

## 四旋翼无人机 SO(3) 滑模变结构姿态控制器设计

刘锦涛<sup>1</sup>, 吴文海<sup>1</sup>, 李静<sup>2</sup>, 辛巧<sup>3</sup>

(1. 海军航空工程学院 青岛校区, 山东 青岛 266001; 2. 海军航空工程学院 战略导弹系, 山东 烟台 264200; 3. 伊犁师范学院 数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000)

**摘要:** 为了提高四旋翼无人机 SO(3) 控制的动态性能, 对滑模变结构控制在四旋翼无人机 SO(3) 姿态控制中的应用进行研究. 首先, 通过对两种四旋翼 SO(3) 姿态控制模型进行分析, 确定一种奇异点较少的模型为控制对象; 随后, 针对可能出现的控制奇异问题, 设计一种引入调节函数的无奇异积分型滑模面, 得到了滑模稳定性引理; 最后, 利用这种滑模面进行控制器设计和 Lyapunov 稳定性分析, 证明了系统全局指数渐近稳定. 仿真结果验证了所提出的设计方案的正确性.

**关键词:** 四旋翼无人机; 特殊正交群; 滑模控制; 姿态控制系统

中图分类号: TP13

文献标志码: A

## Sliding mode variable structure attitude controller design of quadrotor UAVs on SO(3)

LIU Jin-tao<sup>1</sup>, WU Wen-hai<sup>1</sup>, LI Jing<sup>2</sup>, XIN Qiao<sup>3</sup>

(1. Qingdao Branch, Naval Aeronautical Engineering Institute, Qingdao 266041, China; 2. College of Gardening, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264200, China; 3. College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China. Correspondent: LIU Jin-tao, E-mail: top2012@163.com)

**Abstract:** In order to enhance the transient performance of existing quadrotor UAV SO(3) control schemes, the application of the sliding mode variable structure control technique to apply on quadrotor UAV SO(3) attitude control is researched. Firstly, by making analysis on two kinds of existing quadrotor UAV SO(3) attitude control models, a model with less singular points is selected as the control plant. Then, aiming at the possible control singularity problem, a integral type sliding surface with an adjustment function is proposed. The sliding mode stability lemma is obtained by theoretical deduction. Finally, by making use of the proposed sliding surface, the sliding mode controller is designed with the Lyapunov stability analysis result. Simulation results show the correctness of the design scheme.

**Keywords:** quadrotor UAV; special orthogonal group; sliding mode control; attitude control system

### 0 引言

近年来, 四旋翼无人机的控制问题引起了人们广泛关注<sup>[1-7]</sup>, 诸如滑模变结构控制<sup>[2,6,8-12]</sup>、鲁棒自适应控制<sup>[11,13-16]</sup>、反演控制<sup>[2,12,17-19]</sup>等先进的控制方法先后被应用于四旋翼无人机控制, 取得了良好的控制效果. 在这些方法中, 几何控制是一种比较特别的控制方法, 它通过将系统的状态量映射到特殊正交群 SO(3) 空间中去, 极大地简化了原本复杂的四旋翼无人机模型, 使控制器设计过程得到简化. 在四旋翼无人机 SO(3) 控制研究方面, 国外学者 Lee 等<sup>[13,15,20-22]</sup>所做的系列研究相对比较深入. 文献 [22] 针对四旋翼

SO(3) 模型提出了一种新颖的指令解算方案, 并在此基础上设计了一种反馈控制器, 解决了四旋翼无人机的 SO(3) 姿态及质心控制问题; 文献 [15] 对四旋翼无人机的 SO(3) 姿态控制问题进行了研究, 考虑了系统存在结构参数不确定性的情况, 提出了一种鲁棒自适应控制方案, 实现了结构参数未知情况下对姿态指令的指数跟踪, 不足之处在于不能实现全局指令跟踪. 为了解决该问题, 文献 [20] 进一步提出了一种改进的四旋翼无人机 SO(3) 姿态控制模型, 并设计了一种反馈控制器, 实现了对四旋翼无人机的大角度跟踪, 但在期望姿态和实际姿态相差 180° 时仍会出现奇异, 所

收稿日期: 2015-05-05; 修回日期: 2015-09-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461075).

作者简介: 刘锦涛(1981—), 男, 工程师, 博士生, 从事飞行控制的研究; 吴文海(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行控制等研究.

得到的稳定性结论是非全局的. 文献[13]在文献[22]的基础上, 对系统的非结构不确定性进行了考虑, 提出了一种非线性鲁棒跟踪控制器, 增强了控制器的鲁棒性. 在此基础上, 文献[21]进一步在控制器中引入积分项, 得到了一种PID型的反馈控制器, 减小了系统的稳态误差.

国内目前对基于SO(3)的姿态控制研究相对较少. 史晓宁<sup>[23]</sup>在SO(3)群上建立了四旋翼无人机的一般动力学模型, 并引入了Lagrange函数, 推出了四旋翼无人机在SE(3)群上的全局几何描述, 但在控制律研究方面未作深入研究. 郑重等<sup>[24]</sup>利用Lee提出的方法, 以航天器为研究对象, 设计了一种无角速度测量的SO(3)姿态控制方案.

对现有四旋翼无人机控制器设计相关的文献进行分析不难发现, 诸如滑模变结构控制、反演控制等非线性控制方法, 目前还只是应用于基于欧拉角的模型, 由于欧拉角模型在一些临界点会出现控制奇异问题, 这些方法只能用于小角度姿态跟踪. 基于SO(3)模型的控制方法虽然能够实现大角度的跟踪, 但目前用于SO(3)模型的主要是引入自适应或鲁棒技术的状态反馈控制, 系统动态响应时间普遍较长, 动态性能不佳. 从本文第3节所做的分析来看, 导致一些非线性控制方法不能应用到四旋翼无人机SO(3)模型的主要原因在于, 目前已有的SO(3)模型在一些临界点会出现奇异问题, 使得一些非线性控制方法的求逆运算无法运行. 但小角度范围的SO(3)非线性控制方法相对基于欧拉角模型的非线性控制方法并无优势可言, 这也造成了当前一些非线性控制方法无法应用到SO(3)模型. 针对这一现状, 考虑到变结构控制方法动态性能好、抗干扰性强, 兼具简单、易于实现的优点, 本文考虑将变结构控制方法应用于SO(3)姿态控制, 以提升SO(3)控制的动态性能. 这里拟分3步实现该方案: 第一, 通过对现有数学模型进行分析, 得到适用于非线性控制的SO(3)姿态模型; 第二, 通过非线性设计解决控制器设计时在临界点可能出现的控制奇异问题; 第三, 针对SO(3)模型的特点, 设计适用的滑模面及控制器, 得到稳定性结论.

