

基于高斯似然近似的自适应球面径向积分滤波算法

刘俊¹, 刘瑜^{1,2}, 徐从安¹, 齐林¹, 孙顺¹

(1. 海军航空工程学院 信息融合研究所, 山东 烟台 264001; 2. 北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100191)

摘要: 针对量测噪声较小的环境下传统滤波算法容易出现偏差增大的实际问题, 基于高斯近似原理, 提出一种基于高斯似然近似的球面径向积分滤波(SRGLAF)算法. 为进一步解决量测未知环境下的状态估计问题, 充分结合CKF等确定性采样型滤波算法和SRGLAF的优势, 设计一种基于高斯似然近似的自适应球面径向积分滤波(ASRGLAF)算法. 仿真结果表明: SRGLAF能够提高量测噪声较小环境下的估计精度, 而在量测噪声未知环境中, ASRGLAF能够有效地进行状态估计, 具有明显的滤波优势.

关键词: 非线性滤波; 球面径向积分; 高斯近似; 不敏卡尔曼滤波; 容积卡尔曼滤波; 自适应滤波

中图分类号: TP953; TN957

文献标志码: A

Adaptive spherical-radical filter based on Gaussian likelihood approximation

LIU Jun¹, LIU Yu^{1,2}, XU Cong-an¹, QI Lin¹, SUN Shun¹

(1. Research Institute of Information Fusion, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China; 2. School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China. Correspondent: LIU Jun, E-mail: 18615042187@163.com)

Abstract: For the problem that traditional filtering algorithms tend to deteriorate when the measurement noise covariance is very low, a spherical-radical filter based on Gaussian likelihood approximation(SRGLAF) is proposed. To solve the state estimation problem with unknown measurement noise, an adaptive spherical-radical filter based on Gaussian likelihood approximation(ASRGLAF) is proposed. The simulation results show that the SRGLAF can improve the estimation accuracy with low measurement noise, and the ASRGLAF is effective in the scenario with unknown measurement noise.

Keywords: nonlinear filtering; spherical-radical rule; Gaussian approximation; unscented Kalman filter; cubature Kalman filter; adaptive filtering

0 引言

在贝叶斯框架下, 状态的最优估计需要基于量测信息构造状态后验概率分布的完整描述^[1]. 理论上, 可以通过状态预测与量测更新过程递推计算后验概率. 对于线性高斯系统, 卡尔曼滤波器(KF)是一种最优的滤波算法^[2-3]. 但是, 对于非线性或非高斯系统, 由于后验概率递推计算涉及到的高维积分很难求得解析解, 无法得到真实的后验概率, 只能通过近似处理实现次优状态滤波.

粒子滤波(PF)是一种典型的全局近似滤波算法^[4], 该算法在粒子数量充足时可对后验概率分布进行准确的估计, 若粒子数量有限, 则其估计性能会下降甚至发散. 此外, 粒子滤波算法可以用于非线性非

高斯状态滤波, 但是实现有效滤波需要进行大量的计算, 难以应用到实际系统中. 因此, 有必要设计计算效率更加高效的高斯近似算法^[5].

扩展卡尔曼滤波(EKF)算法在工程中的应用较为广泛^[6], 其基本原理是对状态和量测方程进行线性化处理使用KF滤波算法. 对于高度非线性滤波问题, 由于EKF在线性化处理过程中忽略了高阶项, 可能造成滤波发散. 不敏卡尔曼滤波(UKF)是一种确定性采样算法, 通过选择特定的Sigma点, 经非线性函数传递捕获状态的均值与协方差对后验概率进行近似, 其精度高于EKF算法. 但是, UKF算法的性能受参数的影响较大, 当状态的维数较高时, 可能会出现滤波性能下降甚至滤波发散^[7]. 近年来, Arasaratnam

收稿日期: 2015-05-05; 修回日期: 2015-07-17.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61471383).

作者简介: 刘俊(1990-), 男, 博士生, 从事非线性滤波、多传感器信息融合的研究; 刘瑜(1986-), 男, 讲师, 博士, 从事多传感器信息融合、无线传感器网络等研究.

等^[8]同样从概率近似的角度提出了容积卡尔曼滤波(CKF)算法. CKF利用一组等权值的容积点逼近状态的后验概率密度,能够获得较高的估计精度. CKF具有UKF的优点,容积点及其权值仅由状态的维数唯一确定,可以提前计算与存储.此外,其估计精度与滤波稳定性都优于UKF,特别是在高维滤波时,这种优势更加明显,因而受到了广泛的关注.

UKF、CKF算法通过对状态和量测的联合概率密度函数进行高斯近似而实现状态滤波,但是在近似过程中并没有充分地考虑量测信息.当量测噪声较大时,UKF、CKF算法对联合概率密度的近似较为准确,具有较好的状态估计性能.但是,当量测噪声较小时,UKF、CKF算法对联合概率密度的近似偏差较大,从而导致对后验概率的估计不准确,状态滤波效果较差^[9].为了在量测误差较小时实现对状态的有效估计,本文基于高斯似然近似原理^[10],提出一种基于高斯似然近似的球面径向积分滤波(SRGLAF)算法;针对量测噪声未知的情况,为了有效地进行状态滤波,设计一种基于高斯似然近似的自适应球面径向积分滤波(ASRGLAF)算法.最后通过仿真结果表明了本文方法的有效性.

