文章编号: 1001-0920 (2016) 05-0842-11
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0470

基于Choquet积分的直觉不确定语言信息集结算子及其应用

陈 岩, 李 庭

(沈阳工业大学 理学院，沈阳 110870)

摘 要: 基于直觉不确定语言信息, 针对属性间不严格相互独立且具有较大关联度的群决策问题, 提出了两种基于直觉不确定语言信息的Choquet积分算子. 首先, 分析了因属性关联使得以往直觉不确定语言信息集结算子失效的现象, 对此引入模糊测度, 提出了直觉不确定语言的Choquet加权算术平均算子(IULCWA)和直觉不确定语言的Choquet加权几何平均算子(IULCGM); 然后, 证明了算子的相关性质, 研究了属性间相关的、属性值为直觉不确定语言数的多属性群决策方法; 最后, 通过实例分析说明了以往直觉不确定语言信息集结算子的局限性以及新算子的有效性.

关键词: Choquet积分；直觉不确定语言信息；集结算子；多属性决策；关联

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operators based on Choquet integral and their application

CHEN Yan, LI Ting

(School of Science，Shenyang University of Technology，Shenyang 110870，China．Correspondent：CHEN Yan, E-mail：crouse_chen@163.com)

Abstract: Based on intuitionistic uncertain linguistic information, for the decision-making problem of the non-strictly independent and interacting among criteria, the two kinds of the intuitionistic uncertain linguistic Choquet integral operators are proposed. Fristly, the phenomenon of the previous failure intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operator handling the interacting criteria is analyzed, the fuzzy measure is introduced, and the intuitionistic uncertain linguistic Choquet weighted averaging operator(IULCWA) and the intuitionistic uncertain linguistic Choquet geometric mean operator(IULCGM) are defined. Then the properties of these operators are proved, and an approach for solving the interacting multiple attribute values taking the form of the intuitionistic uncertain linguistic numbers is considered based on these operators. Finally, an illustrative example is provided to illustrate the limitation of the previous intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operator and the effectiveness of the proposed operator.

Keywords: Choquet integral；intuitionistic uncertain linguistic information；aggregation operator；multi-attribute group decision-making；interaction

0 引 言

自Zadeh[1]提出了模糊集理论以来, 模糊集理论便逐渐被成功地应用于解决模糊群决策问题. 之后, Atanassov[2]拓展了模糊集, 引入直觉模糊集的概念. 直觉模糊集同时考虑了隶属度和非隶属度两方面的信息, 具有较强处理模糊信息的能力, 因此直觉模糊集理论得到迅速发展[3]. Xu等[4]首先对直觉模糊集的一些几何算子进行了研究, 提出了直觉模糊加权几何算子、直觉模糊有序加权几何算子和直觉模糊混合几何算子, 并将其应用于多属性决策; Atanassov等[5]进一步拓展了直觉模糊集, 用区间数表示直觉模糊集中的隶属度和非隶属度, 引入了区间直觉模糊集的概念; 徐泽水等[6-7]研究了区间直觉模糊信息的集结方法, 定义了区间直觉模糊数的运算法则, 提出了区间直觉模糊加权算术平均算子、区间直觉模糊加权几何算子、区间直觉模糊有序加权算子、区间直觉模糊有序加权几何算子和区间直觉模糊混合集结算子, 并将其应用于群决策中; 刘峰等[8]用三角模糊数表示直觉

收稿日期: 2015-04-15；**修回日期:** 2015-07-22.

基金项目: 沈阳工业大学学术骨干基金项目.

作者简介: 陈岩(1968−), 男, 教授, 从事不确定决策与优化算法等研究；李庭(1988−), 女, 硕士生, 从事不确定决策的研究.

模糊集中的隶属度和非隶属度, 定义了模糊数直觉模糊数的概念, 并指出了其与直觉模糊集及区间直觉模糊集的关系; Zhang 等[9]提出了三角直觉模糊数的加权算术平均算子和加权几何平均算子, 并将其应用于多属性决策; 汪新凡[10]研究了模糊数直觉模糊信息的集成问题, 定义了模糊数直觉模糊加权几何算子、模糊数直觉模糊有序加权几何算子和模糊数直觉模糊混合几何算子, 并在此基础上提出了一种属性权重确知且属性值为模糊数直觉模糊数的多属性群决策方法. 在直觉模糊集和语言评价集的基础上, 王坚强等[11]定义了直觉语言集、直觉语言数、直觉二元语义以及直觉二元语义 Hamming 距离, 并通过计算各方案相对理想解的综合隶属度得到方案排序. 之后, 王坚强等[12]又进一步定义了直觉语言数的运算法则、期望值、得分函数和精确函数, 提出了直觉语言加权算术算子和加权几何算子, 并将其应用于多属性决策. 由于不确定语言评价比语言评价更易表达模糊数据, 刘培德等[13]将直觉语言集扩展为直觉不确定语言集, 定义了直觉不确定语言数的运算法则、期望值、得分函数和精确函数, 针对属性间相互独立的情况, 提出了直觉不确定语言数的加权算术平均算子、有序加权算术平均算子和混合加权平均算子, 并将其应用于多属性决策.

在实际生活中, 决策属性 (准则) 之间往往并不是完全相互独立的, 而是相互影响的. 比如, 小明想购置一所房子, 一般要考虑价格、地理位置、交通以及附近是否有学校、医院等附属机构 4 个因素. 通常, 地理位置占优势的, 交通往往便利, 价位也会较高; 交通便利一定程度上可以替代学校、医院等附属机构. 为了使建模更符合实际, 得出更精确的决策结果, 属性间的相互影响不容忽略. 由于属性间的关联, 造成属性权重的可加性不再成立, 导致一般的加权算子因没有刻画属性间的关联而失效. 例如, 以统计学、概率论和代数 3 门课程对学生进行评估考核, 概率论成绩好的学生统计学成绩通常也好, 反之亦然, 即概率论和统计学两属性存在一定程度的关联. 若利用加权算术平均算子来评估, 则会高估统计学和概率论成绩都好的学生, 低估只有统计学或者概率论差的学生[14]. 模糊测度的产生使得这一问题得到有效解决. Murofushi 等[15]利用模糊测度的非可加性对准则之间的相互影响做出了解释, 讨论了 Choquet 积分的合理性, 提出了关于模糊测度的 Choquet 积分; Marichal[14]把属性间的关联进行分类, 指出离散 Choquet 积分是集结相关联属性的一个工具, 并给出了公理; Xu[16]基于 Choquet 积分提出了直觉模糊关联平均算子 (IFCA)、直觉模糊关联几何算子 (IFCG)、区间直觉模糊关联平均算子 (IVIFCA) 和区间直觉模糊关联几何算子 (IVIFCG), 并将其应用于实际决策问题; Tan 等[17]考虑了决策准则之间相互关联的现象, 基于 Choquet 积分提出了直觉 Choquet 积分算子, 并给出了解决关联多属性决策问题的方法; 陶长琪等[18]提出了基于 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数信息集结算子, 并用其研究了关联多属性决策问题.

鉴于 Choquet 积分能够较好地解决属性间相关联的群决策问题, 且基于直觉不确定语言信息, 属性间存在一定程度相关联的决策问题的研究尚不多见, 故有必要对其作出相关探讨.

本文将模糊测度和 Choquet 积分用于处理直觉不确定语言信息, 提出了直觉不确定语言 Choquet 加权算术平均算子 (IULCWA) 和直觉不确定语言 Choquet 加权几何平均算子 (IULCGM), 讨论了算子的性质, 证明了算子满足置换不变性、幂等性、单调性和介值性; 然后给出属性间相关联的、属性值为直觉不确定语言数的多属性群决策方法; 最后用实例验证所提方法的有效性和实用性.

