

## 3种伪谱最优控制方法的积分形式及统一性证明

戴明祥<sup>1,2</sup>, 杨新民<sup>1</sup>, 何颖<sup>1</sup>, 易文俊<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学瞬态物理重点实验室, 南京 210094; 2. 中国北方工业公司 研究发展部, 北京 100053)

**摘要:** 为了进一步提高伪谱最优控制方法的计算精度, 削弱微分形式伪谱法对状态变量近似误差的放大幅度, 研究基于积分形式的伪谱最优控制方法. 依次给出3种伪谱法的积分伪谱离散形式, 证明当Lagrange多项式对状态变量的近似误差等于零时, Gauss伪谱法和Radau伪谱法的积分形式与微分形式是等价的, 而Legendre伪谱法的积分形式与微分形式是不等价的, 并分析了其不等价的原因.

**关键词:** 伪谱最优控制; 积分伪谱法; 微分伪谱法

中图分类号: TP13

文献标志码: A

## Integral form and equivalence proof of three pseudospectral optimal control methods

DAI Ming-xiang<sup>1,2</sup>, YANG Xin-min<sup>1</sup>, HE Ying<sup>1</sup>, YI Wen-jun<sup>1</sup>

(1. National Key Laboratory of Transient Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. Research and Development Department, China North Industries Corporation, Beijing 100053, China. Correspondent: DAI Ming-xiang, E-mail: mingxiang.dai@qq.com)

**Abstract:** In order to further improve the accuracy of the pseudospectral optimal control method, and weaken the amplification of approximation errors of state variables in the differential pseudospectral method, the integral pseudospectral optimal control method is studied. The integral pseudospectral discrete forms of three pseudospectral methods are presented, which are Legendre pseudospectral method, Gauss pseudospectral method and Radau pseudospectral method, respectively. When the approximation errors of Lagrange polynomials for state variables are equal to zero, it is proved that the differential and integral forms of Gauss pseudospectral method and Radau pseudospectral method are equivalent, but that of Legendre pseudospectral method is not equivalent, and the reason of nonequivalence is also analyzed.

**Keywords:** pseudospectral optimal control; integral pseudospectral method; differential pseudospectral method

## 0 引言

伪谱最优控制方法, 又称为正交配置法, 主要利用Lagrange插值多项式近似离散最优控制问题中的状态变量和控制变量, 将连续型最优控制问题转化成离散形式的非线性规划(NLP)问题, 然后利用相应的NLP算法求解. 根据配置点的不同, 伪谱法主要分为Legendre伪谱法<sup>[1]</sup>、Gauss伪谱法<sup>[2-3]</sup>和Radau伪谱法<sup>[4-5]</sup>3种.

传统伪谱最优控制方法多采用微分形式表示, 状态变量的微分是直接对状态变量的Lagrange多项式求导获得的, 而当Lagrange多项式表示的状态变量或控制变量存在近似误差时, 状态变量的微分对近似误差会产生进一步的放大, 降低了伪谱最优控制方法的

求解精确度. 如果采用积分形式代替Bolza最优控制问题中动态约束条件的微分形式, 可以缓解对状态变量近似误差的放大. Rao等在文献[6]中探索性地介绍了基于Radau伪谱法的积分形式, 分析了积分形式伪谱法相对与微分形式伪谱法在求解精度方面的优势. 但是, 在现有文献中未见关于3种伪谱法积分形式的详细论述, 也缺少对3种伪谱方法积分形式与微分形式等价性的详细证明, 特别是Legendre伪谱法.

本文给出了Legendre伪谱法、Gauss伪谱法和Radau伪谱法的积分形式, 并分析3类伪谱法微分形式与积分形式的区别和联系. 证明当状态变量和控制变量的Lagrange多项式近似误差为零时, Gauss伪谱法和Radau伪谱法的微分形式与积分形式是等价的,

收稿日期: 2015-05-05; 修回日期: 2015-10-01.

作者简介: 戴明祥(1987—), 男, 博士生, 从事智能弹药和最优控制的研究; 杨新民(1959—), 男, 副研究员, 从事制导炮弹和飞行控制等研究.