1 基于高斯似然近似的球面径向积分滤波算法

考虑如下离散时间非线性动态模型:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_x}$ 表示 k 时刻的状态向量, $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^{n_z}$ 表示 k 时刻的量测向量; 过程噪声 \mathbf{w}_{k-1} 为零均值、方差为 \mathbf{Q}_{k-1} 的高斯白噪声; 量测噪声 \mathbf{v}_k 为零均值、方差为 \mathbf{R}_k 的高斯白噪声,且过程噪声序列与量测噪声序列互不相关; $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 为已知的非线性函数. 在贝叶斯框架下,得到状态的后验概率^[11]

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) = \frac{1}{c_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k). \quad (3)$$

其中: $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$, 表示直到 k 时刻的量测信息; c_k 为标准化常数,按下式计算:

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (4)$$

从式(3)、(4)可以看出,只需知道状态一步预测概率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1})$ 和似然函数 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ 即可实现状态滤波. $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1})$ 可采用与CKF相同的时间更新步骤求得,因此滤波问题便可转化为 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ 的计算.

由于量测信息与量测更新密切相关,本文主要考虑量测更新过程,状态预测过程与CKF算法相同.假设 $k-1$ 时刻状态向量 \mathbf{x}_{k-1} 的一步预测均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, 一步预测协方差为 $\mathbf{P}_{k|k-1}$. 为研究方便,将 k 时刻的状态向量 \mathbf{x}_k 改写为

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{1,k}^T, \mathbf{x}_{2,k}^T]^T.$$

其中: $\mathbf{x}_{1,k} \in \mathbb{R}^{n_{x1}}$ 表示位置向量, $\mathbf{x}_{2,k} \in \mathbb{R}^{n_{x2}}$ 表示状态向量中剩余元素构成的向量,且 $n_{x1} + n_{x2} = n_x$. 因此,量测方程可以改写为

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_{1,k}) + \mathbf{v}_k. \quad (5)$$

由此得到的似然概率密度函数为

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{1,k}) = p_v(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{1,k})). \quad (6)$$

在量测 \mathbf{z}_k 已知的条件下,似然函数 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{1,k})$ 可被看作是位置向量 $\mathbf{x}_{1,k}$ 的函数,即

$$l(\mathbf{x}_{1,k}) = p_v(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{1,k})). \quad (7)$$

综上分析可知,在一步预测概率已知的前提下,进行非线性滤波实际上就是寻求近似算法逼近 $l(\mathbf{x}_{1,k})$.

1.1 基于球面径向积分规则的数值积分方法

考虑如下具有“非线性函数 \times 高斯概率密度”形式的 n 维积分^[12]:

$$I(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (8)$$

其中: $f(\mathbf{x})$ 为任意非线性函数, \mathbf{R}_n 为积分区域.

令 $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$, $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$, $r \in [0, \infty)$, 则 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2$, 式(8)变为

$$I(f) = \int_0^\infty \int_{U_n} f(r\mathbf{y}) r^{n-1} \exp(-r^2) d\sigma(\mathbf{y}) dr. \quad (9)$$

其中: $U_n = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1\}$ 表示半径为1的超球面, $\sigma(\cdot)$ 表示 U_n 的球面度量单元或面积单元.

将式(9)拆分简化,得

$$I(f) = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr, \quad (10)$$

$$S(r) = \int_{U_n} f(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}). \quad (11)$$

这样,式(9)就变为式(10)所示的径向积分和式(11)所示的球面积分,可利用球面积分原理和径向积分原理求解上述积分,即

$$\int_{U_n} f(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \approx \omega \sum_{i=1}^{2n} f[\mathbf{u}]_i, \quad (12)$$

$$\int_a^b f(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m \omega_i f(\mathbf{x}_i). \quad (13)$$

式(12)展示了一种三阶球面积分准则,其中 $[\mathbf{u}]_i$ 表示算子 $[\mathbf{u}]$ 的第 i 个元素; 式(13)显示了径向积分原理,即 m 点高斯积分可以等价为 $(2m-1)$ 个多项式求和的形式,其中 $\omega(\mathbf{x})$ 是一个定义在区间 $[a, b]$ 上非负权重函数.

具体应用过程如下: 利用三阶球面径向积分规则选取 $2n$ 个具有相应权重的容积点集 $\{\xi_i, \omega_i\}$ 逼近标准高斯加权积分

$$I(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{2n} \omega_i f(\xi_i). \quad (14)$$

其中

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2n}{2}} [1]_i, \omega_i = \frac{1}{2n}, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (15)$$

$[1]_i$ 表示集合 [1] 的第 i 列, 当 $n = 2$ 时, 有

$$[1] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (16)$$

对于滤波过程中涉及到的非标准高斯加权积分, 通过变量代换将权重函数化为标准高斯分布函数, 然后按照标准高斯加权积分的近似过程即可实现对非标准高斯加权积分的近似^[13].