1　基础知识

1.1　直觉模糊集

设 X 是一个非空集合, $A=\{\langle x, u_A(x), v_A(x)\rangle | x \in X\}$ 为直觉模糊集[2], 其中 $u_A(x): X \to [0,1], v_A(x): X \to [0,1]$, 且满足 $0 \leqslant u_A(x) + v_A(x) \leqslant 1, \forall x \in X$, $u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 X 的隶属度和非隶属度. 另外 $1 - u_A(x) - v_A(x)$ 表示 X 中元素 x 属于 X 的犹豫度. 在文献 [3] 中, 称有序对 $a = [u_a, v_a]$ 为直觉模糊数, 其中 $0 \leqslant u_a + v_a \leqslant 1$. 设 $a = [u_a, v_a]$ 和 $b = [u_b, v_b]$ 是两个直觉模糊数, 其运算法则如下[3,19]:

$$\begin{cases} a \oplus b = [u_a + u_b - u_a u_b, v_a v_b]; \\ a \otimes b = [u_a u_b, v_a + v_b - v_a v_b]; \\ \lambda a = [1 - (1 - u_a)^\lambda, (v_a)^\lambda],\ \lambda > 0; \\ a^\lambda = [(u_a)^\lambda, 1 - (1 - v_a)^\lambda],\ \lambda > 0. \end{cases} \tag{1}$$

1.2　语言评价集和不确定语言变量

语言评价集 $S = (s_0, s_1, \cdots, s_{l-1})$ 由奇数个元素构成, 即 l 为奇数. 在实际应用中, l 一般取 3、5、7、9 等. 本文中取 $l = 7$, 其对应语言评价集为 $S = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) =$ (很差, 差, 中下, 中, 中上, 好, 很好). 对于任意语言集 S, 满足下列条件[20]:

1) 若 $i > j$, 则 $s_i > s_j$ (即 s_i 优于 s_j);

2) 存在负算子 $\mathrm{neg}(s_i) = s_j$, 使得 $j = l - 1 - i$;

3) 若 $s_i \geqslant s_j$ (即 s_i 不劣于 s_j), $\max(s_i, s_j) = s_i$;

4) 若 $s_i \leqslant s_j$ (即 s_i 不优于 s_j), $\min(s_i, s_j) = s_i$.

对于任意语言标度 $S = (s_0, s_1, \cdots, s_{l-1})$, 元素 s_i

与其下标 i 之间存在严格单调递增关系, 因此可以定义函数 $f: s_i = f(i)$, 函数 $f(i)$ 是属于下标 i 的严格递增函数[21]. 为了尽量减少丢失决策信息, 把原有的离散性语言标度 $S = (s_0, s_1, \cdots, s_{l-1})$ 拓展成连续性语言标度 $\overline{S} = \{s_\alpha | \alpha \in R\}$, 拓展后的连续性不确定语言标度仍满足上面的严格单调递增关系[21].

定义 1[22] 设 $\tilde{s} = [s_a, s_b], s_a, s_b \in \overline{S}$ 且 $a \leqslant b$, 其中 s_a 和 s_b 分别是 $\tilde{s}$ 的下限和上限, 则称 $\tilde{s}$ 为不确定语言变量.

设 $\tilde{S}$ 为所有不确定语言变量构成的集合, 对于任意两个不确定语言变量 $\tilde{s}_1 = [s_{a_1}, s_{b_1}], \tilde{s}_2 = [s_{a_2}, s_{b_2}]$, $\lambda \geqslant 0$, 其运算法则如下[22-23]:

$$\begin{cases} \tilde{s}_1 \oplus \tilde{s}_2 = [s_{a_1}, s_{b_1}] \oplus [s_{a_2}, s_{b_2}] = [s_{a_1+a_2}, s_{b_1+b_2}]; \\ \tilde{s}_1 \otimes \tilde{s}_2 = [s_{a_1}, s_{b_1}] \otimes [s_{a_2}, s_{b_2}] = [s_{a_1 \times a_2}, s_{b_1 \times b_2}]; \\ \tilde{s}_1 / \tilde{s}_2 = [s_{a_1}, s_{b_1}] / [s_{a_2}, s_{b_2}] = [s_{a_1/a_2}, s_{b_1/b_2}], \\ \qquad a_2 \neq 0, b_2 \neq 0; \\ \lambda \tilde{s}_1 = [s_{\lambda \times a_1}, s_{\lambda \times b_1}]. \end{cases} \tag{2}$$

容易证明任意两个不确定语言变量 $\tilde{s}_1 = [s_{a_1}, s_{b_1}], \tilde{s}_2 = [s_{a_2}, s_{b_2}]$ 满足下面的运算关系:

$$\begin{cases} \lambda(\tilde{s}_1 \oplus \tilde{s}_2) = \lambda \tilde{s}_1 \oplus \lambda \tilde{s}_2, \lambda \geqslant 0; \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{s}_1 = \lambda_1 \tilde{s}_1 \oplus \lambda_2 \tilde{s}_1, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

1.3 直觉语言集

定义 2[11] 设 $h_{\theta(x)} \in \overline{S}$, X 为一给定论域, 则

$$A = \{\langle x, [h_{\theta(x)}, (u_A(x), v_A(x))] \rangle | x \in X\} \tag{4}$$

为直觉语言集, $u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别表示元素 x 隶属于和非隶属于语言评价值 $h_{\theta(x)}$ 的程度, $u_A(x): X \to [0,1], v_A(x): X \to [0,1]$, 且满足 $0 \leqslant u_A(x) + v_A(x) \leqslant 1, \forall x \in X$. 另外, $\pi_A(x) = 1 - u_A(x) - v_A(x)$ 表示 x 属于语言评价值 $h_{\theta(x)}$ 的犹豫度, 也称为直觉语言模糊指数.

1.4 直觉不确定语言集

定义 3[13] 设 $[s_{\theta(x)}, s_{\tau(x)}] \in \tilde{S}$, X 为一给定论域, 则

$$A = \{\langle x, [[s_{\theta(x)}, s_{\tau(x)}], (u_A(x), v_A(x))] \rangle | x \in X\} \tag{5}$$

为直觉不确定语言集, $u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别表示元素 x 隶属于和非隶属于语言评价值 $[s_{\theta(x)}, s_{\tau(x)}]$ 的程度, 且满足 $0 \leqslant u_A(x) + v_A(x) \leqslant 1, \forall x \in X$. 另外, $\pi_A(x) = 1 - u_A(x) - v_A(x)$ 表示 x 属于语言评价值 $[s_{\theta(x)}, s_{\tau(x)}]$ 的犹豫度, 也称为直觉不确定语言模糊指数. 在文献 [13] 中, 称三元组 $\langle [s_{\theta(x)}, s_{\tau(x)}], (u_A(x), v_A(x)) \rangle$ 为直觉不确定语言数.

设 $\tilde{a}_1 = \langle [s_{\theta(a_1)}, s_{\tau(a_1)}], (u(a_1), v(a_1)) \rangle$ 和 $\tilde{a}_2 = \langle [s_{\theta(a_2)}, s_{\tau(a_2)}], (u(a_2), v(a_2)) \rangle$ 为两个直觉不确定语言数, $\lambda \geqslant 0$, 则有如下运算法则[13]:

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \langle [s_{\theta(a_1)+\theta(a_2)}, s_{\tau(a_1)+\tau(a_2)}], (1-(1- \\ \qquad u(a_1))(1-u(a_2)), v(a_1)v(a_2)) \rangle; \\ \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \langle [s_{\theta(a_1)\times\theta(a_2)}, s_{\tau(a_1)\times\tau(a_2)}], (u(a_1)u(a_2), \\ \qquad 1-(1-v(a_1))(1-v(a_2))) \rangle; \\ \lambda \tilde{a}_1 = \langle [s_{\lambda\times\theta(a_1)}, s_{\lambda\times\tau(a_1)}], \\ \qquad (1-(1-u(a_1))^\lambda, (v(a_1))^\lambda) \rangle; \\ \tilde{a}_1^\lambda = \langle [s_{\theta(a_1)^\lambda}, s_{\tau(a_1)^\lambda}], \\ \qquad ((u(a_1))^\lambda, 1-(1-v(a_1))^\lambda) \rangle. \end{cases} \tag{6}$$

显而易见, 上述定义中的计算结果仍为直觉不确定语言数.

