

一类非线性系统的奇异点克服控制

杨智^a, 钟洋^b

(中山大学 a. 数据科学与计算机学院, b. 电子与信息工程学院, 广州 510006)

摘要: 针对一类非线性系统, 研究存在奇异点时的跟踪控制问题. 在采用反馈线性化方法将对象转换成标准型后, 构造线性补偿器并结合期望轨迹的高阶导数构成伪控制量. 通过引入梯度动力学方法求解控制律, 以克服在控制过程中遇到的奇异点问题. 通过稳定性分析验证了闭环系统的稳定性和跟踪误差的收敛性. 仿真结果表明, 此类控制器具有良好的控制性能, 并且能有效克服奇异点问题.

关键词: 非线性系统; 反馈线性化; 线性补偿器; 跟踪控制; 奇异点克服

中图分类号: TP13

文献标志码: A

Singularity conquering control of a class of nonlinear systems

YANG Zhi^a, ZHONG Yang^b

(a. School of Data and Computer Science, b. School of Electronic and Information Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China. Correspondent: ZHONG Yang, E-mail: sir_zy@outlook.com)

Abstract: The tracking control problem of a class of nonlinear systems is researched, when there exist singular points during operating process. After the controlled object being transformed into the norm form, the pseudo control signal is generated from a linear compensator together with the derivate of the desired trajectory. Then, the gradient dynamic method is introduced to conquer the singular points that occur in the operating process. Finally, the stability analysis verifies the stability of the closed system, as well as the convergence of the tracking error. Simulation results show the good performance of the proposed controller.

Keywords: nonlinear systems; feedback linearization; linear compensator; tracking control; singularity conquering

0 引言

近年来, 非线性系统的跟踪控制问题一直是人们关注的热点, 并取得了一系列成果. 特别是将微分几何工具与非线性系统的分析和控制理论相结合, 将线性系统的相关理论拓展到非线性系统中^[1], 为非线性系统的分析提供了有力的理论工具. 反馈线性化方法得到了普遍运用^[1-7]: 文献[3]基于反馈线性化后的标准型, 采用反步设计法设计了控制器; 文献[4]将非线性系统线性化后结合线性系统的设计方法, 同时采用神经网络补偿模型误差; 文献[5]将非线性系统线性化后, 采用两个神经网络分别作为辨识器和控制器; 除此之外, 在逆系统方法^[6]、 H_∞ 控制理论^[7]等控制方法中也都能找到反馈线性化的应用.

文献[8-10]提出了一类基于张动力学和梯度动力学设计控制器的方法. 此类控制器引入梯度动力学

方法以克服在控制过程中遇到的奇异点问题; 同时, 文献[9]还给出了跟踪误差全局指数收敛性的证明, 即从任意初始状态, 受控系统的跟踪误差均以指数形式收敛到零的邻域内.

反馈线性化作为一种先期处理方法被广泛采用, 已有许多基于反馈线性化方法的控制策略, 一般都要求在讨论域内有 $L_g L_f^{\rho-1}(x) \neq 0, \forall x \in \Omega_x$. 然而, 当在某一时刻, 对象的状态离开讨论域时, 便会出现奇异点问题, 导致一些基于反馈线性化的控制策略无能为力. 另外, 文献[8-10]提出的基于张动力学和梯度动力学的控制器仅能保证跟踪误差的全局指数收敛性, 并未对被控对象的其他状态量的有界性展开研究.

本文针对一类非线性系统提出一种基于反馈线性化的奇异点克服控制器. 首先, 通过构造伪控制量来导出误差方程, 并利用误差方程设计控制器参数;

收稿日期: 2015-04-17; 修回日期: 2015-08-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60704045).

作者简介: 杨智(1961—), 男, 教授, 从事复杂系统的建模仿真与控制策略等研究; 钟洋(1990—), 男, 硕士生, 从事神经网络控制和非线性系统自适应控制的研究.

然后, 根据控制系统是否存在奇异点两种情况求解控制律, 当不存在奇异点时, 直接由伪控制量求解控制律, 反之采用梯度动力学方法求解; 最后, 通过理论分析证明了此类控制器可保证闭环系统各状态量的有界性和跟踪误差的收敛性.

1 问题描述

考虑如下单一输入单一输出非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \\ y = h(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} \in R^n$ 表示系统状态向量, $y \in R$ 表示系统输出, n 表示系统维数, u 表示控制信号; $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$ 为足够光滑的向量函数, 从而保证其各阶导数均存在. 为了实现输出反馈跟踪控制, 对所考虑的系统作如下假设.