1.2 基于高斯似然近似的球面径向积分

似然函数的积分值一般不等于 1, 所以似然函数并不是一个概率密度函数. 为了应用概率与数理统计理论对似然函数进行近似, 需要先对似然函数进行标准化处理, 即

$$\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) = \frac{l(\mathbf{x}_{1,k})}{\int l(\mathbf{x}_{1,k}) d\mathbf{x}_{1,k}}. \quad (17)$$

相应的后验概率密度函数变为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) = \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) \tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k})}{c_1}, \quad (18)$$

其中 $c_1 = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) \tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) d\mathbf{x}_k$ 表示标准化常量.

下面对标准化似然函数进行高斯近似. 假设标准化似然函数 $\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k})$ 可以用均值为 $\boldsymbol{\mu}_k$ 、协方差为 \mathbf{U}_k 的高斯分布近似, 即

$$\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) \approx N(\mathbf{x}_{1,k}; \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{U}_k). \quad (19)$$

其中: 标准化似然函数的均值

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_k &= \int \mathbf{x}_{1,k} \tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) d\mathbf{x}_{1,k} = \\ &= \frac{\int \mathbf{x}_{1,k} p_v(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{1,k})) d\mathbf{x}_{1,k}}{\int p_v(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{1,k})) d\mathbf{x}_{1,k}} = \\ &= \frac{\int \mathbf{x}_{1,k} N(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_{1,k}), \mathbf{R}_k) d\mathbf{x}_{1,k}}{\int N(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_{1,k}), \mathbf{R}_k) d\mathbf{x}_{1,k}}, \end{aligned} \quad (20)$$

标准化似然函数的协方差

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k &= \int (\mathbf{x}_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})(\mathbf{x}_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})^T \tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) d\mathbf{x}_{1,k} = \\ &= \frac{\int (\mathbf{x}_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})(\mathbf{x}_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})^T N(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_{1,k}), \mathbf{R}_k) d\mathbf{x}_{1,k}}{\int N(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_{1,k}), \mathbf{R}_k) d\mathbf{x}_{1,k}}. \end{aligned} \quad (21)$$

假设量测函数 $h(\cdot)$ 是一个双射函数, 即函数 $h(\cdot)$ 存在逆函数, 令 $\mathbf{x}_{1,k} = h^{-1}(\mathbf{y}_k)$, 则式 (20)、(21) 可分别变换为如下形式:

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\int h^{-1}(\mathbf{y}_k) |\det h'_I(\mathbf{y}_k)| N(\mathbf{y}_k; \mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k) d\mathbf{y}_k}{\int |\det h'_I(\mathbf{y}_k)| N(\mathbf{y}_k; \mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k) d\mathbf{y}_k}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k &= \frac{\int (h^{-1}(\mathbf{y}_k) - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})(h^{-1}(\mathbf{y}_k) - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})^T \times \\ &\quad \int |\det h'_I(\mathbf{y}_k)| N(\mathbf{y}_k; \mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k) d\mathbf{y}_k}{\int \frac{|\det h'_I(\mathbf{y}_k)| N(\mathbf{y}_k; \mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k) d\mathbf{y}_k}{\mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k} d\mathbf{y}_k}. \end{aligned} \quad (23)$$

其中: $h'_I(\cdot)$ 表示量测函数反函数的雅克比矩阵, \det

表示矩阵的行列式. 至此, 所有多维积分的被积函数都被化为“非线性函数 \times 高斯概率密度”的形式, 应用球面径向积分规则可对式 (22)、(23) 进行近似计算.

设 $\mathbf{y}_k^1, \mathbf{y}_k^2, \dots, \mathbf{y}_k^{N_s}$ 是与高斯分布 $N(\mathbf{y}_k; \mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k)$ 相匹配的采样点, 其对应的权值为 $\omega_k^1, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{N_s}$, N_s 为采样点的个数, 式 (22) 和 (23) 可以分别用如下两个公式近似:

$$\boldsymbol{\mu}_k \approx \frac{\sum_{j=1}^{N_s} \omega_k^j h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) |\det h'_I(\mathbf{y}_k^j)|}{\sum_{j=1}^{N_s} \omega_k^j |\det h'_I(\mathbf{y}_k^j)|}, \quad (24)$$

$\mathbf{U}_k \approx$

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_s} \omega_k^j (h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})(h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})^T |\det h'_I(\mathbf{y}_k^j)|}{\sum_{j=1}^{N_s} \omega_k^j |\det h'_I(\mathbf{y}_k^j)|}. \quad (25)$$

但是, 由于需要计算量测函数反函数的雅克比矩阵, 这种近似应用起来并不方便. 在量测噪声较小的情况下, 即量测噪声趋近于零时, 上述表达式可以作如下近似:

$$\boldsymbol{\mu}_k \approx \sum_{j=1}^{N_s} \omega_k^j h^{-1}(\mathbf{y}_k^j), \quad (26)$$

$$\mathbf{U}_k \approx \sum_{j=1}^{N_s} \omega_k^j (h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})(h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) - \bar{\mathbf{x}}_{1,k})^T. \quad (27)$$

1.3 后验概率密度的高斯近似

式 (27) 表示的高斯近似可以改写成如下形式:

$$\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) \approx N(\mathbf{G}_k \mathbf{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{U}_k) = N(\boldsymbol{\mu}_k; \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{U}_k). \quad (28)$$

其中: $\mathbf{G}_k = [\mathbf{I}_{n_{x_1}}, \mathbf{0}_{n_{x_1} \times n_{x_2}}]$, $\mathbf{I}_{n_{x_1}}$ 表示维数为 $n_{x_1} \times n_{x_1}$ 的单位矩阵, $\mathbf{0}_{n_{x_1} \times n_{x_2}}$ 表示维数为 $n_{x_1} \times n_{x_2}$ 的零矩阵.