定理 1[13] 对于任意两个直觉不确定语言数 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$, 容易证明下列运算法则成立:

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2 \oplus \tilde{a}_1; \\ \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2 \otimes \tilde{a}_1; \\ \lambda(\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2) = \lambda \tilde{a}_1 \oplus \lambda \tilde{a}_2,\ \lambda \geqslant 0; \\ \lambda_1 \tilde{a}_1 \oplus \lambda_2 \tilde{a}_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{a}_1,\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0; \\ \tilde{a}_1^{\lambda_1} \otimes \tilde{a}_1^{\lambda_2} = \tilde{a}_1^{\lambda_1+\lambda_2},\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0; \\ \tilde{a}_1^{\lambda_1} \otimes \tilde{a}_2^{\lambda_1} = (\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2)^{\lambda_1},\ \lambda_1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

1.5 直觉不确定语言数的排序

定义 4[13] 设 $\tilde{a}_1 = \langle [s_{\theta(a_1)}, s_{\tau(a_1)}], (u(a_1), v(a_1)) \rangle$ 为直觉不确定语言数, 则称 $E(\tilde{a}_1)$ 为 $\tilde{a}_1$ 的期望值.

$$E(\tilde{a}_1) = \frac{1}{2} \times (u(a_1) + 1 - v(a_1)) \times s_{\frac{\theta(a_1)+\tau(a_1)}{2}} = \\ s_{(\theta(a_1)+\tau(a_1))\times(u(a_1)+1-v(a_1))/4}, \tag{8}$$

其中 $E(\tilde{a}_1) \in [0, s_{\tau(a_1)}]$. 显然, $E(\tilde{a}_1)$ 越大, $\tilde{a}_1$ 越大. 特别地, 若 $E(\tilde{a}_1) = s_{\tau(a_1)}$, 则 $\tilde{a}_1$ 取最大值, $\tilde{a}_1 = \langle [s_{\tau(a_1)}, s_{\tau(a_1)}], (1, 0) \rangle$; 若 $E(\tilde{a}_1) = 0$, 则 $\tilde{a}_1$ 取最小值, $\tilde{a}_1 = \langle [s_{\theta(a_1)}, s_{\tau(a_1)}], (0, 1) \rangle$.

定义 5[13] 设 $\tilde{a}_1 = \langle [s_{\theta(a_1)}, s_{\tau(a_1)}], (u(a_1), v(a_1)) \rangle$ 为直觉不确定语言数, 记

$$H(\tilde{a}_1) = s_{(\theta(a_1)+\tau(a_1))/2} \times (u(a_1)+v(a_1)) = \\ s_{(u(a_1)+v(a_1))\times(\theta(a_1)+\tau(a_1))/2}, \tag{9}$$

称 $H(\tilde{a}_1)$ 为 $\tilde{a}_1$ 的精确函数.

本文利用期望值和精确函数重新定义了直觉不确定语言数的排序方法.

定义 6 对于任意两个直觉不确定语言数 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$, 有:

1) 若 $E(\tilde{a}_1) > E(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$;

2) 若 $E(\tilde{a}_1) = E(\tilde{a}_2)$, $H(\tilde{a}_1) > H(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$;

3) 若 $E(\tilde{a}_1)=E(\tilde{a}_2), H(\tilde{a}_1)=H(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2$.

1.6 模糊测度和 Choquet 积分

定义 7[16] 设 $P(X)$ 为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的幂集, 给定 $\rho\in(-1,\infty), \mu: P(X)\to[0,1]$, 若满足下列条件, 则称 μ 为定义在 X 上的模糊测度:

1) $\mu(\varnothing)=0, \mu(X)=1$;

2) 若 $B,C\in P(X), B\subset C$, 则有 $\mu(B)\leqslant\mu(C)$;

3) $\forall B,C\in P(X), B\bigcap C=\varnothing$, 有

$$\mu(B\bigcup C)=\mu(B)+\mu(C)+\rho\mu(B)\mu(C).$$

若 X 为某个多属性决策问题的指标集, 则对于 $B,C\in P(X)$, $\mu(B)$ 和 $\mu(C)$ 可认为是属性集 B 和 C 的权重. 若 $\rho=0$, $\mu(B\bigcup C)=\mu(B)+\mu(C)$, 则表明属性集 B 与 C 相互独立; 若 $-1<\rho<0$, $\mu(B\bigcup C)<\mu(B)+\mu(C)$, 则表明属性集间存在信息冗余; 若 $\rho>0$, $\mu(B\bigcup C)>\mu(B)+\mu(C)$, 则表明属性集间存在信息互补.

定义 8[15] 若 f 为定义在 X 上的非负函数, μ 为定义在 X 上的模糊测度, 则 f 关于模糊测度 μ 的离散 Choquet 积分为

$$\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}f(x_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i-1)})]. \tag{10}$$

其中: $(\cdot)$ 为一种排序, 使得 $f(x_{(1)})\leqslant f(x_{(2)})\leqslant\cdots\leqslant f(x_{(n)})$; $A_{(i)}=\{x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)}\}$, 且 $A_{(n+1)}=0$.

2 基于 Choquet 积分的直觉不确定语言信息集成算子及其性质

根据上述 Choquet 积分的定义和文献 [16], 给出直觉不确定语言信息的 Choquet 积分算子.

定义 9 若 μ 为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, 设 $\tilde{a}_i=\langle[s_{\theta(a_i)},s_{\tau(a_i)}],(u(a_i),v(a_i))\rangle\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为定义在 X 上的一组直觉不确定语言数, 则定义从 $\varOmega^n$ 到 $\varOmega$ 的映射 IULCWA 为

$$\int\tilde{a}\mathrm{d}\mu=\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{(i)}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})), \tag{11}$$

称映射 IULCWA 为直觉不确定语言 Choquet 加权算术平均算子. 其中: $\varOmega$ 为不确定语言集; $(\cdot)$ 为一种排序, 使得 $\tilde{a}_{(1)}\leqslant\tilde{a}_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\tilde{a}_{(n)}$; $A_{(i)}=\{x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)}\}$, 且 $A_{(n+1)}=0$.

当 X 中元素之间相互独立时, IULCWA 算子将退化为文献 [13] 中的直觉不确定语言有序加权平均算子.

定理 2 设 $\tilde{a}_i=\langle[s_{\theta(a_i)},s_{\tau(a_i)}],(u(a_i),v(a_i))\rangle\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉不确定语言数, μ 为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, 则式 (11) 的计算结果仍然是直觉不确定语言数, 即

$$\begin{aligned}&\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\\&\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{(i)}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))=\\&\Big\langle[s_{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\theta(a_i)},s_{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\tau(a_i)}],\\&\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-u(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},\\&\prod_{i=1}^{n}(v(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle.\end{aligned} \tag{12}$$

其中: $(\cdot)$ 为一种排序, 使得 $\tilde{a}_{(1)}\leqslant\tilde{a}_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\tilde{a}_{(n)}$; $A_{(i)}=\{x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)}\}$, 且 $A_{(n+1)}=0$.