假设 1 该系统可以进行输入输出线性化, 且在讨论域 Ω_x 上具有相对阶 ρ , 即存在一个微分同胚映射

$$\mathbf{Z} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_f^0 h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中: $L_f^i h(\mathbf{x}) (i = 0, 1, \dots, \rho - 1)$ 表示 $h(\mathbf{x})$ 沿 $f(\mathbf{x})$ 的李导数; $\phi_j(\mathbf{x}) (j = 1, 2, \dots, n - \rho)$ 的构造应使 $T(\mathbf{x})$ 为微分同胚映射, 且有

$$\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - \rho, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x.$$

在映射式 (2) 的作用下, 系统 (1) 可转化为如下标准型:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = f_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}); \\ \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \\ \dot{\xi}_\rho = L_f^\rho h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) * u|_{\mathbf{x}=T^{-1}(\mathbf{z})}; \\ y = \xi_1. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\rho]^T \in R^\rho, \boldsymbol{\eta} \in R^{n-\rho}, \boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 分别表示外部状态和内部状态. 另外,

$$f_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=T^{-1}(\mathbf{z})}.$$

假设 2 假设标准型 (3) 的内部动态 $\dot{\boldsymbol{\eta}} = f_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ 是输入状态稳定的.

控制目的: 对于给定的足够光滑的期望轨迹 y_r , 设计控制器, 使被控对象在控制器作用下的输出渐近跟踪到期望轨迹, 并克服在控制过程中遇到的奇异点问题.

2 控制器设计

控制器的设计思想是, 先通过反馈线性化方法实现输入输出精确线性化, 然后构造线性补偿器并结合期望轨迹的高阶导数构成伪控制量 v , 最后由伪控制量求解控制律. 系统整体结构如图 1 所示. 图 1 中, GD 表示由伪控制量求解控制律时采用的梯度动力学方法.

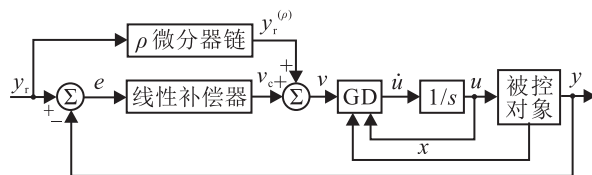


图 1 控制系统结构

2.1 反馈线性化

由微分同胚映射将原系统转化为标准型 (3) 后, 引入中间控制量

$$v = L_f^\rho h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})u. \quad (4)$$

将式 (4) 代入 (3), 有

$$y^{(\rho)} = v. \quad (5)$$

其中: $y^{(\rho)}$ 表示被控对象的输出的 ρ 阶导数, 中间控制量 v 又称伪控制量.

2.2 线性补偿器

定义跟踪误差为

$$e \triangleq y_r - y. \quad (6)$$

构造如下线性补偿器:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{A}_c \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{B}_c e, \\ v_c = \mathbf{C}_c \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{D}_c e. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c$ 和 \mathbf{D}_c 为待设计的系数矩阵, $\boldsymbol{\vartheta}$ 的维数应不低于 $\rho - 1$ [11].

为了导出误差方程, 令伪控制量

$$v = y_r^{(\rho)} + v_c. \quad (8)$$

其中: $y_r^{(\rho)}$ 表示期望轨迹的 ρ 阶导数, v_c 为线性补偿器的输出. 由此可知, $y_r^{(\rho)}$ 存在且有界.

将式 (8) 代入 (5) 可得

$$e^{(\rho)} = -v_c. \quad (9)$$

取误差向量 $\mathbf{E} = [e, e^2, \dots, e^{(\rho-1)}, \boldsymbol{\vartheta}^T]^T$, 并结合式 (7) 和 (9) 可得

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\mathbf{D}_c & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c & 0 & \dots & \dots & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \mathbf{E}.$$

将上式简写为

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A}\mathbf{E}. \tag{10}$$

由误差方程(10)可以看出,当矩阵 \mathbf{A} 为赫尔维茨矩阵时,误差向量 \mathbf{E} 将收敛到零,即跟踪误差 e 及其直到 $\rho - 1$ 阶导数 $e^{(\rho-1)}$ 均收敛到零.在设计补偿器的系数矩阵时,应确保矩阵 \mathbf{A} 为赫尔维茨矩阵.