将式 (19) 代入 (18), 可得到

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) &\approx \\ &= \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) N(\boldsymbol{\mu}_k; \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{U}_k)}{c_1} = \\ &= \frac{N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) N(\boldsymbol{\mu}_k; \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{U}_k)}{c_1} = \\ &= N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}). \end{aligned} \quad (29)$$

由高斯乘积公式^[14], 有

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu}_k - \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (30)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K} \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad (31)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T (\mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{U}_k)^{-1}. \quad (32)$$

至此, 完成一次滤波迭代.

完整的 SRGLAF 算法步骤如下.

输入参数: $k-1$ 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$, 估计

协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$;

输出参数: k 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, 估计协方差

$\mathbf{P}_{k|k}$.

Step 1 时间更新.

Step 1.1: 协方差分解

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^T;$$

Step 1.2: 计算容积点

$$\mathbf{x}_{i,k-1|k-1} =$$

$$\mathbf{S}_{k-1|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_x;$$

Step 1.3: 状态与协方差的一步预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(\mathbf{x}_{i,k-1|k-1}),$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} =$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (f(\mathbf{x}_{i,k-1|k-1}) -$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(f(\mathbf{x}_{i,k-1|k-1}) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{Q}_{k-1}.$$

Step 2 量测更新.

Step 2.1: 量测协方差的分解

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{S}_k \mathbf{S}_k^T;$$

Step 2.2: 计算容积点

$$\mathbf{y}_k^j = \mathbf{S}_k \boldsymbol{\xi}_j + \mathbf{z}_k, \quad j = 1, 2, \dots, 2n_z;$$

Step 2.3: 计算标准似然函数的期望与协方差

$$\boldsymbol{\mu}_k = \sum_{j=1}^{2n_z} \omega_k^j h^{-1}(\mathbf{y}_k^j),$$

$$\mathbf{P}_k \approx \sum_{j=1}^{2n_z} \omega_k^j (h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) - \boldsymbol{\mu}_k)(h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) - \boldsymbol{\mu}_k)^T;$$

Step 2.4: 目标的状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu}_k - \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K} \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k|k-1},$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T (\mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{U}_k)^{-1}.$$

1.4 SRGLAF 算法的有效性分析

将量测噪声协方差矩阵记作 $\mathbf{R}_k = \tilde{\mathbf{R}}_k / \tilde{n}$, 为简便, 此处考虑 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{1,k}$ 的情况, 其余情况可依此类推. 标准似然函数的高斯近似记为

$$\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) = N(\mathbf{x}_{1,k}; \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{U}_k). \quad (33)$$

考虑将量测函数反函数在量测 \mathbf{z}_k 处泰勒展开, 有

$$h^{-1}(\mathbf{y}_k^j) = c + \mathbf{H}_I(\mathbf{y}_k^j - \mathbf{z}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{y}_k^j). \quad (34)$$

其中: $c = h^{-1}(\mathbf{z}_k)$, \mathbf{H}_I 表示函数 $h^{-1}(\cdot)$ 的雅克比矩阵在 \mathbf{z}_k 处的值, $\mathbf{J}(\mathbf{y}_k^j)$ 表示剩余项的和. 由容积点的选取原理可知, $\sum_{j=1}^{N_s} \mathbf{y}_k^j = \mathbf{z}_k$, 当 $\tilde{n} \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{y}_k^j - \mathbf{z}_k = O(\tilde{n}^{-1/2})$, $\mathbf{J}(\mathbf{y}_k^j) = O(\tilde{n}^{-1})$, 因此

$$\boldsymbol{\mu}_k = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{w}_k^i (c + \mathbf{H}_I(\mathbf{y}_k^i - \mathbf{z}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{y}_k^i)) = c + O(\tilde{n}^{-1}). \quad (35)$$

同理可得

$$\mathbf{U}_k = \tilde{n}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_k + O(\tilde{n}^{-3/2}), \quad (36)$$