而 Legendre 伪谱法的微分形式与积分形式并不等价, 而且分析并证明了 Legendre 伪谱法微分形式与积分形式不等价的原因.

在本文中, 变量符号的上标 L、G 和 R 分别表示 Legendre 伪谱法、Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法. 对于任一矩阵变量  $D$ ,  $D_i$  表示  $D$  的第  $i$  行,  $D_i^T$  表示  $D^T$  的第  $i$  行,  $D_{i,j}$  表示  $D$  的第  $i$  行第  $j$  列元素, 其他矩阵符号符合 Matlab 标准.

## 1 Bolza 最优控制问题

由于伪谱最优控制方法的时域适用范围只限于  $[-1, 1]$ , 需将 Bolza 最优控制问题的时间域从  $[t_0, t_f]$  转换至  $[-1, 1]$ . 时间域位于  $[-1, 1]$  的 Bolza 最优控制问题<sup>[7]</sup>描述如下.

目标函数为

$$\begin{aligned} \min J = & \\ & \Phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(+1), t_f) + \\ & \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) d\tau; \end{aligned} \quad (1)$$

动态、边界和路径约束条件依次为

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f), \quad (2)$$

$$\Psi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(+1), t_f) = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) \leq \mathbf{0}. \quad (4)$$

## 2 伪谱最优控制方法的积分形式

首先定义几组新的变量:  $\mathbf{f}_k^X = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_k^X), \mathbf{u}(\tau_k^X), \tau_k^X; t_0, t_f)$ ,  $\mathbf{g}_k^X = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau_k^X), \mathbf{u}(\tau_k^X), \tau_k^X; t_0, t_f)$ ,  $\mathbf{c}_k^X = \mathbf{c}(\mathbf{x}(\tau_k^X), \mathbf{u}(\tau_k^X), \tau_k^X; t_0, t_f)$ ,  $\mathbf{F}^X = [\mathbf{f}_1^X, \mathbf{f}_2^X, \dots, \mathbf{f}_N^X]$ , Gauss 积分权值为  $\omega_i^X$ , 伪谱微分矩阵为  $D^X$ , 上述所有变量符号的上标  $X = L, G, R, k = 1, 2, \dots, N$ .

### 2.1 Legendre 伪谱法的积分离散方法

在积分形式的 Legendre 伪谱法中, 定义  $N$  个 LGL 点为  $(\tau_1^L, \tau_2^L, \dots, \tau_N^L)$ , 由 LGL 点构成的 Lagrange 多项式为  $L_k^L(\tau)$ . 状态变量微分  $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$  由  $L_k^L(\tau)$  近似, 则

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{x}}^L(\tau) = \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{x}}(\tau_k^L) L_k^L(\tau). \quad (5)$$

由式(2)可得  $\dot{\mathbf{x}}(\tau_k^L) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k^L$ , 则式(5)等于

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{x}}^L(\tau) = \sum_{k=1}^N \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k^L L_k^L(\tau). \quad (6)$$

因为  $\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(-1) = \int_{-1}^{\tau} \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau$ , 再用式(6)替换  $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$ , 得

$$\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(-1) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k^L \int_{-1}^{\tau} L_k^L(\tau) d\tau. \quad (7)$$

定义新的矩阵  $\mathbf{A}^L \in \mathbf{R}^{(N-1) \times N}$ , 其中每个元素

$A_{i,k}^L = \int_{-1}^{\tau_i^L} L_k^L(\tau) d\tau$ . 式(7)在沿 LGL 点取值为

$$\mathbf{X}_i^L - \mathbf{X}_1^L = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}_i^L \mathbf{F}^L, \quad i = 2, 3, \dots, N. \quad (8)$$

### 2.2 Gauss 伪谱法的积分离散方法

对于积分形式的 Gauss 伪谱法, 定义  $N$  个 LG 点, 分别表示为  $(\tau_1^G, \tau_2^G, \dots, \tau_N^G)$ , 再补充定义  $\tau_0^G = -1$  和  $\tau_{N+1}^G = +1$ . 定义由  $(\tau_0^G, \tau_1^G, \dots, \tau_N^G)$  构成的 Lagrange 多项式为  $L_k^G(\tau)$ , 再定义由  $(\tau_1^G, \tau_2^G, \dots, \tau_N^G)$  构成的 Lagrange 多项式为  $L_k^{G*}(\tau)$ . 采用多项式  $L_k^{G*}(\tau)$  来逼近状态变量的微分  $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$ , 即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{x}}^G(\tau) = \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{x}}(\tau_k^G) L_k^{G*}(\tau). \quad (9)$$

