$ 对应的动量模的计算可以描述为

$$\begin{aligned} \max_{\delta_i} |\mathbf{H}_{OE}| &= \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \cdot \mathbf{g}_1; \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \cdot \mathbf{s}_1 &= -|\mathbf{h}_{1 \min}|. \end{aligned} \quad (18)$$

由式(18)的分析结果可知, VSCMG簇的动量包络在框架轴区域不再是理想的“椭球体”, 而是产生了“凹陷区域”。这里分析框架轴的“凹陷”区域的零运动是否存在. 将和动量的变化量在 \mathbf{u} 方向二阶泰勒展开, 如下式所示:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} &= \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u}) \cdot \Delta \delta_i^2 + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u}) J \Delta \Omega_i &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

其中: 第1项为框架零运动的特性, 第2项为飞轮的零运动特性. 分析结果如表1所示. 其中: E点表示2H饱和奇异面“凹陷”区域的点, A点表示4H饱和奇异面上的点。

表1 框架轴区域奇异特性分析

框架	E点	E点	A点	A点
	框架	飞轮	框架	飞轮
$\mathbf{g}_i (i = 2, 3, 4)$	$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u} > 0$	$\Delta \Omega_3 < 0$	$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u} > 0$	$\Delta \Omega_3 < 0$
\mathbf{g}_1	$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u} < 0$	$\Delta \Omega_1 > 0$	$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{u} > 0$	$\Delta \Omega_1 < 0$
奇异特性	非奇异点	非奇异点	奇异点	奇异点

由表1的分析结果可以看出, 在框架轴的“凹陷”区域, 饱和奇异面附件存在框架与飞轮组合零运动, 但存在储能容量约束, 即只能3个飞轮达到最大

转速, 另外一个单元的飞轮转速必须低于最大转速。

3 飞轮参数与构型倾侧角优化参数优化

3.1 约束分析

1) 动量匹配. 动量匹配就是, 已知姿控系统动量包络要求, 如何对应到VSCMG簇的动量包络空间. 为了提高每个单元动量利用效率, 必须满足如下约束:

$$|\mathbf{H}_{\min}| \leq |\mathbf{H}_{OE}|. \quad (20)$$

2) 4H奇异面约束. 为了保证所设计的VSCMG簇整个包络面内部不存在IPACS奇异面^[10], 以利于储能和飞轮转速调整, 修改式(13), 给出最大储能容量与VSCMG的参数必须满足如下约束关系:

$$\frac{H_x^2(t)}{\gamma} + \frac{H_y^2(t)}{\gamma} + \frac{H_z^2(t)}{\psi} \leq 1. \quad (21)$$

分析式(1), 可以获得VSCMG簇三轴最大动量, 将三轴最大动量代入式(21), 可以得到下式所描述的4H饱和奇异面约束条件:

$$\begin{cases} \frac{[2(1+c\beta)J\Omega_{\max}]^2}{J(4\text{Cap}+8J\Omega_{\min}^2)(1+c\beta)^2} \leq 1, \\ \frac{[4(s\beta)J\Omega_{\max}]^2}{2J(4\text{Cap}+8J\Omega_{\min}^2)s^2\beta} \leq 1. \end{cases} \quad (22)$$

3.2 参数优化问题描述

在同时满足姿控和能量储存任务的条件下, VSCMG簇的参数优化设计问题即在每个单元飞轮动量利用率最高的条件下, 保证整个动量包络空间内都能够实现IPACS任务要求. 给出金字塔构型的VSCMG簇参数的优化设计方法如下:

$$\begin{aligned} \max_{\delta_i} |\mathbf{H}_{OE}| &= \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \cdot \mathbf{g}_1; \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \cdot \mathbf{s}_1 &= -|\mathbf{h}_{1 \min}|, \\ |\mathbf{H}_{\min}| &\leq |\mathbf{H}_{OE}|, \\ \text{Cap} &\leq \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} J(\Omega_{\max}^2 - \Omega_{\min}^2), \\ \frac{[2(1+c\beta)J\Omega_{\max}]^2}{J(4\text{Cap}+8J\Omega_{\min}^2)(1+c\beta)^2} &\leq 1, \\ \frac{[4(s\beta)J\Omega_{\max}]^2}{2J(4\text{Cap}+8J\Omega_{\min}^2)s^2\beta} &\leq 1. \end{aligned} \quad (23)$$