## 1 问题描述

本文研究的四旋翼无人机结构如图1所示. 其中:  $e_1, e_2, e_3$  为惯性参考坐标系;  $b_1, b_2, b_3$  为机体参考坐标系.  $b_1, b_2$  位于四个旋翼中心确定的平面内, 分别与四旋翼无人机的两轴重合, 第3轴  $b_3$  与  $b_1, b_2$  满足右手定则.

四旋翼无人机的状态由其质心位置及其相对惯性坐标系的姿态表示. 因此, 其状态空间为特殊欧几里得群SE(3), 它是  $R^3$  和特殊正交群SO(3) = { $R \in$

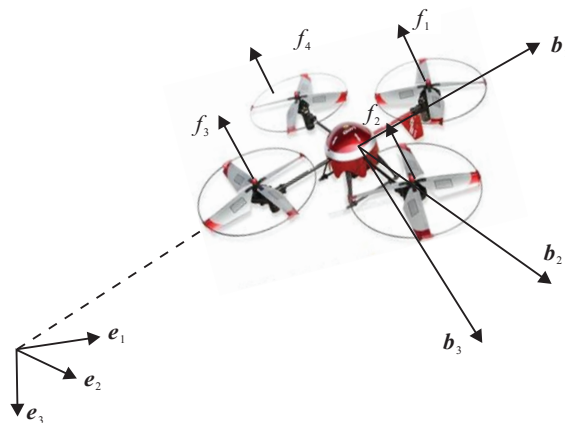


图1 四旋翼无人机模型

$R^{3 \times 3} | R^T R = I, \det R = 1 \}$  的半直积<sup>[13]</sup>.

四旋翼无人机的姿态运动方程可以表示为<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = R(t) + \hat{\Omega}(t), \\ J\dot{\Omega}(t) + \Omega(t) \times J\Omega(t) = u(t) + \Delta_R(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $J \in R^{3 \times 3}$  为四旋翼无人机相对机体坐标系的转动惯量矩阵;  $R(t) \in SO(3)$  为从机体坐标系到惯性坐标系的转换矩阵;  $\Omega(t) \in R^3$  为四旋翼无人机在机体坐标系中的角速度;  $u(t)$  为控制力矩矢量;  $\Delta_R(t)$  为非结构不确定性、噪声及外部干扰作用造成的不确定项.

hat映射  $\hat{\cdot} : R^3 \rightarrow SO(3)$  定义为使  $\hat{x}y = x \times y$  对于任意  $x, y \in R^3$  均成立的映射关系, 可以表示为<sup>[13]</sup>

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中:  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in R^3$ , hat映射的逆映射表示为vee映射  $V : R^3 \rightarrow SO(3)$ .

注1 这里的SO(3)空间是一个由  $3 \times 3$  的斜对称矩阵构成的空间, 它与  $R^3$  空间之间的映射关系在建模及推导中均要用到, 详细含义及特性请参见文献[13]和文献[20].

对于任意的  $x, y \in R^3$ , hat映射和vee映射具有如下基本性质<sup>[13]</sup>:

$$\hat{x}y = x \times y = -y \times x = -\hat{y}x, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \text{tr}[\hat{x}y] = x^T y, \quad (4)$$

$$\text{tr}[\hat{x}A] = \text{tr}[A\hat{x}] = \frac{1}{2} \text{tr}[\hat{x}(A - A^T)] = -x^T(A - A^T)^v, \quad (5)$$

$$\hat{x}A + A^T \hat{x} = (\{\text{tr}[A]I_{3 \times 3} - A\}x)^\wedge, \quad (6)$$

$$R\hat{x}R^T = (Rx)^\wedge. \quad (7)$$

系统满足如下基本假设.

假设1 系统中的未知不确定性  $\Delta_R$  有界, 且存在已知常量  $\delta_R$  使得下式<sup>[13]</sup>成立:

$$\|\Delta_{\mathbf{R}}\| \leq \delta_{\mathbf{R}}. \quad (8)$$

控制目标: 给定期望的状态  $\mathbf{R}_d(t)$ 、 $\Omega_d(t)$ , 设计控制器  $\mathbf{u}$ , 使得系统状态量  $\mathbf{R}(t)$ 、 $\Omega(t)$  全局指数收敛到各自的期望值.

为了简化推导, 在本文后续推导中, 将视情省略时间变量  $t$ . 文中  $\|\cdot\|$  定义为向量的 2-范数,  $\|\cdot\|_F$  定义为矩阵的 Frobenius 范数.

## 2 误差模型分析

对于系统 (1), 目前有两种适用的误差模型.

模型 1<sup>[13]</sup> 定义

$$\mathbf{e}_{R1} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_d^T - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d)^\vee, \quad (9)$$

$$\mathbf{e}_{\Omega 1} = \Omega - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \Omega_d. \quad (10)$$

显然,  $\mathbf{e}_{R1}, \mathbf{e}_{\Omega 1} \in R^3$ .