由式(2)可知  $\dot{\mathbf{x}}(\tau_k^G) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k^G$ , 则式(9)表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{x}}^G(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k^G L_k^{G*}(\tau). \quad (10)$$

因为  $\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(-1) = \int_{-1}^{\tau} \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau$ , 所以 Gauss 伪谱法状态变量的积分形式为

$$\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(-1) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k^G \int_{-1}^{\tau} L_k^{G*}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

定义 Gauss 伪谱法的积分矩阵  $\mathbf{A}^G \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , 其中每个元素等于  $A_{i,k}^G = \int_{-1}^{\tau_i^G} L_k^{G*}(\tau) d\tau$ . 式(11)沿 LG 点分布为

$$\mathbf{X}_i^G - \mathbf{X}_0^L = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}_i^G \mathbf{F}^G, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

### 2.3 Radau 伪谱法的积分离散方法

对于积分形式的 Radau 伪谱法, 定义  $N$  个 LGR 点, 分别表示为  $(\tau_1^R, \tau_2^R, \dots, \tau_N^R)$ , 再补充定义  $\tau_{N+1}^R = +1$ . 定义由  $(\tau_1^R, \tau_2^R, \dots, \tau_{N+1}^R)$  构成的 Lagrange 多项式  $L_k^R(\tau)$ , 再定义由  $(\tau_1^R, \tau_2^R, \dots, \tau_N^R)$  构成的 Lagrange 多项式  $L_k^{R*}(\tau)$ . 采用多项式  $L_k^{R*}(\tau)$  来逼近状态变量的微分  $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$ , 即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{x}}^R(\tau) = \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{x}}(\tau_k^R) L_k^{R*}(\tau). \quad (13)$$

式(2)沿 LGR 点求函数值, 可得  $\dot{\mathbf{x}}(\tau_k^R) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k^R$ , 则式(13)可以写成

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{x}}^R(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k^R L_k^{R*}(\tau). \quad (14)$$

因为  $\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\tau) = \int_{\tau}^1 \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau$ , 用式(14)代替  $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$ , 则 Radau 伪谱法状态变量的积分形式为

$$\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k^R \int_{\tau}^1 L_k^{R*}(\tau) d\tau. \quad (15)$$

定义 Radau 伪谱法的积分矩阵  $\mathbf{A}^R \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , 其中每个元素  $A_{i,k}^R = \int_{\tau_i^R}^1 L_k^{R*}(\tau) d\tau$ . 式(15)沿 LGR 点

求值, 有

$$\mathbf{X}_i^R = \mathbf{X}_{N+1}^L - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}_i^R \mathbf{F}^R, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

### 2.4 3种伪谱法的积分离散形式

综上所述, 式(1)~(4)表示的Bolza最优控制问题的3种积分伪谱离散形式, 具体描述如下.

目标函数为

$$\min J = \Phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(+1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i^x g_i^X; \quad (17)$$

Legendre、Gauss、Radau伪谱法的动态约束条件依次为

$$\mathbf{X}_i^L = \mathbf{X}_1^L + \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}_i^L \mathbf{F}^L, \quad i = 2, 3, \dots, N; \quad (18)$$

$$\mathbf{X}_i^G = \mathbf{X}_0^L + \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}_i^G \mathbf{F}^G, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_i^R = \mathbf{X}_{N+1}^L - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}_i^R \mathbf{F}^R, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (20)$$

边界约束条件为

$$\Psi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(+1), t_f) = \mathbf{0}; \quad (21)$$

路径约束条件为

$$\frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{c}_i^X \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

## 3 伪谱最优控制方法的统一性证明

**引理1** 对于Gauss和Radau伪谱法的微分矩阵 $D^G$ 和 $D^R$ ,  $D^G$ 删除第1列后得到的矩阵为 $D_{:,1:N}^G$ ,  $D^R$ 删除最后一列后得到的矩阵为 $D_{:,1:N}^R$ , 则 $D_{:,1:N}^G$ 和 $D_{:,1:N}^R$ 都是可逆矩阵<sup>[4,8]</sup>.