2.3 梯度动力学方法

当 $\Omega_{\mathbf{x}} = R^n$ 时,对于 $\forall \mathbf{x} \in R^n$,有 $L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$,在控制过程中不会出现奇异点,可直接由式(4)计算控制律,即

$$u = \frac{v - L_f^{\rho} h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})}. \tag{11}$$

然而,令

$$\Omega_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in R^n, L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \neq 0\},$$

如果在某一时刻,出现 $\mathbf{x}' \notin \Omega_{\mathbf{x}}$,则会出现奇异点.例如当 $\rho = n$ 时,令 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\rho}]^T \in \Omega_{\boldsymbol{\xi}}$, $\Omega_{\boldsymbol{\xi}} = T(\Omega_{\mathbf{x}})$ 表示由对象外部状态组成的向量, $\mathbf{y}_r = [y_r, y_r^2, \dots, y_r^{(\rho-1)}]^T$ 表示由期望轨迹及其导数构成的向量.由误差向量 \mathbf{E} 的定义可知,当 \mathbf{E} 收敛到零时, $\boldsymbol{\xi}$ 将跟踪到 \mathbf{y}_r .如果期望轨迹上存在有限个点 \mathbf{y}_r ,使 $\mathbf{y}_r \notin \Omega_{\boldsymbol{\xi}}$,则当 $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{y}_r$ 时,有

$$L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}') = 0, \mathbf{x}' = T^{-1}(\boldsymbol{\xi}).$$

此时,若采用式(4)计算控制律,则在 \mathbf{x}' 处会出现奇异点,即 $|u| \rightarrow \infty$.文献[8-10]已经表明采用梯度动力学方法求解控制律可有效克服奇异点问题,因此本文引入梯度动力学方法求解控制律.

为了书写便捷,将式(4)重写为

$$v = H_1(\mathbf{x})u + H_2(\mathbf{x}), \tag{12}$$

其中

$$H_1(\mathbf{x}) = L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}),$$

$$H_2(\mathbf{x}) = L_f^{\rho} h(\mathbf{x}).$$

然后,取能量函数 τ ,并将其视为关于 u 的函数,即

$$\tau(u) = \frac{1}{2}(H_1(\mathbf{x})u + H_2(\mathbf{x}) - v)^2. \tag{13}$$

梯度动力学方法的思想是, u 沿着能量函数 τ 的负梯度方向调整,使能量函数的值逐渐减小,直至为零,即

$$\dot{u} = -\gamma \frac{\partial \tau(u)}{\partial u}, \tag{14}$$

其中 γ 表示收敛系数.最后,将式(13)代入(14)可得

$$\dot{u} = -\gamma(H_1(\mathbf{x})u + H_2(\mathbf{x}) - v)H_1(\mathbf{x}). \tag{15}$$

由此控制器的设计完成.

3 稳定性分析

下面将分两类情况证明闭环系统的稳定性,即不存在奇异点和存在奇异点的情形.

3.1 不存在奇异点的情况

当不存在奇异点时,直接由式(4)求解控制律,闭环系统的稳定性可由误差方程(10)导出.考虑如下李雅普诺夫函数:

$$v_1 = \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E}, \tag{16}$$

其中 \mathbf{P} 为以下李雅普诺夫方程的解:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q},$$

这里 \mathbf{Q} 为正定矩阵.由于矩阵 \mathbf{A} 为赫尔维茨矩阵,方程存在唯一正定解.考虑式(16)沿误差方程(10)的导数,有

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{\mathbf{E}}^T \mathbf{P} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{E}} = \\ & \mathbf{E}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{E} = -\mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

表明误差方程在原点处具有渐近稳定性.进一步有,当 $\|\mathbf{E}\| \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow \infty$,因此 \mathbf{E} 具有全局稳定性.

由误差向量的定义可知

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(\rho-1)} \\ \boldsymbol{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_r - y \\ \dot{y}_r - \dot{y} \\ \vdots \\ y_r^{(\rho-1)} - y^{(\rho-1)} \\ \boldsymbol{\vartheta} \end{bmatrix}.$$

由于期望轨迹 y_r 及其直到 $\rho - 1$ 阶导数 $y_r^{(\rho-1)}$ 存在且有界,当 \mathbf{E} 收敛到零时, y 及其直到 $\rho - 1$ 阶导数也有界,即 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\rho}]^T$ 有界.同时,由假设2可知,当外部动态 $\boldsymbol{\xi}$ 有界时,内部动态 $\boldsymbol{\eta}$ 也是有界的.因此闭环系统各状态量的有界性得到保证,包括线性补偿器的状态量 $\boldsymbol{\vartheta}$.