相应的误差状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_{R1} = \mathbf{E}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) \mathbf{e}_{R1}, \\ \dot{\mathbf{e}}_{\Omega 1} = \mathbf{J}^{-1}(-\Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{u} + \Delta_{\mathbf{R}}) - \alpha_d. \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d) \mathbf{I} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d), \quad (12)$$

$$\alpha_d = (\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \hat{\Omega}_d - \hat{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \Omega_d). \quad (13)$$

模型 2<sup>[20]</sup> 定义

$$\mathbf{e}_{R2} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{R})}} (\mathbf{R}_d^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d)^\vee, \quad (14)$$

$$\mathbf{e}_{\Omega 2} = \Omega - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \Omega_d. \quad (15)$$

显然,  $\mathbf{e}_{R2}, \mathbf{e}_{\Omega 2} \in R^3$ .

相应的误差状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_{R2} = \mathbf{E}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) \mathbf{e}_{R2}, \\ \dot{\mathbf{e}}_{\Omega 2} = \mathbf{J}^{-1}(-\Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{u} + \Delta_{\mathbf{R}}) - \alpha_d. \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{R})}} \times (\text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d) \mathbf{I} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d + 2\mathbf{e}_{R2} \mathbf{e}_{R2}^T), \quad (17)$$

$$\alpha_d = (\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \hat{\Omega}_d - \hat{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \Omega_d). \quad (18)$$

在滑模设计时通常考虑如下形式的滑模面:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{e}_{Ri} + \dot{\mathbf{e}}_{R2} = \mathbf{C} \mathbf{e}_{Ri} + \mathbf{E}_i(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) \mathbf{e}_{\Omega i}, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

其中  $\mathbf{C} = \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\} \in R^{3 \times 3}$ . 对于式 (19) 描述的滑模面,  $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  可逆是进行滑模控制器设计的前提, 因此这里先考察该矩阵的可逆性.

令  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_d^T \mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ , 由罗德里格斯公式, 存在  $\mathbf{x} \in R^3$ , 其中  $\|\mathbf{x}\| \leq \pi$ , 使得<sup>[20]</sup>

$$\mathbf{Q} = \exp \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\sin \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1 - \cos \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|^2} \hat{\mathbf{x}}^2. \quad (20)$$

利用 Matlab Symbolic Computation Tool, 可求得矩阵  $\mathbf{Q}$  的特征值为

$$\lambda_{\mathbf{Q}}^j = 1, \quad \cos \|\mathbf{x}\| \pm \sin \|\mathbf{x}\| i, \quad j = 1, 2, 3. \quad (21)$$

经推导可得模型 1 中  $\mathbf{E}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  的特征值为

$$\lambda_{\mathbf{E}_1}^j = \cos \|\mathbf{x}\|, \quad \frac{1}{2}(1 + \cos \|\mathbf{x}\| \pm \sin \|\mathbf{x}\| i), \quad j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

进一步得

$$\det(\mathbf{E}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)) = \prod_{j=1}^3 \lambda_{\mathbf{E}_1}^j = \frac{1}{2} \cos \|\mathbf{x}\| (1 + \cos \|\mathbf{x}\|). \quad (23)$$

式 (23) 表明,  $\mathbf{E}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  在  $\|\mathbf{x}\| = \pi/2$  和  $\|\mathbf{x}\| = \pi$  时是不可逆的.

对于模型 2, 采用类似的方法可得  $\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  的特征值为

$$\lambda_{\mathbf{E}_2}^j = \frac{1}{2} \cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}, \quad \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} \pm \sin \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} i \right), \quad j = 1, 2, 3. \quad (24)$$

进一步得

$$\det(\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)) = \prod_{j=1}^3 \lambda_{\mathbf{E}_2}^j = \frac{1}{8} \cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (25)$$

式 (25) 表明,  $\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  仅在  $\|\mathbf{x}\| = \pi$  时不可逆.

再考察两种模型所定义误差状态量的特性. 将式 (20) 分别代入式 (9) 和 (14) 可得

$$\|\mathbf{e}_{R1}\|^2 = \sin^2 \|\mathbf{x}\|, \quad (26)$$

$$\|\mathbf{e}_{R2}\|^2 = \sin^2 \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (27)$$

对比两种误差模型可知, 在定义域  $\|\mathbf{x}\| \in [0, \pi]$  上, 模型 2 所定义的误差量在定义域上是单调的, 且矩阵  $\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  仅在边界点  $\|\mathbf{x}\| = \pi$  处不可逆, 在定义域内具有更好的性能, 因此, 该模型更适用于滑模变结构控制器设计, 本文将采用模型 2 作为最终的误差控制模型. 后续设计中用到的各个状态量的定义与式 (14)~(18) 完全相同, 只是在使用中将省略编号 2.

## 3 控制器设计及稳定性分析

### 3.1 无奇异滑模面设计

通过前面的分析可知, 被控对象中的控制矩阵  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  在  $\|\mathbf{x}\| = \pi$  处是不可逆的, 该状态对应的是  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{R}_d$  所描述的两个坐标系相对于特定旋转轴相差  $180^\circ$  的情况. 如果选取形如式 (19) 的滑模面, 则由于控制器的设计要用到  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  的逆, 将会导致无人机在该状态附近出现控制奇异. 针对该问题, 本文考虑在式 (19) 所示的滑模面的基础上引入一个调节函数, 并提出一种积分型滑模面设计方案来解决控制器设计上的奇异问题.

首先,定义新的状态量

$$\mathbf{e}_N = \mathbf{e}_R + \int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{e}_\Omega(\tau) d\tau, \quad (28)$$

其中  $\gamma(t) \geq 0$  为设计调节函数,表达式如下:

$$\gamma(t) = \frac{2be^{(\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) - 2)/\delta_1^2}}{e^{(\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) - 2)/\delta_1^2} + e^{-(\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) - 2)/\delta_1^2}}, \quad (29)$$

其中  $b, \delta_1$  为设计参数,且  $\delta_1 < b < 1$ .

所设计的滑模面表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{C}\mathbf{e}_N + \dot{\mathbf{e}}_N = \\ \mathbf{C} &\left(\mathbf{e}_R + \int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{e}_\Omega(\tau) d\tau\right) + (\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I})\mathbf{e}_\Omega, \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $\mathbf{C} = \text{diag}[c_1 \ c_2 \ c_3] \in R^{3 \times 3}$ .