**引理2** 对于Legendre、Gauss和Radau伪谱法的微分矩阵 $D^L$ 、 $D^G$ 和 $D^R$ , 满足 $D_{:,2:N}^L \mathbf{1}_{N-1} = -D_{:,1}^L$ ,  $D_{:,1:N}^G \mathbf{1}_N = -D_{:,0}^G$ ,  $D_{:,1:N}^R \mathbf{1}_N = -D_{:,N+1}^R$ , 其中 $\mathbf{1}_{N-1}$ 和 $\mathbf{1}_N$ 分别为所有元素都为1的 $N-1$ 和 $N$ 维列向量<sup>[7-8]</sup>.

### 3.1 Gauss伪谱法积分形式与微分形式的联系

**定理1** 对于Gauss伪谱法的微分矩阵 $D^G$ 和积分矩阵 $A^G$ , 两者之间的相互关系为

$$A^G = (D_{:,1:N}^G)^{-1}.$$

**证明** 定义 $p$ 为次数不大于 $N$ 的多项式函数, 其微分为 $\dot{p}$ , 则

$$\begin{cases} p_i = p(\tau_i^G), \quad i = 0, 1, \dots, N; \\ \dot{p}_i = \dot{p}(\tau_i^G), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (23)$$

定义列向量 $\mathbf{p} = [p_0, p_1, \dots, p_N]^T \in \mathbf{R}^{N+1}$ 和 $\dot{\mathbf{p}} = [\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_N]^T \in \mathbf{R}^N$ . 由Gauss伪谱法得知 $D^G \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$ , 也可以写成 $D_{:,0}^G p_0 + D_{:,1:N}^G p_{1:N} = \dot{\mathbf{p}}$ . 由引理1和引理2可知

$$p_{1:N} - p_0 \mathbf{1}_N = (D_{:,1:N}^G)^{-1} \dot{\mathbf{p}}. \quad (24)$$

又因为 $\dot{p}$ 的次数不大于 $N-1$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$ 可以等价写成

Lagrange多项式形式, 则 $\dot{p} = \sum_{k=1}^N \dot{p}_k L_k^{G*}(\tau)$ , 两边求定积分, 得

$$p(\tau_i^G) - p(\tau_0^G) = \int_{-1}^{\tau_i^G} \sum_{k=1}^N \dot{p}_k L_k^{G*}(\tau) d\tau. \quad (25)$$

将式(25)改写成矩阵形式为

$$p_{1:N} - p_0 \mathbf{1}_N = A^G \dot{\mathbf{p}}. \quad (26)$$

由于 $\dot{\mathbf{p}}$ 的任意性, 比较式(24)和(26), 可以推导出

$$A^G = (D_{:,1:N}^G)^{-1}. \quad (27)$$

由此定理得证.  $\square$

当Lagrange多项式对状态变量和控制变量的近似误差等于零时, 动态约束条件的微分形式Gauss伪谱离散形式<sup>[2]</sup>为

$$D^G \mathbf{X}^G = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{F}^G. \quad (28)$$

将 $\mathbf{X}^G$ 分割成一个 $N$ 维列向量和一个 $N \times N$ 的矩阵, 则

$$D_{:,0}^G \mathbf{X}_0^G + D_{:,1:N}^G \mathbf{X}_{1:N}^G = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{F}^G. \quad (29)$$

式(29)两边同时乘以 $(D_{:,1:N}^G)^{-1}$ , 得

$$\mathbf{X}_{1:N}^G - \mathbf{1}_N \mathbf{X}_0^G = \frac{t_f - t_0}{2} (D_{:,1:N}^G)^{-1} \mathbf{F}^G. \quad (30)$$

由定理1可知 $A^G = (D_{:,1:N}^G)^{-1}$ , 则式(30)与(12)等价, 从而证明了Gauss伪谱法微分形式与积分形式的等价性.