4 算例分析与系统仿真验证

4.1 基于SQP法的系统参数优化设计

由式(23)所描述的优化问题为非线性、多约束、强耦合的静态单目标优化问题, 这里采用序列二次规划算法(SQP)求解该优化问题。

1) 构型倾侧角固定. 令 Cap_r 和 $|\mathbf{H}_{\min r}|$ 分别表示实际设计的储能容量和姿控动量. 在 $\beta = 54.73^\circ$ 条件下, 采用序列二次规划算法求解式(23)的优化问题,

求解结果如图 2 所示.

由图 2 可以看出, 储能容量能够满足设计要求, 但动量包络设计始终有一定冗余. 当期望的储能容量较大时, 期望的动量过小, 式 (23) 的 VSCMG 簇参数

优化设计方法不适用.

2) 构型倾侧角变化. 在 $\beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ 条件下, 采用序列二次规划算法求解式 (23) 的优化问题, 求解结果如图 3 所示.

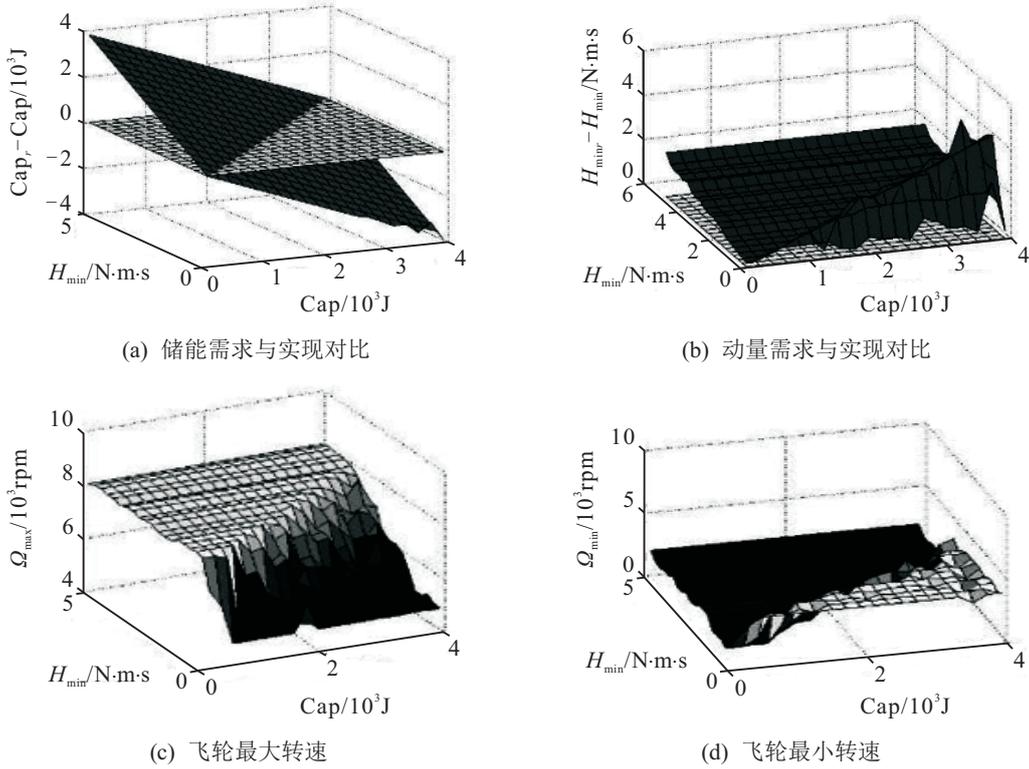


图 2 $\beta = 54.73^\circ$ 时参数优化设计结果

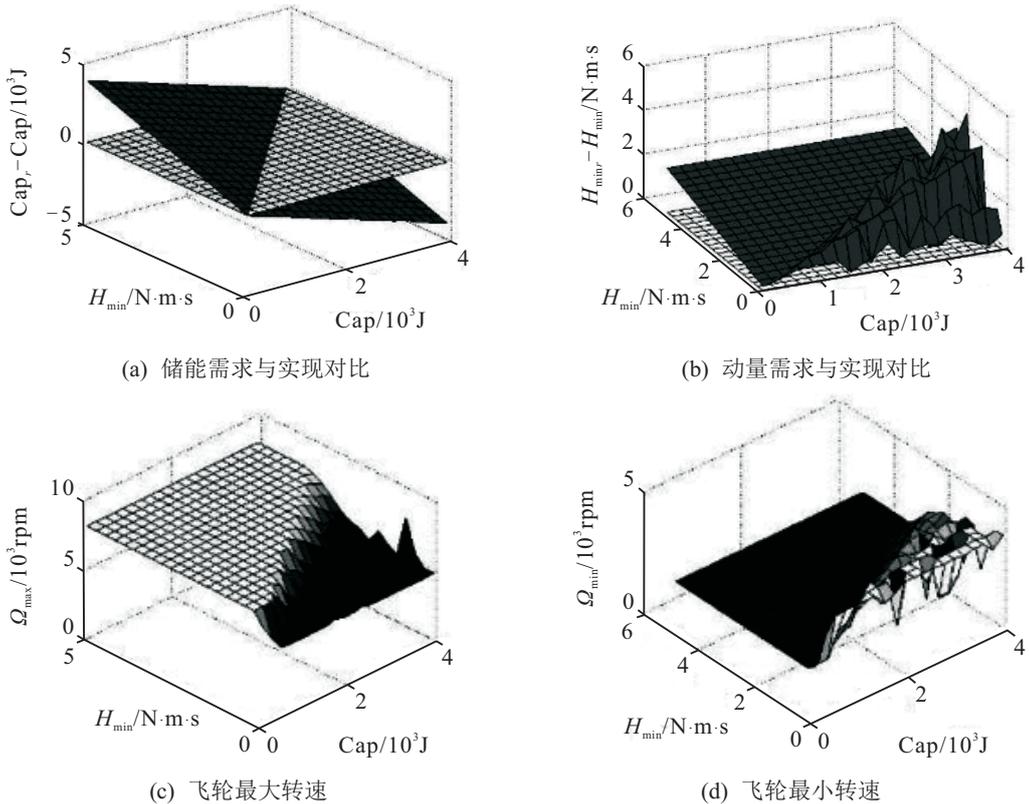