对于式(30)所示的滑模面,只要选取合适的参数  $\mathbf{C}$ ,就能够保证  $\mathbf{S} \rightarrow 0$  时  $\mathbf{e}_N \rightarrow 0$ , 从而  $\dot{\mathbf{e}}_N \rightarrow 0$ .  $\dot{\mathbf{e}}_N \rightarrow 0$  意味着  $(\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I})\mathbf{e}_\Omega \rightarrow 0$ , 因此只要设计  $\gamma(t)$  使矩阵  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}$  可逆,就能保证  $\mathbf{e}_\Omega \rightarrow 0$ . 另一方面,  $\mathbf{e}_N \rightarrow 0$  意味着  $\mathbf{e}_R \rightarrow -\int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{e}_\Omega(\tau) d\tau$ . 由此,这里的设计问题转变为设计调节函数  $\gamma(t)$  使  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}$  可逆,同时使得  $\mathbf{e}_R \rightarrow -\int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{e}_\Omega(\tau) d\tau$  为有界小量.

为了设计方便,定义如下的误差函数:

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_d^T \mathbf{R}). \quad (31)$$

将式(20)代入(31)可得

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = 2 \sin^2(\|\mathbf{x}\|/2). \quad (32)$$

式(32)表明,  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) \in [0, 2]$ , 且随着  $\|\mathbf{x}\|$  从 0 变化到  $\pi$ ,  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  从 0 单调递增至 2,  $\|\mathbf{x}\| = \pi$  则对应着  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = 2$ .

考虑到  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  仅在  $\|\mathbf{x}\| = \pi$  处不可逆,这里的调节函数  $\gamma(t)$  主要针对  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = 2$  的状态进行设计,设计调节函数如式(29).

**注 2** 从式(29)不难发现,所设计的  $\gamma(t)$  在  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = 2$  处有  $\gamma(t) = 2$ , 随着  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  从  $2 \rightarrow 2 - \delta_1$ ,  $\gamma(t)$  将呈指数速度迅速减小,并在  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) \rightarrow 2 - \delta_1$  时接近于 0, 通常所选取的  $\delta_1$  越小,  $\gamma(t)$  趋近于 0 的速度越快.

对于所设计的调节函数和滑模面有如下引理.

**引理 1** 式(29)所示的调节函数能够保证矩阵  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}$  在整个  $\text{SO}(3)$  空间内始终可逆,从而使得当式(30)所描述的滑模面趋于 0 时,系统各状态量是指指数渐近稳定的.

**证明** 前面已知  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  的特征值如式(24)所述,则  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}$  的 3 个特征值分别为

$$\begin{aligned} \lambda_{E_\gamma}^j &= \cos \|\mathbf{x}\|, \frac{1}{2}(1 + \cos \|\mathbf{x}\| \pm \sin \|\mathbf{x}\| i), \\ j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (33)$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}) &= \prod_{j=1}^3 \lambda_{E_\gamma}^j = \\ &= \frac{1}{8} \left( \cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + 2\gamma(t) \right) \left( \left( \cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + 2\gamma(t) \right)^2 + \cos^2 \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

考虑到  $\|\mathbf{x}\| \leq \pi$ , 结合  $\gamma(t)$  的定义可知

$$\cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + 2\gamma(t) > 0 \quad (35)$$

在整个  $\text{SO}(3)$  空间内均成立,这表明矩阵  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}$  在整个  $\text{SO}(3)$  空间内是可逆的.

对于式(30)所示的滑模面,选取矩阵  $\mathbf{C}$  的各参数  $c_i, i = 1, 2, 3$ . 令  $\mathbf{S} = 0$ , 则在滑模面上系统状态量满足

$$\dot{\mathbf{e}}_N = -\mathbf{C}\mathbf{e}_N, \quad (36)$$

求解可得

$$\mathbf{e}_N(t) = \exp(-\mathbf{C}t)\mathbf{e}_N(0). \quad (37)$$

显然状态量  $\mathbf{e}_N$  随时间指数收敛到 0, 从而  $\dot{\mathbf{e}}_N$  也将指数收敛到 0. 考虑到  $\dot{\mathbf{e}}_N = (\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I})\mathbf{e}_\Omega$ , 由于  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}$  可逆,  $\dot{\mathbf{e}}_N \rightarrow 0$  意味着  $\mathbf{e}_\Omega \rightarrow 0$ , 而  $\mathbf{e}_N \rightarrow 0$  则意味着  $\mathbf{e}_R \rightarrow -\int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{e}_\Omega(\tau) d\tau$ . 由式(29)可知,  $\gamma(t)$  仅在  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = 2$  附近有非常小的最大值  $b$ , 且随着  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  的减小呈指数规律迅速衰减, 在定义域的其他状态几乎为 0, 同时考虑到  $\mathbf{e}_\Omega$  随着时间的推移将指数收敛到 0, 则  $-\int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{e}_\Omega(\tau) d\tau$  随着时间的推移必将趋近于一个固定小量  $\mathbf{c}_0$ , 从而使得  $\mathbf{e}_R \rightarrow \mathbf{c}_0$ , 这说明  $\mathbf{e}_R$  将稳定在期望轨迹的一个小邻域内. 以上分析表明, 当式(30)所描述的滑模面趋于 0 时, 系统各状态量是指指数渐近稳定的.  $\square$

**注 3** 当两个坐标系相对于特定旋转轴相差接近  $180^\circ$  时(奇异点附近),会产生非常大的控制输出,调节函数  $\gamma(t)$  的引入可有效“绕过”奇异点. 但由于  $\gamma(t)$  积分项的存在,导致静态误差不为零. 在工程中,当  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  远离 2 时意味着系统已远离奇异点,此时可将积分项清零,以消除静态误差.