### 3.2 Radau伪谱法积分形式与微分形式的联系

**定理2** 对于Radau伪谱法的微分矩阵为 $D^R$ 和积分矩阵 $A^R$ , 两者之间的相互关系为

$$A^R = -(D_{:,1:N}^R)^{-1}.$$

定理2的证明与定理1相近, 限于篇幅, 在此忽略定理2的证明过程, 读者可参考定理1的证明过程来推导.

微分形式Radau伪谱法的动态约束条件的离散等式为

$$D^R \mathbf{X}^R = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{F}^R. \quad (31)$$

将 $D^R$ 分割成一个 $N \times N$ 的矩阵和一个 $N$ 维列向量, 则式(31)等于

$$D_{:,1:N}^R \mathbf{X}_{1:N}^R + D_{:,N+1}^R \mathbf{X}_{N+1}^R = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{F}^R. \quad (32)$$

式(32)两边同时乘以 $(D_{:,1:N}^R)^{-1}$ , 得

$$\mathbf{X}_{1:N}^R = \mathbf{1}_N \mathbf{X}_{N+1}^R + \frac{t_f - t_0}{2} (D_{:,1:N}^R)^{-1} \mathbf{F}^R. \quad (33)$$

由定理2可知式(33)与(16)等价, 因此Radau伪谱法微分形式与积分形式也是等价的.

### 3.3 Legendre伪谱法积分形式与微分形式的联系

由文献[1]的描述可知, 当Lagrange多项式对状态变量和控制变量的近似误差等于零时, 动态约束条

件的微分离散形式为

$$D_{:,1}^L \mathbf{X}_1^L + D_{:,2:N}^L \mathbf{X}_{2:N}^L = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{F}^L. \quad (34)$$

**引理 3** 对于 Legendre 伪谱法中的微分矩阵  $D^L$ , 其除去第 1 列所形成的矩阵  $D_{:,2:N}^L$  列满秩.

**证明** 反证法. 假定存在一个非零列向量  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^N$ , 满足  $p_1 = 0$  且  $D^L \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , 则必然存在一个次数不大于  $N-1$  的多项式函数  $p$ , 其满足  $p(\tau_i^L) = p_i, i = 1, 2, \dots, N$ . 由 Legendre 伪谱法的微分矩阵  $D^L$  得

$$D_i^L \mathbf{p} = \dot{p}(\tau_i^L), i = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

由假设可知  $D^L \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , 则

$$\dot{p}(\tau_i^L) = 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (36)$$

多项式函数  $p$  的次数不大于  $N-1$ , 其导数  $\dot{p}$  的次数应不大于  $N-2$ , 则式 (36) 可以唯一地确定函数  $\dot{p} \equiv 0$ , 进一步推导出  $p \equiv \text{const}$ . 又因为  $p(\tau_1^L) = p_1 = 0$ , 从而可知  $p \equiv 0$ , 故列向量  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , 与假设不符, 因此满足  $p_1 = 0$  且  $D^L \mathbf{p} = \mathbf{0}$  的列向量  $\mathbf{p}$  只可能是零向量. 将  $p_1 = 0$  且  $D^L \mathbf{p} = \mathbf{0}$  改写成

$$D_{:,2:N}^L p_{2:N} = \mathbf{0}. \quad (37)$$

式 (37) 只存在零向量解, 故  $D_{:,2:N}^L$  列满秩.  $\square$

**引理 4** 对于任意定义的矩阵  $M \in \mathbf{R}^{s \times t}$ , 如果  $M$  行满秩 ( $s < t$ ), 则  $MM^T$  是可逆的, 矩阵  $M$  的 Moore-Penrose 伪逆  $M^+ = M^T(MM^T)^{-1}$ , 且满足  $MM^+ = I_s$ ; 如果  $M$  列满秩 ( $t < s$ ), 则  $M^T M$  是可逆的, 矩阵  $M$  的 Moore-Penrose 伪逆  $M^+ = (M^T M)^{-1} M^T$ , 且满足  $M^+ M = I_t$ . 其中  $I_s$  和  $I_t$  分别代表  $s$  维和  $t$  维单位矩阵<sup>[9]</sup>.