其中 $\tilde{\mathbf{L}}_k = \mathbf{H}_I \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{H}_I^T$. 由此得到 $\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k})$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) &= \frac{\exp(-(\mathbf{x}_{1,k} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \mathbf{U}_k^{-1} (\mathbf{x}_{1,k} - \boldsymbol{\mu}_k) / 2)}{|2\pi \mathbf{P}_k|} = \\ &= \frac{\exp(-(\mathbf{x}_{1,k} - c + O(\tilde{n}^{-1}))^T [\tilde{n}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_k + O(\tilde{n}^{-3/2})]^{-1} (\mathbf{x}_{1,k} - c + O(\tilde{n}^{-1})) / 2)}{|2\pi [\tilde{n}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_k + O(\tilde{n}^{-3/2})]|} \rightarrow \\ &\leftarrow \frac{O(\tilde{n}^{-3/2})^{-1} (\mathbf{x}_{1,k} - c + O(\tilde{n}^{-1})) / 2}{O(\tilde{n}^{-3/2})^{1/2}} = \\ &= \frac{\exp(-\tilde{n}^{-1} (\mathbf{x}_{1,k} - c + O(\tilde{n}^{-1}))^T [\tilde{\mathbf{L}}_k + O(\tilde{n}^{-1/2})]^{-1} (\mathbf{x}_{1,k} - c + O(\tilde{n}^{-1})) / 2)}{|2\pi \tilde{n}^{-1} [\tilde{\mathbf{L}}_k + O(\tilde{n}^{-1/2})]|} \rightarrow \\ &\leftarrow \frac{O(\tilde{n}^{-1/2})^{-1} (\mathbf{x}_{1,k} - c + O(\tilde{n}^{-1})) / 2}{O(\tilde{n}^{-1/2})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

对式 (37) 进行化简^[15], 得到

$$\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) = N\left(\mathbf{x}_{1,k}; c, \frac{\tilde{\mathbf{L}}_k}{\tilde{n}}\right) [1 + O(\tilde{n}^{-1/2})]. \quad (38)$$

后验概率密度可近似表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) \propto$$

$$\tilde{l}(\mathbf{x}_{1,k}) p(\mathbf{x}_{1,k} | \mathbf{Z}_{k-1}) =$$

$$N\left(\mathbf{x}_{1,k}; c, \frac{\tilde{\mathbf{L}}_k}{\tilde{n}}\right) [1 + O(\tilde{n}^{-1/2})] \times$$

$$N(\mathbf{x}_{1,k}; \hat{\mathbf{x}}_{1,k|k-1}, \mathbf{P}_{1,k|k-1}). \quad (39)$$

根据高斯乘积公式^[14], 式 (39) 可以化简为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) \propto$$

$$N\left(\mathbf{x}_{1,k}; c + \mathbf{K}_{\tilde{n}}(\hat{\mathbf{x}}_{1,k|k-1} - c), \frac{\tilde{\mathbf{L}}_k}{\tilde{n}} - \mathbf{K}_{\tilde{n}} \frac{\tilde{\mathbf{L}}_k}{\tilde{n}}\right) \times [1 + O(\tilde{n}^{-1/2})], \quad (40)$$

其中 $\mathbf{K}_{\tilde{n}} = \tilde{\mathbf{L}}_k (\tilde{\mathbf{L}}_k + \tilde{n} \mathbf{P}_{1,k|k-1})^{-1}$. 当 $\tilde{n} \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{K}_{\tilde{n}} = O(\tilde{n}^{-1/2})$, 式 (40) 可以进一步化简为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) = N\left(\mathbf{x}_{1,k}; c, \frac{\tilde{\mathbf{L}}_k}{\tilde{n}}\right) [1 + O(\tilde{n}^{-1/2})]. \quad (41)$$

Reid 等^[16]指出, 状态的真实后验概率密度收敛到式 (41), 即当 $\tilde{n} \rightarrow \infty$ 时, 真实的后验概率服从均值为 c 、协方差为 $\tilde{\mathbf{L}}_k / \tilde{n}$ 的高斯分布^[16]. 以上分析表明, SRGLAF 算法在 $\tilde{n} \rightarrow \infty$, 即量测噪声协方差趋近于零时能够渐近收敛到真实的后验概率. 因此, 当量测噪声足够小时, SRGLAF 算法能够有效逼近状态的后验概率密度.

2 基于高斯似然近似的自适应球面径向积分滤波算法

通过以上分析可知: 当量测噪声较小, 即量测噪声协方差趋近于零时, SRGLAF 算法能够有效地进行状态滤波; 当量测噪声较大时, UKF、CKF 算法则具

有较好的状态估计效果,但是当量测噪声协方差较小以致趋近于零时,UKF、CKF算法对联合概率的近似偏差较大,导致后验概率的估计不准确,滤波效果较差甚至会出现较大的滤波偏差^[9].针对误差大小未知的量测,为了提高算法的有效性和稳定性,本文以SRGLAF和CKF算法为例,考虑以自适应的方式将两种算法的优势相结合,提出一种基于高斯似然近似的自适应球面径向积分滤波(ASRGLAF)算法.