证明 采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 根据直觉不确定语言数的加法和数乘运算, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\\&\tilde{a}_{(1)}(\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)}))\oplus\tilde{a}_{(2)}(\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)}))=\\&\langle[s_{\theta(a_1)},s_{\tau(a_1)}],(u(a_1),v(a_1))\rangle(\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)}))\oplus\\&\langle[s_{\theta(a_2)},s_{\tau(a_2)}],(u(a_2),v(a_2))\rangle(\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)}))=\\&\langle[s_{(\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)}))\theta(a_1)},s_{(\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)}))\tau(a_1)}],(1-\\&(1-u(a_1))^{\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)})},(v(a_1))^{\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)})})\rangle\oplus\\&\langle[s_{(\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)}))\theta(a_2)},s_{(\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)}))\tau(a_2)}],(1-\\&(1-u(a_2))^{\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)})},(v(a_2))^{\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)})})\rangle=\\&\langle[s_{(\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)}))\theta(a_1)+(\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)}))\theta(a_2)},\\&s_{(\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)}))\tau(a_1)+(\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)}))\tau(a_2)}],(1-\\&(1-u(a_1))^{\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)})}(1-u(a_2))^{\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)})},\\&(v(a_1))^{\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)})}\times(v(a_2))^{\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)})})\rangle=\\&\Big\langle[s_{\sum\limits_{i=1}^{2}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\theta(a_i)},s_{\sum\limits_{i=1}^{2}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\tau(a_1)}],\\&\Big(1-\prod_{i=1}^{2}(1-u(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},\\&\prod_{i=1}^{2}(v(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle;\end{aligned}$$

假设当 $n=k$ 时成立, 则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_{k+1})=\\&\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_k)\oplus\\&\tilde{a}_{(k+1)}(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))=\\&\Big\langle[s_{\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\theta(a_i)},s_{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))\tau(a_{k+1})}],\\&\Big(1-\prod_{i=1}^{k}(1-u(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},\\&\prod_{i=1}^{k}(v(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle\oplus\\&\langle[s_{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))\theta(a_{k+1})},\end{aligned}$$

$$s_{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))\tau(a_{k+1})}],$$
$$(1-(1-u(a_{k+1}))^{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))},$$
$$(v(a_{k+1}))^{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))})\rangle=$$
$$\Big\langle[s_{\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\theta(a_i)+(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))\theta(a_{k+1})},$$
$$s_{\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\tau(a_i)+(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))\tau(a_{k+1})}],$$
$$\Big(1-(1-u(a_{k+1}))^{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))}\times$$
$$\prod_{i=1}^{k}(1-u(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},$$
$$(v(a_{k+1}))^{(\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)}))}\times$$
$$\prod_{i=1}^{k}(v(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle=$$
$$\Big\langle[s_{\sum\limits_{i=1}^{k+1}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\theta(a_i)},s_{\sum\limits_{i=1}^{k+1}\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\tau(a_i)}],$$
$$\Big(1-\prod_{i=1}^{k+1}(1-u(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},$$
$$\prod_{i=1}^{k+1}(v(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle. \qquad \square$$

定义 10 若 μ 为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, 设 $\tilde{a}_i=\langle[s_{\theta(a_i)},s_{\tau(a_i)}],(u(a_i),v(a_i))\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为定义在 X 上的一组直觉不确定语言数, 则定义从 Ω^n 到 Ω 的映射 IULCGM 为

$$\int\tilde{a}\mathrm{d}\mu=\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{(i)}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},\tag{13}$$

称映射 IULCGM 为直觉不确定语言 Choquet 加权几何平均算子. 其中: Ω 为不确定语言集; $(\cdot)$ 为一种排序, 使得 $\tilde{a}_{(1)}\leqslant\tilde{a}_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\tilde{a}_{(n)}$; $A_{(i)}=\{x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)}\}$, 且 $A_{(n+1)}=0$.

当 X 中元素之间相互独立时, IULCGM 算子退化为直觉不确定语言有序加权几何算子.

定理 3 设 $\tilde{a}_i=\langle[s_{\theta(a_i)},s_{\tau(a_i)}],(u(a_i),v(a_i))\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉不确定语言数, μ 为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, 则式 (13) 的计算结果仍然是直觉不确定语言数, 即

$$\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=$$
$$\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{(i)}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))}=$$
$$\Big\langle[s_{\prod\limits_{i=1}^{n}\theta(a_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}},s_{\prod\limits_{i=1}^{n}\tau(a_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}}],$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{n}(u(a_{(i)}))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},$$
$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-v(a_{(i)}))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle.\tag{14}$$

其中: $(\cdot)$ 为一种排序, 使得 $\tilde{a}_{(1)}\leqslant\tilde{a}_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\tilde{a}_{(n)}$; $A_{(i)}=\{x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)}\}$, 且 $A_{(n+1)}=0$.

证明同理于定理 2, 不再赘述.

容易证明以上算子具有下列性质.

性质 1 (置换不变性) 设 $(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n)$ 是 $(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$ 的任一置换, 则

$$\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n),\tag{15}$$
$$\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n).\tag{16}$$

证明 1) 因为

$$\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma_i}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})),$$
$$\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma'_i}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})),$$

而 $(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n)$ 是 $(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$ 的任一置换, 所以有 $\tilde{a}_{\sigma_i}=\tilde{a}_{\sigma'_i}$;

2) 因为

$$\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma_i}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},$$
$$\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n)=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma'_i}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},$$

而 $(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n)$ 是 $(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$ 的任一置换, 所以有 $\tilde{a}_{\sigma_i}=\tilde{a}_{\sigma'_i}$. $\square$

性质 2 (幂等性) 设 $\tilde{a}_i=\tilde{a}\,(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\tilde{a},\tag{17}$$
$$\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\tilde{a}.\tag{18}$$

证明

$$\mathrm{IULCWA}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_i(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))=\tilde{a}\sum_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))=\tilde{a},$$
$$\mathrm{IULCGM}_\mu(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{(i)}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))}=\tilde{a}^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))}=\tilde{a}. \qquad \square$$

性质 3 (单调性) 设 $(\tilde{a}'_1,\tilde{a}'_2,\cdots,\tilde{a}'_n)$ 和 $(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$ 为两组直觉不确定语言信息, 若对所有的 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $\tilde{a}'_i\leqslant\tilde{a}_i$ 成立, 则

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2',\cdots,\tilde{a}_n')\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n),\tag{19}$$

$$\mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2',\cdots,\tilde{a}_n')\leqslant \mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n).\tag{20}$$

证明　1) 因为

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma_i}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})),$$

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2',\cdots,\tilde{a}_n')=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma'_i}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})).$$

对所有的 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $\tilde{a}_i'\leqslant\tilde{a}_i$, 则有 $\tilde{a}_{\sigma'_i}\leqslant\tilde{a}_{\sigma_i}$, 所以

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2',\cdots,\tilde{a}_n')\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n).$$

2) 因为

$$\mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma_i}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},$$

$$\mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2',\cdots,\tilde{a}_n')=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\tilde{a}_{\sigma'_i}^{(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))}.$$

对所有的 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $\tilde{a}_i'\leqslant\tilde{a}_i$, 则有 $\tilde{a}_{\sigma'_i}\leqslant\tilde{a}_{\sigma_i}$, 所以

$$\mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2',\cdots,\tilde{a}_n')\leqslant \mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n).$$ □

性质 4 (介值性)　设 $\tilde{a}_i$ 为一组直觉不确定语言信息, 则

$$\min\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\}\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)\leqslant \max\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\},\tag{21}$$

$$\min\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\}\leqslant \mathrm{IULCGM}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)\leqslant \max\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\}.\tag{22}$$

证明　假设 $\tilde{a}=\min(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$, $\tilde{b}=\max(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$. 因为对于所有的 $\tilde{a}\leqslant\tilde{a}_i$, 根据性质 3, 有

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a},\tilde{a},\cdots,\tilde{a})\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n),$$

根据性质 2, 有

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a},\tilde{a},\cdots,\tilde{a})=\tilde{a},$$

所以

$$\tilde{a}\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n).$$

同理有

$$\mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)\leqslant\tilde{b}.$$

因此

$$\tilde{a}\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)\leqslant\tilde{b}.$$

即 $\min\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\}\leqslant \mathrm{IULCWA}_{\mu}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)\leqslant\max\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\}$.