图 3 β 为变量时参数优化设计结果

由图3可以看出, VSCMG簇的储能容量能够满足设计要求, 但动量的设计始终有一定冗余. 当期望储能容量较大时, 期望的动量过小, 不适宜采用式(23)的参数优化设计方法. 为了能够准确描述每个单元动量利用效率和VSCMG簇的动量包络抗扰动能力, 这里借鉴金字塔构型的SGCMG簇中用于描述飞轮动量利用率和动量包络抗扰动能力的构型的动量效益概念^[19], 给出VSCMG簇的构型的动量效益的定义如下:

$$\gamma = \frac{|H_{OE}|}{4J\Omega_{\max}}. \quad (24)$$

当 β 为不同值时的优化结果对比如图4所示. 图4(a)中, S_1 和 S_2 分别为金字塔构型倾侧角 β 固定和变化情况下设计的飞轮转动惯量; 图4(b)中, S_3 和 S_4 分别为金字塔构型的倾侧角 β 固定和变化情况下设计的VSCMG簇对应的构型动量效益. 相对于SGCMG的动量效益(0.63), VSCMG簇的动量效益增加到0.70. 虽然倾侧角 β 的调整能够增大动量效益, 但飞轮转动惯量也随之增加, 加之动量效益增大不明显, 因此将倾侧角 β 固定为 54.73° 更有优势.