Kullback-Leibler散度(KLD)是衡量概率密度函数近似程度的一种常用方法^[17].Kullback-Leibler散度越小,表明该近似与状态的后验概率越接近.假设真实的后验概率为 $q^0 = N(\cdot; \mu_0, U_0)$,后验概率的近似为 $q^i = N(\cdot; \mu_i, U_i)$, $i=1, 2$.其中: $i=1$ 表示CKF算法, $i=2$ 表示SRGLAF算法.真实后验概率与近似后验概率之间的KLD为

$$D(q^i \| q^0) = c_0 + D'_i + D_i^n. \quad (42)$$

其中: c_0 是与近似后验概率无关的量,在比较KLD时可不考虑; D'_i 和 D_i^n 的定义分别如下:

$$D'_i = -\frac{1}{2} \log |\mathbf{P}_i| + \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{U}_i + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T)]. \quad (43)$$

$$D_i^n = \frac{1}{2} \int (z_k - h(\mathbf{x}_{1,k}))^T \mathbf{R}_k^{-1} (z_k - h(\mathbf{x}_{1,k})) q^i(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (44)$$

从以上定义可以看出,在得到近似后验概率后, D'_i 可以直接求取.注意到 D_i^n 中被积函数形式为“非线性函数 \times 高斯概率密度”,所以 D_i^n 可以通过球面径向积分规则进行计算.

ASRGLAF算法根据KLD的大小自适应地选择更接近目标真实后验概率的估计算法,估计算法的KLD越小,表明估计结果相对越准确,即

$$(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) = \begin{cases} (\mu_1, \mathbf{U}_1), & D_1^l + D_1^n < D_2^l + D_2^n; \\ (\mu_2, \mathbf{U}_2), & \text{其他}. \end{cases} \quad (45)$$

由式(45)可知,ASRGLAF算法在每一次滤波迭代中都会针对量测信息分别利用SRGLAF算法和CKF算法对目标状态进行更新,即两个滤波器并行工作;然后利用各自的估计结果分别计算出对应的 D_1^l 和 D_1^n ,通过比较 $D_1^l + D_1^n$ 与 $D_2^l + D_2^n$ 的大小,即比较KLD的大小,选择较小的KLD对应的状态估计结果作为最终的滤波结果.因此,在每次滤波迭代中,ASRGLAF算法都会选取较好的滤波结果作为状态更新值,以避免因量测噪声变化而导致的滤波发散问题.

3 再入弹道目标状态估计仿真分析

3.1 状态方程与量测方程

再入弹道目标状态滤波是一个强非线性状态估

计问题^[16],图1为某次蒙特卡洛仿真弹道目标的运动轨迹.

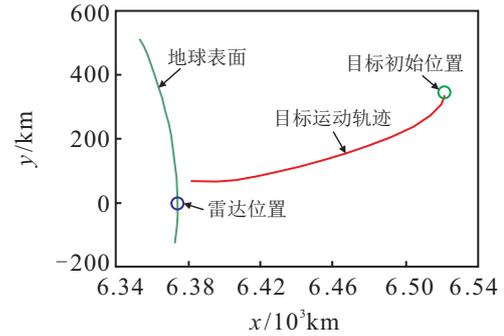


图1 某次蒙特卡洛仿真弹道目标的运动轨迹

再入弹道目标的动态方程由一组非线性微分方程给出,利用欧拉积分离散化处理后得到如下非线性状态函数^[18]:

$$\begin{aligned} x_k^{j+1} &= x_k^j + \dot{x}_k^j \Delta t, \\ y_k^{j+1} &= y_k^j + \dot{y}_k^j \Delta t; \\ \dot{x}_k^{j+1} &= \dot{x}_k^j + (D_k^j \dot{x}_k^j + G_k^j x_k^j) \Delta t, \\ \dot{y}_k^{j+1} &= \dot{y}_k^j + (D_k^j \dot{y}_k^j + G_k^j y_k^j) \Delta t; \\ \gamma_k^{j+1} &= \gamma_k^j. \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\begin{aligned} D_k^j &= -\beta \exp\left(\gamma_k^j + \frac{R_0 - R_k^j}{H_0}\right) V_k^j, \\ R_k^j &= \sqrt{(x_k^j)^2 + (y_k^j)^2}, \\ V_k^j &= \sqrt{(\dot{x}_k^j)^2 + (\dot{y}_k^j)^2}, \\ C_k^j &= -\frac{Gm_0}{(R_k^j)^3}. \end{aligned}$$

其中: R_0 表示地球半径, Gm_0 、 H_0 是反映环境与目标特性的参数; Δt 为欧拉积分所用的时间步长,本文取 $\Delta t = T/N$,表示将每个采样间隔 T 分成 n 等份, k 时刻第 j 等份的状态记为 $\mathbf{x}_k^j = [x_k^j, y_k^j, \dot{x}_k^j, \dot{y}_k^j, \gamma_k^j]^T$,且 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0$, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k^n$.加入过程噪声,离散化再入弹道目标状态方程可表示为

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (47)$$

量测方程表示为

$$\begin{bmatrix} r_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - x_s)^2 + (y_k - y_s)^2} \\ \arctan\left(\frac{y_k - y_s}{x_k - x_s}\right) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \quad (48)$$

其中: (x_k, y_k) 为 k 时刻目标位置, (x_s, y_s) 为雷达位置, \mathbf{v}_k 表示零均值、方差为 \mathbf{R}_k 的高斯白噪声.

3.2 仿真环境设置

为验证本文算法的有效性,对2种仿真场景进行蒙特卡洛仿真,将SRGLAF、ASRGLAF算法与经典的UKF、CKF算法进行比较与分析.