### 3.2 控制器设计

设计滑模趋近律为

$$\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{S} - \mathbf{K}_2 \text{sgn}(\mathbf{S}). \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [s_1(t) \ s_2(t) \ s_3(t)]^T; \\ \text{sgn}(\mathbf{S}) &= [\text{sgn}(s_1) \ \text{sgn}(s_2) \ \text{sgn}(s_3)]^T; \\ \mathbf{K}_1 &= \text{diag}\{k_{11}, k_{12}, k_{13}\} \in R^{3 \times 3}, \\ \mathbf{K}_2 &= \text{diag}\{k_{21}, k_{22}, k_{23}\} \in R^{3 \times 3}, \end{aligned}$$

且  $k_{1i}, k_{2i} > 0, i = 1, 2, 3$ .

根据滑模控制设计步骤,令  $\dot{\mathbf{S}} = 0$ , 可求得系统的等效控制量,结合所设计的趋近律,最终可得到如下

的控制器:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J}\rho^{-1}(t)\{(\mathbf{C}\rho(t) + \dot{\rho}(t))\mathbf{e}_\Omega(t) + \mathbf{K}_1\mathbf{S} + \mathbf{K}_2\text{sgn}(\mathbf{S}) + \mu(t)\} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{J}\Omega. \quad (39)$$

其中

$$\mu(t) = \frac{\|\rho(t)\|_F \|\mathbf{J}^{-1}\|_F + (\delta_R^2 \mathbf{S} + \delta_R \varepsilon \text{sgn}(\mathbf{S}))}{\delta_R \|\mathbf{S}\| + \varepsilon}, \quad (40)$$

$$\rho(t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) + \gamma(t)\mathbf{I}, \quad (41)$$

且  $\varepsilon > 0$  为设计小量.

**注4** 在实际的应用中可以使用饱和函数代替  $\text{sgn}(\mathbf{S})$ , 在一定程度上能缓解颤振.

**注5** 所设计的控制器用到了状态量  $\mathbf{e}_R$  和函数  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$ , 从其定义式(14)和(17)可知, 当  $\text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d) = -1$ , 即  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{R}_d$  相对于特定转轴相差  $180^\circ$  时, 用式(14)和(17)计算  $\mathbf{e}_R$  和函数  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$  会出现分母等于零的情况, 从而导致计算上的奇异. 实际上, 此时它们的分子也是趋于零的, 这两个状态量本身在  $\text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d) = -1$  时是不为零的. 为了防止计算上的奇异, 这里可以考虑在  $\text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d)$  接近  $-1$  时用罗德里格斯公式进行计算, 计算公式如下:

$$\mathbf{e}_R = \frac{\sin \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}, \quad (42)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d) = \frac{1}{2} \cos \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}}{2\|\mathbf{x}\|} \hat{\mathbf{x}}. \quad (43)$$

其中:  $\hat{\mathbf{x}}$  可以由式(20)进行计算, 即

$$\hat{\mathbf{x}} = \ln(\mathbf{R}_d^T \mathbf{R}); \quad (44)$$

$\mathbf{x}$  则可由根据 hat 映射的定义, 由  $\hat{\mathbf{x}}$  得到.

### 3.3 稳定性分析

所设计的SO(3)滑模变结构控制系统的稳定性可总结为如下的定理.

**定理1** 对于式(1)所示的四旋翼无人机姿态控制系统, 采用式(30)所示的滑模面和式(29)所示的调节函数, 在控制器(39)的作用下, 系统是全局指数渐近稳定的.

**证明** 选取 Lyapunov 函数为

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}{2}. \quad (45)$$

对所设计的 Lyapunov 函数求导, 并将所设计的控制器(39)代入可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} = \\ & \mathbf{S}^T (\mathbf{C}\rho(t) + \dot{\rho}(t))\mathbf{e}_\Omega(t) + \\ & \rho(t)(\mathbf{J}^{-1}(-\Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{u} + \Delta_R) - \alpha_d) \leq \\ & -\mathbf{S}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{S} - \sum_{i=1}^3 k_{2i} |s_i| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\rho(t)\|_F \|\mathbf{J}^{-1}\|_F \frac{\Delta_R \varepsilon}{\Delta_R \|\mathbf{S}\| + \varepsilon} \times \\ & \left( \sum_{i=1}^3 |s_i| - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \right) \leq \\ & -\mathbf{S}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{S} - \sum_{i=1}^3 k_{2i} |s_i|. \end{aligned} \quad (46)$$

由于矩阵  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  均为正定对角阵, 式(46)表明系统是全局指数渐近稳定的.  $\square$

## 4 仿真分析

目标飞行器参数为质量  $\text{mass} = 0.455 \text{ kg}$ , 转动惯量  $\mathbf{J} = \text{diag}\{3 \ 2 \ 1\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 不确定性设定为  $\Delta_R(t) = [\sin(8\pi t) \ \sin(\pi t) \ \cos(4\pi t)]^T / \sqrt{3}$ , 其上界显然为  $\delta_R = 1$ . 选取滑模控制器参数为  $\mathbf{C} = \text{diag}[15 \ 15 \ 15]$ ,  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \text{diag}\{10 \ 10 \ 10\}$ ,  $b = 0.1$ ,  $\delta_1 = 0.02$ ,  $\varepsilon = 3$ .

这里用函数  $s_i/(|s_i| + \delta_2)$  代替  $\text{sgn}(s_i)$  以削弱颤振, 参数选取为  $\delta_2 = 0.3$ .

为了验证滑模控制器的性能, 特别是在进行初始跟踪姿态误差角度达  $\pi$  时的跟踪性能, 这里首先根据飞行器三通道设置了3组仿真, 仿真时长设定为  $T = 20 \text{ s}$ , 仿真步长为  $\text{Step} = 0.01 \text{ s}$ , 情况如下.

仿真实验1. 初值设定为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(0) &= \exp\left(-\frac{\pi}{2} \hat{\mathbf{e}}_1\right), \\ \Omega(0) &= \mathbf{0}_{3 \times 1}, \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{e}_3 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , 即飞行器滚转轴.