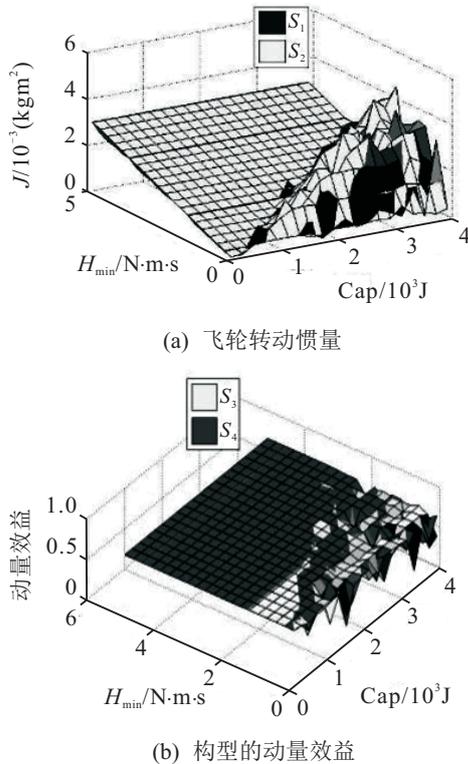


图4 β 为不同值的优化结果对比

4.2 动量包络扩展验证

这里仅给出第1单元框架轴区域的最大动量计算结果, 其余框架轴区域具有对称性. 根据构型的空间几何关系, 框架轴区域的动量“凹陷”区域可通过求解如下式所描述的优化问题获得:

$$\begin{aligned} \max_{\delta_2, \delta_3, \delta_4} \mathfrak{S} &= \left(\mathbf{h}_{1x} s \theta_2 + \sum_{i=2}^4 \mathbf{h}_{i \max} \right) \cdot \mathbf{u}; \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=2}^4 (\mathbf{h}_{i \max}) \cdot \mathbf{s}_1 c \theta_2 &= -|\mathbf{h}_{1x} c \theta_2|. \end{aligned} \quad (25)$$

根据金字塔构型框架轴矢量的对称空间分布特性, VSCMG簇动量包络的“凹陷”区域对应的奇异矢量方向的经纬角变化范围描述为

$$\begin{cases} \theta_2 \in [\beta - 2 \sin^{-1}(4s\beta)^{-1}, \beta + 2 \sin^{-1}(4s\beta)^{-1}], \\ \theta_1 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

相对于SGCMG簇, VSCMG簇的构型效益增大了, 第1单元的飞轮转速在最小到最大之间变化, 对应的飞轮动量的模 \mathbf{h}_{1x} 可以描述为

$$\mathbf{h}_{1x} \in [J\Omega_{\min}, J\Omega_{\max}]. \quad (27)$$

在已知式(26)和(27)的条件下, 采用序列二次规划算法求解式(25)描述的优化问题, 结果如图5所示. 实线即为式(25)的优化结果对应的VSCMG簇的动量最大值. 在考虑飞轮转速上限与下限约束条件下, VSCMG簇的动量包络在框架轴区域存在“凹陷”, 但相对于SGCMG簇, VSCMG簇的构型效益大于SGCMG簇.