**引理 5** 对于 Legendre 伪谱法微分矩阵  $D^L$ , 满足  $-(D_{:,2:N}^L)^+ D_{:,1}^L = \mathbf{1}_{N-1}$ .

**定理 3** Legendre 伪谱法的积分矩阵  $A^L$ , 满足  $A^L D_{:,2:N}^L = I_{N-1}$ .

**证明** 定义  $p$  为次数不大于  $N-1$  的多项式函数, 其微分为  $\dot{p}$ .  $p$  与  $\dot{p}$  沿 LGL 点的函数值表示为  $p_i = p(\tau_i^L), \dot{p}_i = \dot{p}(\tau_i^L)$ . 定义列向量  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]^T \in \mathbf{R}^N, \dot{\mathbf{p}} = [\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_N]^T \in \mathbf{R}^N$ . 由 Legendre 伪谱法得知  $D^L \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$ , 也可以写成  $D_{:,1}^L p_1 + D_{:,2:N}^L p_{2:N} = \dot{\mathbf{p}}$ , 由引理 2 可知

$$D_{:,2:N}^L (p_{2:N} - p_1 \mathbf{1}_{N-1}) = \dot{\mathbf{p}}. \quad (38)$$

又因为  $\dot{p}$  的次数不大于  $N-2$ , 则  $\dot{p} = \sum_{k=1}^N \dot{p}_k L_k^L(\tau)$ , 两边求定积分, 得

$$p_{2:N} - p_1 = A^L \dot{\mathbf{p}}. \quad (39)$$

将式 (38) 两边左乘  $A^L$ , 代入式 (39), 得

$$A^L D_{:,2:N}^L (p_{2:N} - p_1) = p_{2:N} - p_1. \quad (40)$$

因为  $\mathbf{p}$  为任意的列向量, 由式 (40) 得到  $A^L D_{:,2:N}^L =$

$I_{N-1}$ .  $\square$

**定理 4** 式 (34) 是 (8) 的充分而非必要条件, 说明了 Legendre 伪谱法的积分形式与微分形式是不等价的.

**证明** 充分条件. 因为  $-D_{:,2:N}^L \mathbf{1}_{N-1} = D_{:,1}^L$ , 式 (34) 等于

$$-D_{:,2:N}^L \mathbf{1}_{N-1} \mathbf{X}_1^L + D_{:,2:N}^L \mathbf{X}_{2:N}^L = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{F}^L. \quad (41)$$

对式 (41) 左乘  $A^L$ , 由定理 3 的结论得

$$\mathbf{X}_{2:N}^L - \mathbf{1}_{N-1} \mathbf{X}_1^L = \frac{t_f - t_0}{2} A^L \mathbf{F}^L. \quad (42)$$

式 (42) 等价于 (8), 充分条件得证.

非必要条件. 将式 (8) 写成矩阵形式等于式 (42), 对式 (42) 两边左乘  $D_{:,2:N}^L$ , 得

$$D_{:,2:N}^L \mathbf{X}_{2:N}^L - D_{:,2:N}^L \mathbf{1}_{N-1} \mathbf{X}_1^L = \frac{t_f - t_0}{2} D_{:,2:N}^L A^L \mathbf{F}^L. \quad (43)$$

由引理 2 可知, 式 (43) 等于

$$D^L \mathbf{X}^L = \frac{t_f - t_0}{2} D_{:,2:N}^L A^L \mathbf{F}^L. \quad (44)$$

因为  $A^L$  为一个  $(N-1) \times N$  的矩阵, 非方阵, 无法保证  $D_{:,2:N}^L A^L$  为单位矩阵, 因此式 (44) 不等于 (34), 故式 (34) 是 (8) 的非必要条件. 结合充分条件和非必要条件的证明, 则定理 4 得证.  $\square$

观察 Legendre 伪谱法动态约束条件积分与微分离散形式的约束数量, 发现微分形式包含  $N$  个等式约束, 而积分形式只包含了  $N-1$  个等式约束. 因此, Legendre 伪谱法的微分形式约束条件要严格于积分形式, 也说明了微分与积分形式并不等价, 这也是 Legendre 伪谱法计算精度低于 Gauss 和 Radau 伪谱法的原因之一.

#### 4 积分形式与微分形式伪谱法的仿真对比

本文选用 Hypersensitive 最优控制问题<sup>[10]</sup>作为仿真算例, 具体描述如下.