给定指令信号为

$$\mathbf{R}_d(t) = \exp(\gamma_d(t) \hat{\mathbf{e}}_1).$$

其中

$$\gamma_d(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq \frac{t}{4} < 1, 2 \leq \frac{t}{4} < 3, 4 \leq \frac{t}{4} < 5; \\ -\frac{\pi}{2}, & 1 \leq \frac{t}{4} < 2, 3 \leq \frac{t}{4} < 4. \end{cases}$$

上述初值在欧拉角意义下表示飞行器处于俯仰角  $\theta = 0$ 、偏航角  $\psi = 0$ 、滚转角  $\gamma = -\pi/2$  的状态, 指令信号  $\mathbf{R}_d(t)$  要求飞行器绕滚转轴进行幅度为  $\pi$ , 周期为  $4 \text{ s}$  的脉冲式周期滚转运动, 同时俯仰角、偏航角保持在  $0^\circ$ .

上述指令设计要求飞行器绕滚转轴进行极限幅度的运动, 且在零时刻及每次指令切换的瞬间, 飞行器状态都与给出的指令相差  $\pi$ , 对于普通的控制方法而言, 必然会导致控制器出现奇异, 从而使得系统不稳定. 这里用所提出的无奇异SO(3)滑模控制器对该指令进行了跟踪, 结果如图2所示.

仿真结果表明, 与滚转角维度相对应的滑模分量  $s_1$  从一开始就呈指数收敛态势, 在  $0.5 \text{ s}$  左右收敛至零, 当指令发生最大幅度的阶跃变化时, 滑模动态迅速呈现出指数收敛态势, 并在  $0.5 \text{ s}$  以内收敛至零, 具有良好的动态性能, 稳态误差为  $10^{-3}$  量级, 具有较高

的控制精度.与此同时,滑模面的另外两维  $s_2$  和  $s_3$  始终保持在零附近,误差也在  $10^{-3}$  量级.

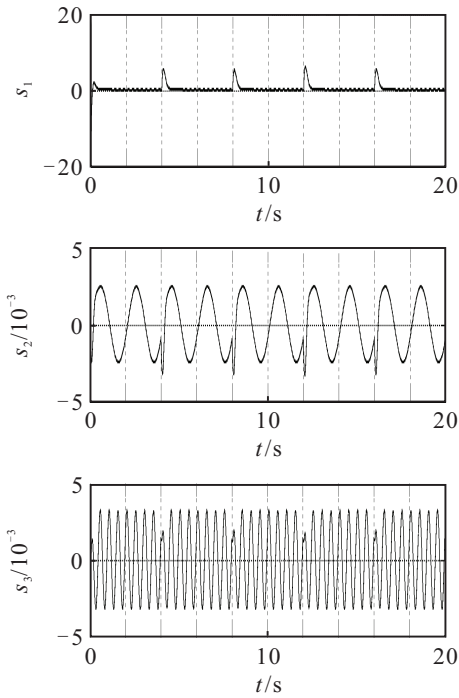


图2 大角度滚转运动时滑模各维分量随时间变化情况

仿真实验2. 初值设定为

$$\mathbf{R}(0) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\hat{e}_2\right),$$

$$\Omega(0) = \mathbf{0}_{3 \times 1},$$

其中  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 2 \ 0]^T$ , 即飞行器偏航轴.

给定指令信号为

$$\mathbf{R}_d(t) = \exp(\vartheta_d(t)\hat{e}_2),$$

其中  $\vartheta_d(t)$  与  $\gamma_d(t)$  表达式相同.

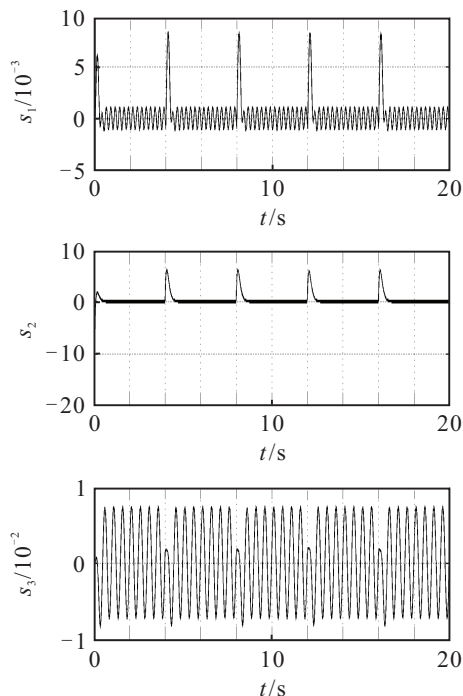


图3 大角度俯仰运动时滑模各维分量随时间变化情况(仿真2)

此时系统初始位于滚转角  $\gamma = 0$ 、偏航角  $\psi = 0$ 、俯仰角  $\vartheta = -\pi/2$  的状态, 指令信号  $\mathbf{R}_d(t)$  要求飞行器绕俯仰轴进行幅度为  $\pi$ , 周期为 4s 的脉冲式周期俯仰运动, 同时滚转角、偏航角保持在  $0^\circ$ . 仿真结果如图3所示.

仿真结果表明, 系统动态响应时间在 0.5s 左右, 各状态量的稳态误差基本在  $10^{-4} \sim 10^{-3}$  量级, 个别状态量为  $10^{-2}$  量级, 各状态量均具有良好的动态性能和较小的稳态误差.

仿真实验3. 初值设定为

$$\mathbf{R}(0) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\hat{e}_3\right),$$

$$\Omega(0) = \mathbf{0}_{3 \times 1},$$

其中  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , 即飞行器偏航轴.

给定指令信号为

$$\mathbf{R}_d(t) = \exp(\psi_d(t)\hat{e}_3),$$

其中  $\psi_d(t)$  与  $\gamma_d(t)$  表达式相同.