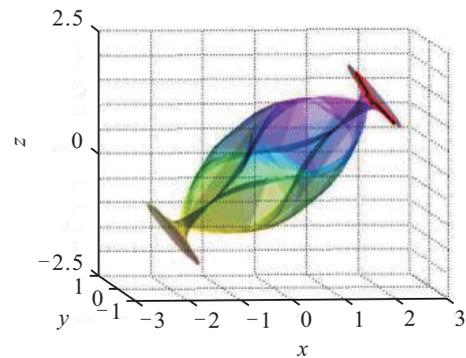


图5 框架轴区域的饱和包络面

5 结 论

本文以金字塔构型为例, 给出了在考虑飞轮储能容量和飞轮转速上限与下限约束条件下的动量包络与储能容量的映射关系, 并给出了对应动量包络的表达形式. 在飞轮动量利用效率最高的条件下给出了VSCMG簇的构型倾侧角和飞轮参数的优化设计方法, 最后将VSCMG簇的参数优化设计问题转换为非线性、多约束的单目标静态优化问题, 采用序列二次规划算法对该优化问题进行了求解, 最终采用最大动量包络面上最小动量求解的计算方法验证了动量包络与储能容量包络的映射关系, 完成了VSCMG簇的飞轮动量参数与构型倾侧角的优化设计, 为VSCMG簇工程样机的研制奠定了理论分析和参数优化设计的基础.

参考文献(References)

- [1] Ford K A, Hall C D. Singular direction avoidance steering for control moment gyros[J]. *AIAA J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(4): 648-656.
- [2] Ford K A. Reorientations of flexible spacecraft using momentum exchange devices[J]. *Dissertation Abstracts Int*, 1997, 58(8): 1-30.
- [3] Jacot A D, Liska D. Control moment gyros in attitude control[J]. *J of Spacecraft and Rockets*, 1966, 3(9): 1313-1320.
- [4] Margulies G, Aubrun J N. Geometric theory of single-gimbal control moment gyro systems[J]. *J of the Astronautical Sciences*, 1978, 26(2): 159-191.
- [5] Wie B. Singularity analysis and visualization for single-gimbal control moment gyro systems[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(2): 270-283.
- [6] 陈茂胜. 高精度单框架控制力矩陀螺框架伺服系统的设计与研究[D]. 长春: 中科院长春光学精密机械与物理研究所, 2012.
(Chen M S. Design and research on high precision SGCMG gimbal servo system[D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2012.)
- [7] Tokar E N. Efficient design of powered gyrostabilizer systems[J]. *Cosmic Research*, 1978, 16(1): 16-23.
- [8] Tokar E N. Problems of gyroscopic stabilizer cpmtrp[J]. *Cosmic Research*, 1978, 16(2): 141-147.
- [9] Tokar E N, Platonov V N. Singular surfaces in unsupported gyrodyne systems[J]. *Cosmic Research*, 1979, 16(5): 547-555.
- [10] Yoon H, Tsiotras P. Singularity analysis of variable-speed control moment gyros[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(3), 374-386.
- [11] Richie D, Tsiotras P, Fausz J. Simultaneous attitude control and energy storage using VSCMGs: Theory and simulation[C]. *Proc of the American Control Conf.* New York: IEEE, 2001: 3973-3979.
- [12] Fausz J L, Richie D J. Flywheel simultaneous attitude control and energy storage using a VSCMG configuration[C]. *Proc of the 2000 IEEE Int Conf on Control Applications*. Anchorage: IEEE, 2001: 991-995.
- [13] Lappas V, Richie D. Survey of technology developments in flywheel attitude control and energy storage systems[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamic*, 2009, 32(2): 354-365.
- [14] Richie D J, Lappas V J, Palmer P L. Sizing /Optimization of a small satellite energy storage and attitude control system[J]. *J of Spacecraft and Rockets*, 2007, 44(4): 940-952.
- [15] Richie D, Lappas V, Prassinis G. A practical small satellite variable-speed control moment gyroscope for combined energy storage and attitude control[J]. *Acta Astronautica*, 2009, 65(11): 1745-1764.
- [16] Tsiotras P, Shen H, Hall C. Satellite attitude control and power tracking with energy/momentum wheels[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(1): 23-34.
- [17] Richie D. Combined attitude control and energy storage for small satellites using variable speed control moment gyroscopes[D]. Guildford: School of Electronics and Physical Sciences, University of Surrey, 2008.
- [18] Kuniyuki O, Saburo M. Micro gravity experiment of variable speed control moment gyro at MG-LAB[C]. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*. Keystone, 2006: 1-10.
- [19] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998: 281.
(Zhang R W. Satellite orbit and attitude dynamics and control[M]. Beijing: Beihang University Press, 1998: 281.)

(责任编辑: 齐 霖)