3.2 存在奇异点的情况

由2.3节分析可知,奇异点出现在 $L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) = 0$ 的点上,因此在由式(4)求解 u 时,将出现除零的情形.采用梯度动力学方法求解控制律,实际上是对最优控制律的渐近逼近.定义误差信号

$$e_u = u - u^*. \tag{17}$$

其中: u 表示实际控制律, u^* 表示最优控制律, e_u 表示两者之间的误差.在此之前,为了分析闭环系统的稳定性,针对控制过程作如下假设.

假设 3 在控制过程中,有 $|\dot{u}^*| \leq \kappa, 0 < \kappa < +\infty, \|H_1(\mathbf{x})\| \leq \bar{\omega}, 0 < \bar{\omega} < +\infty$.

下面分两步进行讨论:

Step 1 $H_1(\mathbf{x}) \neq 0$. 此时有

$$u^* = (v - H_2(\mathbf{x}))/H_1(\mathbf{x}).$$

由式(17)可得

$$\dot{e}_u = \dot{u} - \dot{u}^*. \tag{18}$$

将式(15)代入(18)可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_u &= -\gamma(H_1(\mathbf{x})u + H_2(\mathbf{x}) - v)H_1(\mathbf{x}) - \dot{u}^* = \\ &= -\gamma\left(u + \frac{H_2(\mathbf{x}) - v}{H_1(\mathbf{x})}\right)H_1^2(\mathbf{x}) - \dot{u}^* = \\ &= -\gamma(u - u^*)H_1^2(\mathbf{x}) - \dot{u}^* = \\ &= -\gamma H_1^2(\mathbf{x})e_u - \dot{u}^*. \end{aligned} \tag{19}$$

显然存在一个正常数 ω , 对所有可能的状态 \mathbf{x} 都有 $H_1^2(\mathbf{x}) \geq \omega > 0$. 考虑如下李雅普诺夫函数:

$$v_2 = \frac{1}{2}e_u^2. \tag{20}$$

对其求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= -\gamma H_1^2(\mathbf{x})e_u^2 - \dot{u}^*e_u \leq \\ &= -\gamma H_1^2(\mathbf{x})e_u^2 + |\dot{u}^*||e_u| \leq \\ &= -\gamma\omega e_u^2 + |\dot{u}^*||e_u| \leq \\ &= -\gamma\omega e_u^2 + \kappa|e_u| \leq \\ &= |e_u|(-\gamma\omega|e_u| + \kappa). \end{aligned} \tag{21}$$

由式(21)可知: 当 $|e_u| > \kappa/(\gamma\omega)$ 时, 有 $\dot{v}_2 < 0$, 故 v_2 和 $|e_u|$ 会减小; 当 $|e_u| = \kappa/(\gamma\omega)$ 时, 有 $\dot{v}_2 = 0$, 故 v_2 和 $|e_u|$ 将会保持不变; 当 $|e_u| < \kappa/(\gamma\omega)$ 时, 有 $\dot{v}_2 > 0$, 故 v_2 和 $|e_u|$ 会增大. 因此存在一个时刻 t_s , 使得

$$|e_u| \leq \frac{\kappa}{\gamma\omega}, \quad \forall t \geq t_s. \tag{22}$$

由此可以看出, 进入稳定状态后, 误差 e_u 是有界的.

将式(17)代入(12), 可得

$$\begin{aligned} v &= H_1(\mathbf{x})(u^* + e_u) + H_2(\mathbf{x}) = \\ &= H_1(\mathbf{x})u^* + H_2(\mathbf{x}) + H_1(\mathbf{x})e_u = \\ &= v^* + H_1(\mathbf{x})e_u. \end{aligned}$$

进而, 可以得出

$$e_v = v - v^* = H_1(\mathbf{x})e_u. \tag{23}$$

其中: v, v^* 分别为 u 和 u^* 对应的伪控制量; e_v 为两者间的误差.