仿真场景1 假设蒙特卡洛仿真次数为200,仿

真的步数为80, 采样间隔为 $T = 2\text{ s}$, $n = 50$, $\beta_0 = 0.59783\text{ s}^{-1}$, $R_0 = 6374\text{ km}$, $Gm_0 = 3.986 \times 10^5\text{ km}^3/\text{s}^2$, $H_0 = 13.406\text{ km}$, $q = 10^{-6}\text{ km}^2/\text{s}^2$; 雷达的笛卡尔位置坐标为 $(x_s, y_s) = (R_0, 0)$, 真实的初始状态为

$$\mathbf{x}_0 = [6500\text{ km}, 349.14\text{ km/s}, -0.2\text{ km/s}, 1.6\text{ km/s}, 0.6932\text{ s}^{-1}]^T,$$

过程噪声协方差为 $Q_k = \text{diag}([0, 0, q, q, 0])$, 初始的状态协方差为

$$P_0 = \text{diag}([1500\text{ km}^2, 275\text{ km}^2, 0.1\text{ km}^2/\text{s}^2, 0.01\text{ km}^2/\text{s}^2, 8 \times 10^4\text{ s}^2]),$$

雷达的测距误差为1 km, 测方位角误差为 1° .

仿真场景2 初始的状态协方差为

$$P_0 = \text{diag}([150\text{ km}^2, 25\text{ km}^2, 0.1\text{ km}^2/\text{s}^2, 0.01\text{ km}^2/\text{s}^2, 8 \times 10^4\text{ s}^2]),$$

雷达的测距误差为3 km, 测方位角误差为 20° . 其他参数设置同仿真场景1.

为了比较各非线性滤波算法的估计性能, 各算法的估计精度采用均方根误差(RMSE)进行评价. 定义位置的均方根误差为

$$\text{RMSE}_{\text{pos}}(k) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M ((x_k^i - \hat{x}_k^i)^2 + (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2)}. \quad (49)$$

其中: M 为蒙特卡洛仿真次数, (x_k^i, y_k^i) 、 $(\hat{x}_k^i, \hat{y}_k^i)$ 分别表示 k 时刻位置的真实值和估计值. 采用同样的方法可以定义速度和弹道系数的RMSE, 在此不再赘述.

3.3 仿真结果与分析

为了验证4种滤波算法在量测噪声较小环境下的估计性能, 本文设置了仿真场景1. 在仿真场景1中, 图2给出了4种算法对位置、速度、弹道系数的估计均方根误差随时间的变化曲线.

由图2可知, 由于状态的初始误差协方差较大, 而量测噪声较小, UKF、CKF算法的状态估计偏差较大, 性能较差, 无法对系统进行有效的状态滤波, 仿真结果与文献[9]中的分析结果一致. 从图2所示的仿真结果还可以看出, SRGLAF、ASRGLAF算法的估计精度相对较高, 状态滤波效果较好. 在量测噪声较小的情况下, SRGLAF、ASRGLAF算法在量测更新阶段充分利用了量测信息对标准似然函数进行高斯近似, 得到的后验概率估计比较准确. 由此表明, 在量测噪声较小的情况下, SRGLAF、ASRGLAF算法能够对目标进行有效的状态估计.

为了验证4种滤波算法在量测噪声较大环境下的估计性能, 本文设置了仿真场景2. 在仿真场景2中, 图3给出了4种算法对位置、速度、弹道系数的估计均方根误差随时间的变化曲线.

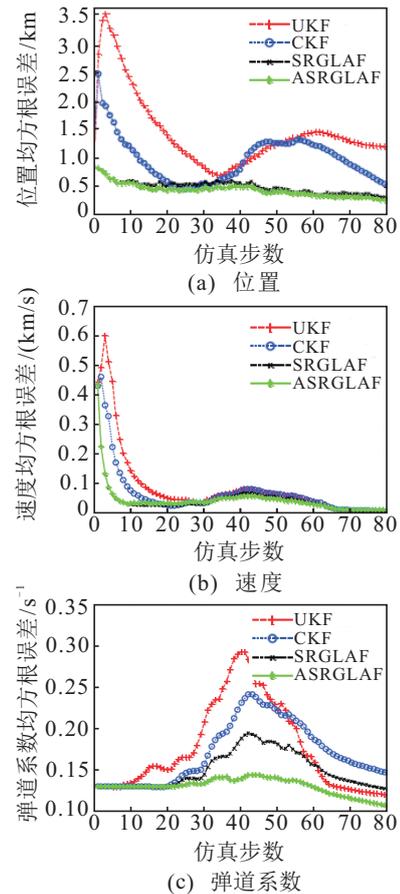


图2 位置、速度、弹道系数的RMSE随时间变化曲线(仿真场景1)