此时系统初始位于滚转  $\gamma = 0$ 、俯仰角  $\vartheta = 0$ 、偏航角  $\psi = -\pi/2$  的状态, 指令信号  $\mathbf{R}_d(t)$  要求飞行器绕偏航轴进行幅度为  $\pi$ , 周期为 4s 的脉冲式周期偏航运动, 同时滚转角、俯仰角保持在  $0^\circ$ . 仿真结果如图4所示.

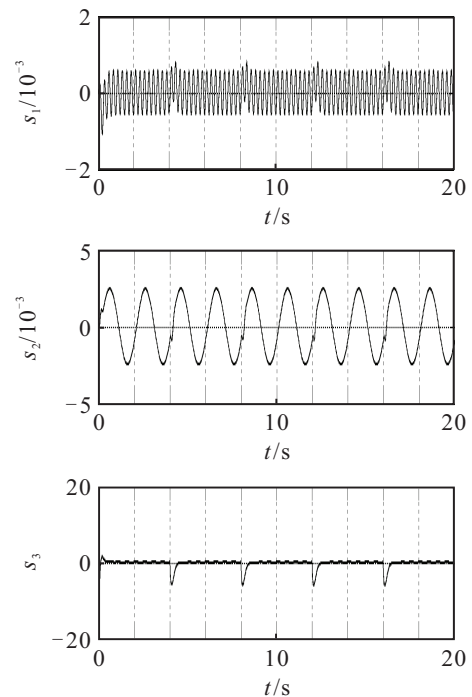


图4 大角度俯仰运动时滑模各维分量随时间变化情况(仿真3)

仿真结果表明, 系统各状态量的变化情况与仿真实验1、仿真实验2基本相同, 只是各维度相对应的具体情况有所不同, 系统动态响应时间同样在 0.5s 左右, 所有状态量的稳态误差都在  $10^{-5} \sim 10^{-2}$  量级, 系统各状态量均具有良好的动态性能和较小的稳态误差.

上面的3组仿真实验是对所设计控制器在各个通道的指令跟踪测试,各通道之间耦合相对较小,为了验证控制器跟踪任意位置大角度指令的能力,这里设计了第4组仿真实验。

仿真实验4.初值设定为

$$\mathbf{R}(0) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\hat{e}_4\right),$$

$$\Omega(0) = 0_{3 \times 1},$$

其中  $\mathbf{e}_4 = \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\right]^T$ , 此时  $\mathbf{e}_4$  对应的是空间任意位置的空间矢量。

给定指令信号为

$$\mathbf{R}_d(t) = \exp(\xi_d(t)\hat{e}_4),$$

其中  $\xi_d(t)$  与  $\gamma_d(t)$  表达式相同。

上述指令设计要求飞行器绕  $\mathbf{e}_4$  轴进行幅度为  $\pi$ 、周期为 4s 的脉冲式周期运动,此时对应的各欧拉角指令均随时间变化,三通道之间存在剧烈耦合影响,仿真结果如图 5 所示。

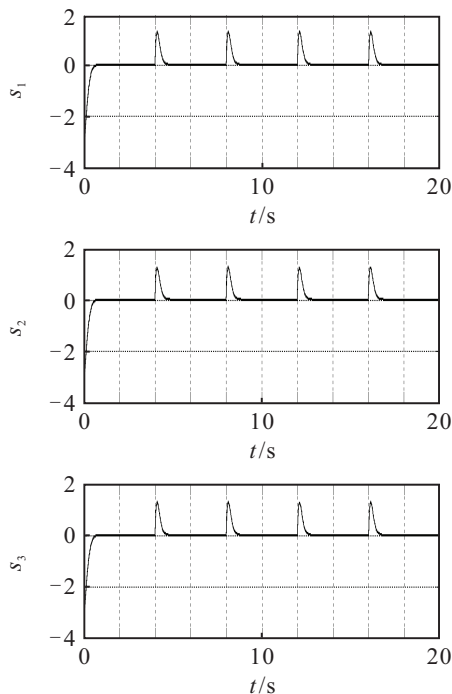


图5 大角度俯仰运动时滑模各维分量随时间变化情况(仿真4)

仿真结果表明,即使三通道之间存在剧烈耦合,系统的动态相应时间仍然在 0.5s 左右,且滑模各状态量的误差保持在  $10^{-3} \sim 10^{-2}$  量级,系统的动态和稳态性能仍然良好。

以上的仿真结果充分验证了所设计的控制器具有良好的性能,完全能够实现所提出的控制目标。

由于现有文献的控制器未能解决在  $\pi$  处出现的控制奇异问题,在用这些方法跟踪本文所设计的极限幅度指令信号时,控制系统会发散,因此无法通过仿真进行具体比较,这里只能根据同类文献的仿真结

果,对系统稳态和动态性能进行定量比较。目前,专门研究四旋翼无人机 SO(3) 姿态控制的文献并不多,比较典型的是学者 Lee 等在文献 [15] 和文献 [20] 中所提出的鲁棒自适应控制方法,这两篇论文所提出的鲁棒自适应控制器稳态响应时间大约在 5s 左右,且稳态误差在  $10^{-3} \sim 10^{-2}$  量级。本文的仿真模型参数与文献 [20] 完全相同,指令信号是脉冲式且幅度达到极限的  $\pi$ 。即便如此,本文所提出的无奇异滑模变结构控制器仍具有比文献 [15] 和文献 [20] 都要快得多的响应速度 (0.5s), 以及不低于它们的跟踪精度  $10^{-5} \sim 10^{-2}$ , 这充分表明了本文所提出的控制器在动态性能上的优越性。

**注6** 由于滑模控制原理上的缺陷,部分状态量在稳态时存在幅度非常小的颤振。由于这种颤振幅度非常之小,在实际工程应用中,控制机构通常敏感不到,且本文所出现的颤振频率最高只有 4 ~ 5 Hz,理论上对实际控制机构不会有太大的影响。但需要指出的是,本文现在所做的仍限于理论研究,颤振现象的影响还需在实际工程实现中予以验证。