同理可得式 (22). □

3　直觉不确定语言信息的多属性群决策方法

在一个群决策问题中, 设 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}$ 为群决策中的专家集; $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为方案集; $C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为评价属性集. 决策者对方案 A_i 按指标 C_j 进行测度. 假设专家 e_k 对决策方案 A_i 在属性 C_j 下的评价值用直觉不确定语言数表示为 $\tilde{R}_{ij}^k=\langle[a_{ijk}^L,a_{ijk}^U],(u_{ijk},v_{ijk})\rangle$, 即决策者 e_k 给出的决策矩阵为 $\tilde{R}^k=[\tilde{R}_{ij}^k]_{m\times n}$, 其中 a_{ijk}^L 和 a_{ijk}^U 是语言变量集 S 中的元素, 且 $a_{ijk}^L\leqslant a_{ijk}^U$.

基于前面介绍的 IULCWA 算子和 IULCGM 算子, 给出属性值为直觉不确定语言数的关联多属性决策方法, 具体步骤如下.

Step 1: 根据问题的实际情况建模, 确定各属性和属性集的模糊测度 (权重);

Step 2: 利用 IULCWA 算子或 IULCGM 算子对决策矩阵 $\tilde{R}^k=[\tilde{R}_{ij}^k]_{m\times n}$ 中第 i 行的属性值进行集成, 从而得到专家 e_k 对方案 A_i 的综合属性值 $\tilde{R}_i^k$;

Step 3: 本文考虑专家之间不是相互独立的, 受其知识、经验、威望等因素的影响, 他们的偏好存在一定程度的冗余或互补[24], 对各专家的实际背景进行考察, 建模确定各专家和专家集的模糊测度 (权重);

Step 4: 利用 IULCWA 算子或 IULCGM 算子对 p 位决策者给出方案 A_i 的综合属性值 $\tilde{R}_i^k$ 进行集成, 得到方案 A_i 的群体综合属性值 $\tilde{R}_i$;

Step 5: 分别利用直觉不确定语言数的期望值和精确函数计算 $\tilde{R}_i$ 的期望值 $E(\tilde{R}_i)$ 和精确函数值 $H(\tilde{R}_i)(i=1,2,\cdots,m)$, 并对 Step 4 的结果进行排序;

Step 6: 根据定义 6, 对方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 进行排序, 从而得到最佳方案.

在实际决策过程中, 针对不同的决策问题, 可以根据加权算术平均算子和加权几何平均算子的特点选择适当的算子来集结. 若强调决策者群体的作用, 则可选择加权算术平均算子; 若突出单个决策者的作用, 则可选择加权几何平均算子[6].

4　实例分析

由于以往直觉不确定语言信息集结算子的前提假设为属性间的相互独立, 即属性权重满足可加性, 现在考虑实际决策问题中的属性不是相互独立的, 若仍使用以往直觉不确定语言信息的决策方法, 所得结果会与准确的决策结果产生较大误差.

下面利用本文所提两个算子解决属性相关联决策问题以减少误差, 并与以往算子结果对比分析来说明本文算子的有效性和合理性.

例 1 某部门要从部门内部招聘一位主管, 现有 3 名人员 (方案) 应聘者 $\{A_1, A_2, A_3\}$, 由 3 位领导 (专家) $\{e_1, e_2, e_3\}$ 根据基层调查和应聘者的简历对应聘者的领导能力 (C_1)、工作态度 (C_2)、应变能力 (C_3) 以及亲和力 (C_4) 4 个方面进行评估, 各领导采用直觉不确定语言数给出各应聘者的评价值见表 1 ∼ 表 3. 此例中, 领导能力、工作态度、应变能力以及亲和力 4 个属性之间都是信息互补的.

表 1 专家 e_1 给出的 4 个应聘者不同指标的评价值

应聘者	指标 (C_1)	指标 (C_2)	指标 (C_3)	指标 (C_4)
A_1	$\langle[s_2, s_3], (0.3, 0.4)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_1, s_3], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.6, 0.3)\rangle$
A_2	$\langle[s_5, s_6], (0.6, 0.3)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.4, 0.5)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_5], (0.7, 0.2)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.3)\rangle$	$\langle[s_2, s_2], (0.3, 0.4)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.6, 0.3)\rangle$

表 2 专家 e_2 给出的 4 个应聘者不同指标的评价值

应聘者	指标 (C_1)	指标 (C_2)	指标 (C_3)	指标 (C_4)
A_1	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.4)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.6, 0.3)\rangle$	$\langle[s_1, s_2], (0.3, 0.4)\rangle$	$\langle[s_6, s_6], (0.8, 0.1)\rangle$
A_2	$\langle[s_5, s_6], (0.7, 0.2)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.4, 0.3)\rangle$	$\langle[s_2, s_2], (0.5, 0.2)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.6, 0.3)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_5], (0.6, 0.3)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.8, 0.2)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.4)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.6, 0.2)\rangle$

表 3 专家 e_3 给出的 4 个应聘者不同指标的评价值

应聘者	指标 (C_1)	指标 (C_2)	指标 (C_3)	指标 (C_4)
A_1	$\langle[s_3, s_3], (0.4, 0.3)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_2, s_2], (0.3, 0.2)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.7, 0.2)\rangle$
A_2	$\langle[s_5, s_5], (0.6, 0.4)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.6, 0.2)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.5, 0.3)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.5, 0.4)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_4], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.7, 0.1)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.4)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.5, 0.4)\rangle$

下面用本文的直觉不确定语言算术平均算子对上述决策进行求解, 以确定主管的最佳候选人.

Step 1 根据问题的实际情况, 对各属性和属性集的模糊测度 (权重) 进行专家确定, 假设各属性和属性集的模糊测度如下:

$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(C_1) = 0.50,\ \mu(C_2) = 0.28,$

$\mu(C_3) = 0.15,\ \mu(C_4) = 0.18,\ \mu(C_1, C_2) = 0.81,$

$\mu(C_1, C_3) = 0.68,\ \mu(C_1, C_4) = 0.78,\ \mu(C_2, C_3) = 0.46,$

$\mu(C_2, C_4) = 0.57,\ \mu(C_3, C_4) = 0.48,$

$\mu(C_1, C_2, C_3) = 0.95,\ \mu(C_1, C_2, C_4) = 0.97,$

$\mu(C_2, C_3, C_4) = 0.76,\ \mu(C_1, C_2, C_3, C_4) = 1.0.$

Step 2 利用 IULCWA 算子对决策矩阵 $\tilde{R}^k = [\tilde{R}^k_{ij}]_{m\times n}$ 中第 i 行的属性值进行集成, 从而得到专家 e_k 对应聘者 A_i 的综合属性值

$$\tilde{R}^1_1 = \langle[s_{3.02}, s_{4.26}], (0.36, 0.53)\rangle,$$
$$\tilde{R}^2_1 = \langle[s_{4.00}, s_{4.42}], (0.43, 0.52)\rangle,$$
$$\tilde{R}^3_1 = \langle[s_{3.70}, s_{4.46}], (0.49, 0.32)\rangle,$$
$$\tilde{R}^1_2 = \langle[s_{3.62}, s_{4.10}], (0.64, 0.25)\rangle,$$
$$\tilde{R}^2_2 = \langle[s_{4.28}, s_{4.76}], (0.48, 0.32)\rangle,$$
$$\tilde{R}^3_2 = \langle[s_{3.42}, s_{4.42}], (0.61, 0.33)\rangle,$$
$$\tilde{R}^1_3 = \langle[s_{3.42}, s_{3.90}], (0.39, 0.37)\rangle,$$
$$\tilde{R}^2_3 = \langle[s_{4.10}, s_{4.52}], (0.52, 0.40)\rangle,$$
$$\tilde{R}^3_3 = \langle[s_{3.82}, s_{4.54}], (0.45, 0.33)\rangle.$$