将 $v = v^* + e_v$ 代入式(5), 并结合式(7)可以得到如下包含误差项的误差方程:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{B}e_v, \tag{24}$$

其中 $\mathbf{B} = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0]^T \in R^p$. 将式(24)中的 e_v 视作干扰项, 方程(24)的解可精确地表述为

$$\mathbf{E}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{E}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}e_v(\tau)d\tau, \tag{25}$$

其中 $\mathbf{E}(t_0)$ 表示误差向量的初始值. 同时注意到矩阵 \mathbf{A} 为赫尔维茨矩阵, 因此存在正常数 k, λ 使

$$\|e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{26}$$

回顾式(25)并结合(26), 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(t)\| &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)}\|\mathbf{E}(t_0)\| + \\ &= \int_{t_0}^t ke^{-\lambda(t-\tau)}\|\mathbf{B}\| \|e_v(\tau)\| d\tau = \\ &= ke^{-\lambda(t-t_0)}\|\mathbf{E}(t_0)\| + \\ &= \int_{t_0}^t ke^{-\lambda(t-\tau)}\|H_1(\mathbf{x})\| \|e_u(\tau)\| d\tau \leq \\ &= ke^{-\lambda(t-t_0)}\|\mathbf{E}(t_0)\| + \\ &= \bar{\omega} \int_{t_0}^t ke^{-\lambda(t-\tau)}\|e_u(\tau)\| d\tau \leq \\ &= ke^{-\lambda(t-t_0)}\|\mathbf{E}(t_0)\| + \bar{\omega} \frac{k}{\lambda} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|e_u(\tau)\|. \end{aligned} \tag{27}$$

由式(27)可以看出, 对于任意有界的初始状态 \mathbf{x}_0 , 由于干扰项 e_u 有界, 误差向量 \mathbf{E} 也是有界的. 当 \mathbf{E} 为有界时, 闭环系统各状态量有界性的证明方法与3.1节的方法相同.

Step 2 $H_1(\mathbf{x}) = 0$. 在出现奇异点的时刻, 有 $H_1(\mathbf{x}) = 0$, 进而有 $\dot{u} = 0$, 因此 $u(t'_-) = u(t') = u(t'_+)$, 且它们都是有界的. 其中: t' 表示出现奇异点的时刻; t'_-, t'_+ 分别表示 t' 的前一时刻和后一时刻. 另外, 在时刻 t' 有界的输入 $u(t')$ 使得系统的状态量也是有界的, 因此误差向量 \mathbf{E} 在 t' 也是有界的. 时刻 t' 过后, 又回到 Step 1 中讨论的情形.

4 设计示例

下面将分两类情况作仿真分析, 即存在奇异点和不存在奇异点的情况. 前者因不存在奇异点, 直接由伪控制量求解控制律, 控制器结构简单; 后者因存在奇异点而采用梯度动力学方法求解控制律, 得到的是关于控制律 u 的微分方程.

例 1 考察如下单摆系统^[12]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -qx_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) + u, \\ y = x_1. \end{cases} \tag{28}$$

其中: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T \in R^2$ 表示系统的状态量; $u, y \in R$ 分别表示输入和输出. 令 $\Omega_{\mathbf{x}} = R^2$, 由相对阶的定义有

$$L_g h(\mathbf{x}) = 0, \quad L_g L_f h(\mathbf{x}) = 1 \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}.$$

由此可以看出, 在由式(4)求控制律时不会出现奇异点, 没有出现除零的情况.

线性补偿器维数取 1, 系数矩阵分别取 $\mathbf{A}_c = -20, \mathbf{B}_c = 100, \mathbf{C}_c = -22.6, \mathbf{D}_c = 126$, 将矩阵 \mathbf{A} 的特征值配置在 $-10, -5 \pm i$. 初始状态取 $\mathbf{x}_0 = [0 \ 1]^T$, 期望轨迹取 $y_r = \cos t$, 对象内部参数取 $q = 1, l = 1 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