## 5 结 论

本文通过对现有四旋翼无人机的姿态 SO(3) 模型进行充分分析,确定了适用于滑模变结构控制的姿态 SO(3) 模型,并以该模型为控制对象,提出了一种调节函数。通过将该调节函数引入滑模面,设计了一种新的积分型滑模面,解决了采用传统设计方法时存在的控制奇异问题,得到了系统全局稳定的结论,实现了对四旋翼无人机的 SO(3) 滑模变结构控制。仿真实验表明,所提出的滑模变结构控制方法能够实现幅度为  $\pi$  的极限指令跟踪,动态性能和稳态性能明显优于同类文献提出的鲁棒自适应控制方法,且在误差指令为  $\pi$  时不会出现奇异,充分验证了设计方法的有效性。所提出的通过在滑模引入调节函数避免控制奇异的思想可用于解决类似的控制奇异问题,所设计的控制器中使用的信号在实际系统中均可通过传感器准确测量,具备良好的工程可实现性。后续可考虑利用高阶滑模设计方法进一步消除颤振,并对控制器中一些复杂的函数项进行简化或近似,为将控制方法应用于实际四旋翼无人机系统做好技术准备。

## 参考文献(References)

- [1] Bouabdallah S. Design and control of quadrotors with application to autonomous flying[J]. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2007, 3727: 61.
- [2] Bouabdallah S, Siegwart R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor[C]. Int Conf on Robotics and Automation. Barcelona: IEEE, 2005: 2247-2252.

- [3] Bristeau P-J, Callou F, Vissière D. The navigation and control technology inside the ar. drone micro uav[C]. The 18th IFAC World Congress. Milano, 2011: 1477-1484.
- [4] Lim H, Park J, Lee D. Build your own quadrotor: Open-source projects on unmanned aerial vehicles[J]. *Robotics & Automation Magazine*, 2012, 19(3): 33-45.
- [5] Zhou Q L, Zhang Y, Rabbath C. Design of feedback linearization control and reconfigurable control allocation with application to a quadrotor UAV[C]. 2010 Conf on Control and Fault-Tolerant Systems. Nice: IEEE, 2010: 371-376.
- [6] Lee D, Kim H J, Sastry S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter[J]. *Int J of Control, Automation and Systems*, 2009, 7(3): 419-428.
- [7] Al-Younes Y M, Al-Jarrah M A, Jhemi A A. Linear vs. nonlinear control techniques for a quadrotor vehicle[C]. The 7th Int Symposium on Mechatronics and Its Applications. Sharjah: IEEE, 2010: 1-10.
- [8] Zheng E, Xiong J. Quad-rotor unmanned helicopter control via novel robust terminal sliding mode controller and under-actuated system sliding mode controller[J]. *Optik: Int J for Light and Electron Optics*, 2014, 125(11): 2817-2825.
- [9] Zheng E H, Xiong J J, Luo J L. Second order sliding mode control for a quadrotor UAV[J]. *ISA Trans*, 2014, 53(4): 1-7.
- [10] Xu R, Ozguner U. Sliding mode control of a quadrotor helicopter[C]. 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego: IEEE, 2006: 4957-4962.
- [11] Efe M O. Robust low altitude behavior control of a quadrotor rotorcraft through sliding modes[C]. 2007 Mediterranean Conf on Control & Automation. Athens: IEEE, 2007: 1-6.
- [12] Bouadi H, Bouchoucha M, Tadjine M. Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor[J]. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2007, 26: 22-27.
- [13] Lee T, Leok M, Mcclamroch N H. Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)[C]. 2012 American Control Conf. Montreal: IEEE, 2012: 4649-4654.
- [14] Lee K, Back J, Choy I. Nonlinear disturbance observer based robust attitude tracking controller for quadrotor UAVs[J]. *Int J of Control, Automation and Systems*, 2014, 12(6): 1-10.
- [15] Fernando T, Chandiramani J, Lee T, et al. Robust adaptive geometric tracking controls on SO(3) with an application to the attitude dynamics of a quadrotor UAV[C]. Conf on Decision and Control. Orlando: IEEE, 2011: 7380-7385.
- [16] Mokhtari A, Benallegue A, Daachi B. Robust feedback linearization and  $GH_{\infty}$  controller for a quadrotor unmanned aerial vehicle[C]. 2005 IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems. Beijing: IEEE, 2005: 1198-1203.
- [17] Madani T, Benallegue A. Backstepping control for a quadrotor helicopter[C]. 2006 IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems. Beijing: IEEE, 2006: 3255-3260.
- [18] Das A, Lewis F, Subbarao K. Backstepping approach for controlling a quadrotor using lagrange form dynamics[J]. *J of Intelligent and Robotic Systems*, 2009, 56(1): 127-151.
- [19] Fang Z, Gao W. Adaptive integral backstepping control of a micro-quadrotor[C]. 2nd Int Conf on Intelligent Control and Information Processing(ICICIP). Harbin: IEEE, 2011: 910-915.
- [20] Lee T. Exponential stability of an attitude tracking control system on SO(3) for large-angle rotational maneuvers[J]. *Systems and Control Letters*, 2012, 61(1): 231-237.
- [21] Goodarzi F, Lee D, Lee T. Geometric nonlinear PID control of a quadrotor UAV on SE(3)[C]. Proc of European Control Conf. Zürich: 2013: 3845-3850.
- [22] Lee T, Leok M, Mcclamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)[C]. The 49th IEEE Conf on Decision and Control. Atlanta: IEEE, 2010: 5420-5425.
- [23] 史晓宁. 飞行机器人轨迹跟踪控制的几何方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学航天学院, 2013.  
(Shi X N. Geometric approach for trajectory tracking control of aerial robots[D]. Harbin: School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, 2013.)
- [24] 郑重, 宋申民. 基于旋转矩阵描述的航天器无角速度测量姿态跟踪无源控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(9): 1628-1632.  
(Zheng Z, Song S M. Rotation matrix based passive attitude tracking control of spacecraft without angular velocity measurements[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(9): 1628-1632.)