Step 3 确定各专家和专家集的模糊测度 (权重), 假设各专家和专家集的模糊测度如下:

$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(e_1) = 0.58,\ \mu(e_2) = 0.32,$

$\mu(e_3) = 0.32,\ \mu(e_1, e_2) = 0.78,\ \mu(e_1, e_3) = 0.80,$

$\mu(e_2, e_3) = 0.69,\ \mu(e_1, e_2, e_3) = 1.$

Step 4 利用 IULCWA 算子对 3 位决策者给出方案 A_i 的综合属性值 $\tilde{R}^k_i$ 进行集成, 得到方案 A_i 的群体综合属性值

$$\tilde{R}_1 = \langle[s_{3.36}, s_{4.08}], (0.48, 0.36)\rangle,$$
$$\tilde{R}_2 = \langle[s_{4.13}, s_{4.47}], (0.48, 0.40)\rangle,$$
$$\tilde{R}_3 = \langle[s_{3.65}, s_{4.47}], (0.52, 0.29)\rangle.$$

Step 5 利用直觉不确定语言数的期望值和精确函数计算 $\tilde{R}_i$ 的期望值, 有

$$E(\tilde{R}_1) = s_{2.1377}, E(\tilde{R}_2) = s_{2.4849}, E(\tilde{R}_3) = s_{2.4936}.$$

Step 6 根据定义 6, 对方案排序得 $A_1 \prec A_2 \prec A_3$, 故 A_3 为最优方案, 即第 3 个应聘者为最佳候选人.

此问题中, 若在属性相关联的情况下和属性相互独立情况下分别用 IULWGM 算子和 IULWAA、IULWAG 算子进行集结, 决策结果见表 4.

表 4 决策结果对比

	算子	综合属性值的期望值			决策结果
属性相互独立	IULWAA	1.9773	2.7608	2.7181	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
	IULWGM	1.9513	3.2457	3.0230	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
属性间相互关联	IULCWA	2.1095	2.4849	2.5336	$A_1 \prec A_2 \prec A_3$
	IULCGM	1.4634	2.1176	2.0260	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$

由表 4 可知, 在属性间只存在信息互补的决策问题中, 关联集结算子计算的结果与不考虑关联时算子的计算结果不完全一致.

例 2　现有 4 个备选企业 (方案) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, 从企业技术创新能力角度对企业进行评价, 项目的评价指标为创新资源投入能力 (C_1)、创新管理能力 (C_2)、创新倾向 (C_3) 和研究开发能力 (C_4). 现由 3 位专家 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 对各企业按上述 4 项指标进行评估, 各专家采用直觉不确定语言数给出各方案在各指标下的评价值见表 5～表 7. 专家采用的不确定语言评价集为 $S = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$. 此例中的 4 个属性之间都存在一定的程度的信息相冗.

表 5　专家 e_1 给出的 4 个企业不同指标的评价值

企业	指标 (C_1)	指标 (C_2)	指标 (C_3)	指标 (C_4)
A_1	$\langle[s_5, s_6], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.6)\rangle$
A_2	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.1, 0.8)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.5, 0.5)\rangle$
A_3	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.2, 0.7)\rangle$
A_4	$\langle[s_6, s_6], (0.5, 0.4)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.2, 0.8)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_3], (0.3, 0.6)\rangle$

表 6　专家 e_2 给出的 4 个企业不同指标的评价值

企业	指标 (C_1)	指标 (C_2)	指标 (C_3)	指标 (C_4)
A_1	$\langle[s_4, s_4], (0.1, 0.7)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.8)\rangle$	$\langle[s_6, s_6], (0.4, 0.5)\rangle$
A_2	$\langle[s_5, s_6], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.2, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_5], (0.2, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.3, 0.7)\rangle$
A_4	$\langle[s_5, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.6)\rangle$

表 7　专家 e_3 给出的 4 个企业不同指标的评价值

企业	指标 (C_1)	指标 (C_2)	指标 (C_3)	指标 (C_4)
A_1	$\langle[s_5, s_5], (0.2, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.3, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$
A_2	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.7)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.1, 0.8)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.4, 0.6)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_1, s_3], (0.1, 0.8)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$
A_4	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.1, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.4, 0.5)\rangle$

基于 IULCAW 算子的决策步骤如下.

Step 1　确定各属性和属性集的模糊测度 (权重), 假设各属性和属性集的模糊测度如下:

$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(C_1) = 0.30,\ \mu(C_2) = 0.40,$

$\mu(C_3) = 0.30,\ \mu(C_4) = 0.50,\ \mu(C_1, C_2) = 0.50,$

$\mu(C_1, C_3) = 0.55,\ \mu(C_1, C_4) = 0.73,\ \mu(C_2, C_3) = 0.60,$

$\mu(C_2, C_4) = \mu(C_3, C_4) = 0.70,\ \mu(C_1, C_2, C_3) = 0.67,$

$\mu(C_1, C_2, C_4) = 0.67,\ \mu(C_1, C_3, C_4) = 0.80,$

$\mu(C_2, C_3, C_4) = 0.80,\ \mu(C_1, C_2, C_3, C_4) = 1.$

Step 2　利用 IULCWA 算子对决策矩阵 $\tilde{R}^k = [\tilde{R}^k_{ij}]_{m\times n}$ 中第 i 行的属性值进行集成, 从而得到专家 e_k 对方案 A_i 的综合属性值

$$\tilde{R}^1_1 = \langle[s_{4.2}, s_{5.2}], (0.40, 0.56)\rangle,$$

$$\tilde{R}^1_2 = \langle[s_{4.3}, s_{4.6}], (0.37, 0.56)\rangle,$$

$$\tilde{R}^1_3 = \langle[s_{3.8}, s_{4.7}], (0.25, 0.70)\rangle,$$

$$\tilde{R}^1_4 = \langle[s_{4.3}, s_{4.7}], (0.38, 0.52)\rangle,$$

$$\tilde{R}^2_1 = \langle[s_{4.6}, s_{5.0}], (0.30, 0.61)\rangle,$$

$$\tilde{R}^2_2 = \langle[s_{4.2}, s_{5.2}], (0.32, 0.56)\rangle,$$

$$\tilde{R}^2_3 = \langle[s_{3.4}, s_{4.3}], (0.26, 0.63)\rangle,$$

$$\tilde{R}^2_4 = \langle[s_{3.8}, s_{4.5}], (0.34, 0.55)\rangle,$$

$$\tilde{R}^3_1 = \langle[s_{4.1}, s_{4.7}], (0.32, 0.57)\rangle,$$

$$\tilde{R}^3_2 = \langle[s_{3.9}, s_{4.4}], (0.29, 0.65)\rangle,$$

$$\tilde{R}^3_3 = \langle[s_{3.9}, s_{4.3}], (0.23, 0.67)\rangle,$$

$$\tilde{R}^3_4 = \langle[s_{4.2}, s_{4.7}], (0.31, 0.57)\rangle.$$

Step 3　确定各专家和专家集的模糊测度 (权重), 假设各专家和专家集的模糊测度如下:

$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(e_1) = 0.40,\ \mu(e_2) = \mu(e_3) = 0.30,$

$\mu(e_1, e_2) = \mu(e_1, e_3) = 0.80,\ \mu(e_2, e_3) = 0.50,$

$\mu(e_1, e_2, e_3) = 1.$

Step 4　利用 IULCAW 算子对 p 位决策者给出方案 A_i 的综合属性值 $\tilde{R}^k_i$ 进行集成, 得到方案 A_i 的群体综合属性值

$$\tilde{R}_1 = \langle[s_{4.23}, s_{4.91}], (0.34, 0.58)\rangle,$$

$$\tilde{R}_2 = \langle[s_{3.76}, s_{4.45}], (0.34, 0.60)\rangle,$$

$$\tilde{R}_3 = \langle[s_{3.79}, s_{4.41}], (0.24, 0.66)\rangle,$$

$$\tilde{R}_4 = \langle[s_{4.15}, s_{4.63}], (0.34, 0.55)\rangle.$$

Step 5　利用直觉不确定语言数的期望值和精确函数计算 $\tilde{R}_i$ 的期望值, 有

$$E(\tilde{R}_1) = s_{1.9272}, E(\tilde{R}_2) = s_{1.7878},$$

$$E(\tilde{R}_3) = s_{1.4041}, E(\tilde{R}_4) = s_{1.9706}.$$

Step 6　根据定义 6, 对企业排序得 $A_3 \prec A_2 \prec A_1 \prec A_4$, 故 A_4 为最优方案.

根据上述决策方法, 利用IULCGM算子进行集结, 所得期望值和方案排序以及在属性相互独立情况下用IULWAA算子和IULWGM算子所得决策结果见表8.

表 8 决策结果对比

	算子	综合属性值的期望值	决策结果
属性相互独立	IULWAA	1.5680 1.7919 1.3072 1.7125	$A_3 \prec A_1 \prec A_4 \prec A_2$
	IULWGM	1.4448 1.6418 1.2658 1.5680	$A_3 \prec A_1 \prec A_4 \prec A_2$
属性间相互关联	IULCWA	1.7427 1.5160 1.1814 1.7295	$A_3 \prec A_2 \prec A_4 \prec A_1$
	IULCGM	1.5622 1.3579 1.0842 1.5397	$A_3 \prec A_2 \prec A_4 \prec A_1$

由表8可知: 在属性间只存在信息相冗的决策问题中, 与不考虑关联时算子的计算结果相比, 关联集结算子计算的决策结果发生了明显的变化; 本文将属性间的相互作用的情况纳入决策信息集结中, 因此变化是合理的.

考虑信息互补和相冗并存的情况, 以改编文献[25]的一个例子为基础, 构造如下算例.

例 3 某一厂商为了提高生产效率, 需选购新设备, 现有4个备选公司(方案) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, 厂商派选了3位专家 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 从设备价格(C_1)、性能(C_2)和售后服务(C_3) 3个指标(属性)对各企业进行评估, 各专家采用直觉不确定语言数给出各方案在各指标下的评价值见表9～表11. 专家采用的不确定语言评价集为 $S = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$. 由于性能好的设备价格往往较高, 反之亦然, 则性能与价格两属性间存在一定程度的信息相冗, 而价格与售后服务两属性间存在一定程度的互补, 性能与售后服务两属性独立, 故此例中信息种类包含了相冗、互补、可加3种情况. 以往的直觉不确定语言算子无法集结, 而本文所提算子可以解决这类问题, 并得到更加合理的决策结果.

表 9 专家 e_1 给出的4个企业不同指标的评价值

企业	指标(C_1)	指标(C_2)	指标(C_3)
A_1	$\langle[s_5, s_6], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_3, s_3], (0.3, 0.7)\rangle$
A_2	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.4, 0.5)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.5)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.3, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.6)\rangle$
A_4	$\langle[s_5, s_6], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.3, 0.6)\rangle$

表 10 专家 e_2 给出的4个企业不同指标的评价值

企业	指标(C_1)	指标(C_2)	指标(C_3)
A_1	$\langle[s_5, s_6], (0.3, 0.7)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$
A_2	$\langle[s_3, s_4], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_4, s_4], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_5], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.5, 0.5)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.3, 0.7)\rangle$
A_4	$\langle[s_4, s_5], (0.5, 0.4)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_3], (0.2, 0.6)\rangle$

表 11 专家 e_3 给出的4个企业不同指标的评价值

企业	指标(C_1)	指标(C_2)	指标(C_3)
A_1	$\langle[s_5, s_5], (0.3, 0.5)\rangle$	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_5, s_6], (0.3, 0.6)\rangle$
A_2	$\langle[s_4, s_5], (0.2, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.3, 0.7)\rangle$	$\langle[s_5, s_5], (0.2, 0.8)\rangle$
A_3	$\langle[s_4, s_5], (0.4, 0.6)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.4, 0.5)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.5, 0.4)\rangle$
A_4	$\langle[s_4, s_4], (0.2, 0.7)\rangle$	$\langle[s_3, s_4], (0.3, 0.6)\rangle$	$\langle[s_2, s_3], (0.4, 0.5)\rangle$

基于IULCAW算子的决策步骤如下.

Step 1 确定各属性和属性集的模糊测度(权重), 假设各属性和属性集的模糊测度如下:

$$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(C_1) = 0.40,\ \mu(C_2) = 0.40,$$
$$\mu(C_3) = 0.24,\ \mu(C_1, C_2) = 0.76,$$
$$\mu(C_1, C_3) = 0.72,\ \mu(C_2, C_3) = 0.64,$$
$$\mu(C_1, C_2, C_3) = 1.$$

Step 2 利用IULCWA算子对决策矩阵 $\tilde{R}^k = [\tilde{R}^k_{ij}]_{m\times n}$ 中第 i 行的属性值进行集成, 从而得到专家 e_k 对方案 A_i 的综合属性值

$$\tilde{R}^1_1 = \langle[s_{4.04}, s_{5.68}], (0.39, 0.61)\rangle,$$
$$\tilde{R}^2_1 = \langle[s_{4.04}, s_{5.04}], (0.29, 0.67)\rangle,$$
$$\tilde{R}^3_1 = \langle[s_{4.76}, s_{5.36}], (0.33, 0.53)\rangle,$$
$$\tilde{R}^1_2 = \langle[s_{3.84}, s_{4.84}], (0.37, 0.53)\rangle,$$
$$\tilde{R}^2_2 = \langle[s_{3.60}, s_{4.24}], (0.34, 0.56)\rangle,$$
$$\tilde{R}^3_2 = \langle[s_{3.96}, s_{4.60}], (0.24, 0.71)\rangle,$$
$$\tilde{R}^1_3 = \langle[s_{4.00}, s_{4.64}], (0.33, 0.59)\rangle,$$
$$\tilde{R}^2_3 = \langle[s_{3.64}, s_{4.64}], (0.35, 0.61)\rangle,$$

$\tilde{R}_3^3$=$\langle[s_{3.40}, s_{4.40}], (0.43, 0.51)\rangle$,

$\tilde{R}_4^1$=$\langle[s_{3.92}, s_{4.52}], (0.33, 0.57)\rangle$,

$\tilde{R}_4^2$=$\langle[s_{4.04}, s_{4.68}], (0.36, 0.54)\rangle$,

$\tilde{R}_4^3$=$\langle[s_{3.12}, s_{4.00}], (0.29, 0.60)\rangle$.