仿真结果如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 对象实

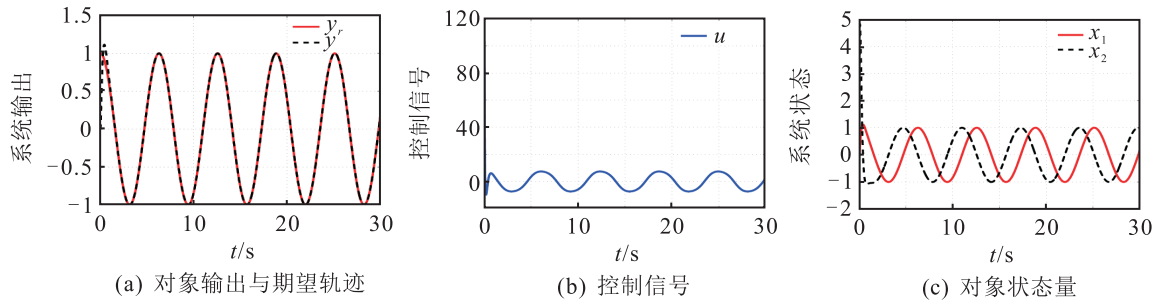


图 2 例 1 仿真结果

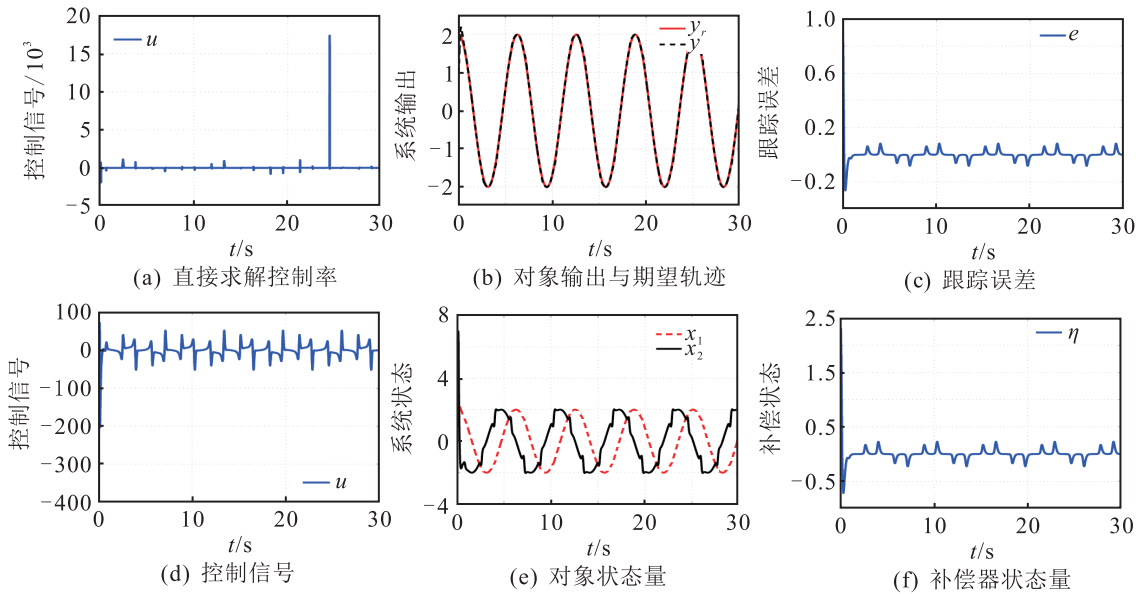


图 3 例 2 仿真结果

际输出可精确地跟踪期望轨迹, 跟踪误差均方值为 1.2×10^{-3} , 被控对象的各状态量保持有界. 需补充说明的是, 线性补偿器的状态量 ϑ 在控制过程中也是有界的, 与前文的分析保持一致. 结果表明, 针对不存在奇异点的对象, 控制器具有良好的控制性能.

例 2 考察如下二阶非线性系统^[1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a \sin(x_1) - b \cos(x_1)u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (29)$$

其中: $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2]^T \in R^2$ 表示系统的状态量; $u, y \in R$ 分别表示输入和输出. 由系统 (29) 的状态方程易知

$$L_g L_f h(\boldsymbol{x}) = -b \cos(x_1).$$

所以, 系统 (29) 仅在区间

$$\Omega_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^2, \cos(x_1) \neq 0\}$$

上才具有相对阶 $\rho = 2$. 另外,

$$\|H_1(\boldsymbol{x})\| = \|L_g L_f h(\boldsymbol{x})\| \leq |b|.$$

系统 (29) 的内部参数取 $a = b = 1$, 期望轨迹取余弦函数 $y_r = 2 \cos t$. 由所选取的期望轨迹可知

$$\boldsymbol{y}_r = \begin{bmatrix} y_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{1r} \\ \xi_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos(t) \\ -2 \sin(t) \end{bmatrix}.$$

对某时刻 t' , 当 $\cos t' = \pm\pi/4$ 时, $\boldsymbol{y}_r(t') \notin \Omega_{\boldsymbol{\xi}}, \Omega_{\boldsymbol{\xi}} = T(\Omega_{\boldsymbol{x}})$. 此时, 如果在控制过程中出现 $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{y}_r(t')$, 则在由式 (4) 求解控制律时便会出现奇异点. 这种情况在前文中已给予讨论, 采用 GD 法求解控制律.