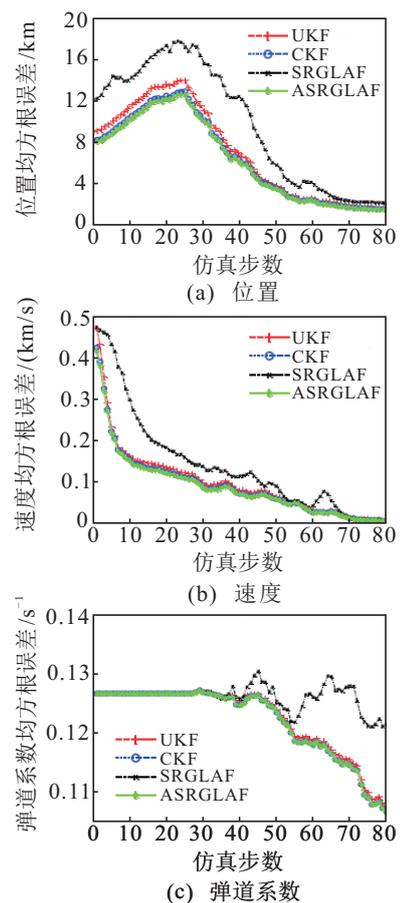


图3 位置、速度、弹道系数的RMSE随时间变化曲线(仿真场景2)

由图3可知, UKF、CKF和ASRGLAF算法的估计效果较好. 在量测噪声较大的情况下, UKF、CKF算法能够比较精确地近似联合概率密度函数, 对后验概率的估计比较准确, 能够有效地进行状态滤波. 而ASRGLAF算法根据量测噪声的大小, 采用自适应的策略在CKF算法与SRGLAF算法之间进行切换, 结合了两种算法的优点, 能够有效地改善滤波性能, 提高滤波精度.

综合以上仿真和分析, ASRGLAF算法有效地结合了CKF算法与SRGLAF算法的优良性能, 与已有的UKF、CKF算法相比具有明显的滤波优势.

4 结 论

本文针对UKF、CKF算法在量测噪声较小的环境下估计性能不佳的问题, 基于高斯似然近似原理, 提出了一种基于高斯似然近似的球面径向积分滤波(SRGLAF)算法, 有效地提高了状态估计精度; 针对量测噪声未知的情况, 设计了一种基于高斯似然近似的自适应球面径向积分滤波(ASRGLAF)算法. ASRGLAF能够充分利用量测信息, 根据Kullback-Leibler散度的大小衡量CKF和SRGLAF对后验概率分布的近似程度, 自适应地选择量测更新方式, 并结合SRGLAF与CKF算法的滤波优势, 使后验概率更加接近真实值, 有效地进行状态滤波. 仿真结果表明, ASRGLAF在算法的适应性、估计精度等方面均优于已有的UKF、CKF算法, 为量测噪声未知环境下的状态估计提供了一种有效的解决方法.

参考文献(References)

- [1] 王晓旭, 潘泉, 黄鹤, 等. 非线性系统确定性采样型滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 801-812.
(Wang X X, Pan Q, Huang H, et al. Overview of deterministic sampling filtering algorithms for nonlinear system[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 801-812.)
- [2] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction theory[J]. Trans on ASME J of Basic Engineering, 1960, 82(D): 35-46.
- [3] Kalman E E, Bucy R S. New results in linear filtering and prediction theory[J]. Trans on ASME J of Basic Engineering, 1961, 83(D): 95-108.
- [4] Cappé O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo[J]. Proc IEEE, 2007, 95(5): 899-924.
- [5] 程水英, 张剑云. 粒子滤波评述[J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1099-1111.
(Cheng S Y, Zhang J Y. Review of particle filters[J]. J of Aeronautics, 2008, 29(4): 1099-1111.)
- [6] Julier S J, Uhlmann J K. A new approach for filtering nonlinear system[C]. Proc of the 1995 American Control Conf. Seattle, 1995: 1628-1632.
- [7] Chen H. Adaptive cubature Kalman filter for nonlinear state and parameter estimation[C]. Proc of 15th Conf on Information Fusion. Singapore, 2012: 1413-1420.
- [8] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [9] Morelande M R, García-Fernández A F. Analysis of Kalman filter approximations for nonlinear measurements[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2013, 61(22): 5477-5484.
- [10] Ángel F, García-Fernández, Mark R Morelande, et al. Adaptive unscented Gaussian likelihood approximation filter[J]. Automatica, 2015, 54(8): 166-175.
- [11] Dunik J, Simandl M, Straka O, et al. Unscented Kalman filter: Aspects and adaptive setting of scaling parameter[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(9): 2411-2416.
- [12] 孙枫, 唐李军. Cubature 卡尔曼滤波与 Unscented 卡尔曼滤波精度的比较[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 303-308.
(Sun F, Tang L J. Estimation precision comparison of cubature Kalman filter and Unscented Kalman filter[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 303-308.)
- [13] Leong P, Arulampalam S, Lamahewa T, et al. A Gaussian-Sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(2): 1161-1174.
- [14] Ho Y, Lee R. A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1964, 9(4): 333-339.
- [15] Fiedler M. Bounds for determinant of the sum of Hermitian matrices[J]. Proc of the American Mathematical Society, 1971, 30(1): 27-31.
- [16] Reid N. Likelihood and Bayesian approximations methods[M]. Oxford: Oxford University Press, 1995: 20-24.
- [17] Bishop C M. Pattern recognition and machine learning[J]. J of Electronic Imaging, 2006, 16(4): 140-155.
- [18] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.

(责任编辑: 曹洪武)