Step 3　确定各专家和专家集的模糊测度(权重), 假设各专家和专家集的模糊测度如下:

$$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(e_1) = 0.40,\ \mu(e_2) = 0.42,$$
$$\mu(e_3) = 0.28,\ \mu(e_1, e_2) = 0.78,\ \mu(e_1, e_3) = 0.80,$$
$$\mu(e_2, e_3) = 0.60,\ \mu(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

Step 4　利用IULCAW算子对p位决策者给出方案A_i的综合属性值$\tilde{R}_i^k$进行集成, 得到方案A_i的群体综合属性值

$$\tilde{R}_1 = \langle[s_{4.86}, s_{5.15}], (0.34, 0.61)\rangle,$$
$$\tilde{R}_2 = \langle[s_{4.70}, s_{4.98}], (0.31, 0.61)\rangle,$$
$$\tilde{R}_3 = \langle[s_{4.64}, s_{5.00}], (0.36, 0.57)\rangle,$$
$$\tilde{R}_4 = \langle[s_{4.60}, s_{4.90}], (0.32, 0.58)\rangle.$$

Step 5　利用直觉不确定语言数的期望值和精确函数计算$\tilde{R}_i$的期望值, 有

$$E(\tilde{R}_1) = s_{1.812}, E(\tilde{R}_2) = s_{1.706},$$
$$E(\tilde{R}_3) = s_{1.913}, E(\tilde{R}_4) = s_{1.770}.$$

Step 6　根据定义6, 对企业排序得$A_2 \prec A_4 \prec A_1 \prec A_3$, 故$A_3$为最优方案.

根据上述决策方法, 利用IULCGM算子进行集结, 所得$\tilde{R}_i$的期望值为

$$E(\tilde{R}_1) = s_{1.578}, E(\tilde{R}_2) = s_{1.395},$$
$$E(\tilde{R}_3) = s_{1.584}, E(\tilde{R}_4) = s_{1.387},$$

则方案排序为$A_4 \prec A_2 \prec A_1 \prec A_3$, 故$A_3$为最优方案. IULCAW算子和IULCGM算子所得决策结果是一致的, 故最优方案都为A_3.

在属性关联下, IULCWA算子和IULCGM算子所得决策结果及在属性相互独立情况下用IULWAA算子和IULWGM算子处理所得决策结果见表12.

表 12　决策结果对比

	算子	综合属性值的期望值	决策结果
属性相互独立	IULWAA	1.961 7　1.796 8　1.959 4　1.919 1	$A_2 \prec A_4 \prec A_3 \prec A_1$
	IULWGM	1.190 4　0.961 7　0.968 7　0.813 2	$A_4 \prec A_2 \prec A_3 \prec A_1$
属性间相互关联	IULCWA	1.812 0　1.705 5　1.912 5　1.769 0	$A_2 \prec A_4 \prec A_1 \prec A_3$
	IULCGM	1.578 4　1.395 0　1.583 6　1.387 1	$A_4 \prec A_2 \prec A_1 \prec A_3$

表12显示, 决策问题中属性间存在信息相冗、互补、可加的情况时, 与不考虑关联时算子的计算结果相比, 关联集结算子计算的决策结果发生了较为明显的变化, 此变化说明考虑属性间的关联信息是必要的.

由表4、表8和表12的结果对比分析可知, 属性间仅存在信息相冗或者信息相冗和信息互补并存时, 使用IULCAW算子和IULCGM算子计算的决策结果都发生了变化, 属性间仅存在信息互补时, 使用IULCAW算子的计算结果也发生了明显变化, 故本文所提算子拓宽了基于Choquet积分算子的应用范围, 具有一定的实际应用价值.

5　结　论

属性相关联的情况在实际群决策过程中总是不同程度地存在, 本文针对这种现象, 基于直觉不确定语言数的运算法则, 提出了直觉不确定语言的Choquet加权算术平均算子(IULCWA)和直觉不确定语言的Choquet加权几何平均算子(IULCGM), 证明了IULCWA算子和IULCGM算子满足置换不变性、幂等性、单调性和介值性. 针对直觉不确定语言信息群决策中属性相关联的情况, 给出了直觉不确定语言信息多属性决策方法. 最后通过实例表明了以往直觉不确定语言信息决策方法的局限性以及本文决策方法的实用性和有效性, 拓宽了基于Choquet积分算子的应用范围. 本文仅考虑了群决策过程中权重已知的情况, 对于权重未知的情况尚有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-366.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1): 37-46.

[4] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.

[5] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[6] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[7] 徐泽水, 陈剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(4): 126-133.
(Xu Z S, Chen J. An approach to group decision making based on interval-valued intuitionistic judgment mat rices[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2007, 27(4): 126-133.)
[8] 刘峰, 袁学海. 模糊数直觉模糊数[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.
(Liu F, Yuan X H. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(1): 88-91.)
[9] Zhang X, Liu P D. Method for aggregating triangular fuzzy intuitionistic fuzzy information and its application to decision making[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2010, 16(2): 280-290.
[10] 汪新凡. 模糊数直觉模糊几何集成算子及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 607-612.
(Wang X F. Fuzzy number intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators and their appl ication to decision making[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 607-612.)
[11] 王坚强, 李婧婧. 多粒度直觉二元语义的多准则群决策方法[J]. 科技信息, 2009(33): 8-9.
(Wang J Q, Li J J. The multi-criteria group decision making method based on multi-granularity intuitionistic two semantics[J]. Science and Technology Information, 2009(33): 8-9.)
[12] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574.
(Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)
[13] 刘培德, 张新. 直觉不确定语言集成算子及在群决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(12): 2704-2711.
(Liu P D, Zhang X. Intuitionistic uncertain linguistic aggregation operators and their application to group decision making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(12): 2704-2711.)
[14] Marichal J L. An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 800-807.
[15] Murofushi T, Sugeno M. An interpretation of fuzzy measure and Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure[J]. Fuzzy Sets and System, 1989, 29: 201-227.
[16] Xu Z S. Choquet integral of weighted intuitionistic fuzzy information[J]. Information Sciences, 2010, 180(5): 726-736.
[17] Tan C Q, Chen X H. Intuitionistic fuzzy Choquet integral operator for multi-criteria decision making[J]. Expert Systems with Applictions, 2010, 37(1): 149-157.
[18] 陶长琪, 凌和良. 基于Choquet积分的模糊数直觉模糊数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(9): 1381-1386.
(Tao C Q, Ling H L. Approach for multiple attribute decision-making with fuzzy-numberintuitionstic-fuzzy-number based on Choquet integral[J]. Control and Decision, 2012, 27(9): 1381-1386.)
[19] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.
[20] Herrera F, Herrera-Viedma E. Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 115(1): 67-82.
[21] 徐泽水. 基于语言标度中术语指标的多属性群决策法[J]. 系统工程学报, 2005, 20(1): 84-88.
(Xu Z S. A multi-attribute group decision making method based on term indices in linguistic evaluation scales[J]. J of Systems Engineering, 2005, 20(1): 84-88.)
[22] Xu Z S. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment[J]. Information Sciences, 2004, 168(1/2/3/4): 171-184.
[23] Xu Z S. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making[J]. Information Fusion, 2006, 7(2): 231-238.
[24] 高岩, 周德群, 刘晨琛, 等. 基于关联的三角模糊数直觉模糊集成算子及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(9): 1964-1972.
(Gao Y, Zhou D Q, Liu C C, et al. Triangular fuzzy number intuitionistic fuzzy aggregation operators and their application base on interaction[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(9): 1964-1972.)
[25] 章玲, 周德群. 基于 k- 可加模糊测度的多属性决策[J]. 管理科学学报, 2008, 11(6): 18-24.
(Zhang L, Zhou D Q. Multiple attributes decision making based on k- additive fuzzy measures[J]. J of Management Sciences in China, 2008, 11(6): 18-24.)

(责任编辑：齐 霁)