补偿器的系数矩阵分别取 $\boldsymbol{A}_c = -35, \boldsymbol{B}_c = 100, \boldsymbol{C}_c = -125.2, \boldsymbol{D}_c = 401$, 将矩阵 \boldsymbol{A} 的特征值配置在 $-15, -10 \pm i$. 收敛系数 γ 取 1000, 系统初始状态为 $\boldsymbol{x} = [1 \ 0]^T$. 仿真结果如图 3 所示. 图 3(a) 表示未采用梯度动力学方法时对应的控制信号, 图 3(b)~图 3(f) 分别表示采用梯度动力学方法时的仿真结果. 由图 3 可以看出, 在直接求解控制律时, 控制量在奇异点处趋于无穷大; 采用梯度动力学方法时, 很好地克服了奇异点问题, 同时确保了跟踪误差的收敛性和闭环系统的稳定性.

5 结 论

本文针对一类非线性系统, 提出了一种控制器结构. 假设系统满足可反馈线性化条件, 通过反馈线性化实现输入输出精确线性化后, 构造线性补偿器并结

合期望轨迹的高阶导数构成伪控制量. 通过引入梯度动力学方法求解控制律, 克服了在奇异点处控制器失效的问题, 通过理论分析分别证明了在两种情形下(无奇异点和有奇异点), 此类控制器均可确保跟踪误差的收敛性和闭环系统的稳定性. 通过仿真, 将本文提出的控制器分别应用到两类不同类型的被控对象, 根据是否存在奇异点选择不同的控制器结构. 仿真结果验证了所提出控制器的有效性和可行性.

参考文献(References)

- [1] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2001: 509-520.
- [2] Isidori A. Nonlinear control systems[M]. 3rd ed. Berlin: Springer Science & Business Media, 1995: 137-210.
- [3] Yang Z J, Hara S, Kanae S, et al. Robust output feedback control of a class of nonlinear systems using a disturbance observer[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2011, 19(2): 256-268.
- [4] Hovakimyan N, Nardi F, Calise A, et al. Adaptive output feedback control of uncertain nonlinear systems using single-hidden-layer neural networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2002, 13(6): 1420-1431.
- [5] Ren X M, Rad A B, Chan P T, et al. Identification and control of continuous-time nonlinear systems via dynamic neural networks [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2003, 50(3): 478-486.
- [6] Wang J, Liu X P. On the invertibility of affine nonlinear singular control systems[C]. Proc of the American Control Conf. Albuquerque: IEEE, 1997: 3237-3241.
- [7] Van der Schaft A J. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback H_∞ control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(6): 770-784.
- [8] Zhang Y N, Chen J H, Yu X T, et al. ZG controllers of Z2g0 and Z2g1 types for tracking control of IPC mathematical model[C]. Proc of Intelligent Control and Automation Science. Chengdu: Elsevier, 2013: 689-694.
- [9] Zhang Y N, Yu X T, Yin Y H, et al. Singularity-conquering ZG controllers of Z2g1 type for tracking control of the IPC system[J]. Int J of Control, 2014, 87(9): 1729-1746.
- [10] Zhang Y N, Wang Y, Yin Y H, et al. ZG controllers for output tracking of nonlinear mass-spring-damper mechanical system with division-by-zero problem solved[C]. Proc of IEEE Int Conf on Robotics and Biomimetics. Shenzhen: IEEE, 2013: 1845-1850.
- [11] Brasch F, Pearson J. Pole placement using dynamic compensators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1970, 15(1): 34-43.
- [12] 马向华. 单摆网络控制系统鲁棒稳定性分析[C]. 第29届中国控制会议论文集. 北京: IEEE, 2010: 4423-4427.
(Ma X H. Robust stability analysis of single pendulum networked control system[c]. Proc of the 29th Chinese Control Conf. Beijing: IEEE, 2010: 4423-4427.)

(责任编辑: 滕 蓉)