目标函数为

$$\min J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (45)$$

其中  $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ , 且  $x(t_0) = 1.5, x(t_f) = 1$ .

在 Hypersensitive 最优控制问题中,  $t_0 = 0, t_f = \text{const}$ , 其解析解为

$$x^*(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t},$$

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + x^*(t).$$

其中

$$c_1 = \frac{1.5e^{-\sqrt{2}t_f} - 1}{e^{-\sqrt{2}t_f} - e^{\sqrt{2}t_f}},$$

$$c_2 = \frac{1 - 1.5e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{-\sqrt{2}t_f} - e^{\sqrt{2}t_f}}.$$

设定 Hypersensitive 最优控制问题的结束时间  $t_f = 100$ . 本文在此只给出了 Gauss 伪谱法的计算结

果. 图 1 描述了积分形式与微分形式伪谱最优控制方法的绝对计算误差随时间的变化关系, 其中配点数  $N = 50$ . 比较发现, 积分形式伪谱最优方法的计算误差要小于微分形式, 计算结果更接近于真实值.

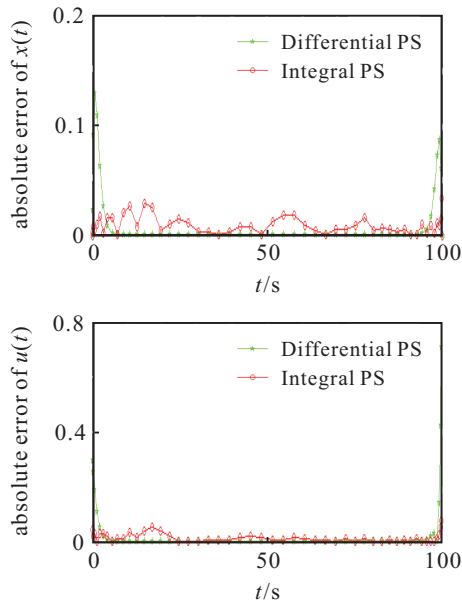


图 1 积分形式与微分形式的绝对计算误差

表 1 给出了 Gauss 伪谱法在不同数目配置点下的最大绝对值计算误差, 无论配置点等于多少, 积分形式的最大绝对值计算误差都小于微分形式. 由此可知, 积分形式伪谱法的计算精度要高于微分形式.

表 1 Gauss 伪谱法的最大绝对值计算误差

配点数	积分形式	微分形式
10	0.083	0.133
15	0.037	0.118
20	0.005	0.098
25	0.008	0.122
30	0.009	0.129
35	0.011	0.123
40	0.017	0.120
45	0.017	0.128
50	0.033	0.129

## 5 结 论

本文给出了 3 种伪谱法的积分离散形式, 证明了当 Lagrange 多项式对状态变量的近似误差等于零时, Gauss 伪谱法、Radau 伪谱法的积分形式与微分形式是等价的; 指出了 Legendre 伪谱法的积分形式与微分形式是不等价的, 并分析了 Legendre 伪谱法中不等价的原因; 选择 Hypersensitive 最优控制问题作为仿真算例, 验证了积分形式伪谱法的计算误差小于微分形式.

## 参考文献(References)

- [1] Elnagar G N, Kazemi M A, Razzaghi M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(10): 1793-1796.
- [2] Benson D. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. Boston: Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [3] Sun Yong, Hou Ming-Zhe, Duan Guang-Ren, et al. On-line optimal autonomous reentry guidance based on improved Gauss pseudospectral method[J]. Science China Information Sciences, 2014, 57(5): 1-16.
- [4] Garg Divya, Patterson Michael A, Darby Christopher L, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation of general optimal control problems using a Radau pseudospectral method[C]. Proc of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf and Exhibit. Chicago: 2009: 5989-6017.
- [5] Garg Divya, Patterson Michael A, Darby Christopher L, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems using a Radau pseudospectral method[J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 49(2): 335-358.
- [6] Rao Anil V, Patterson Michael A, Hager William W. Variable-order mesh refinement for solving optimal control problems using an integral Legendre-Gauss-Radau collocation method[J]. 2014.
- [7] Garg Divya. Advances in global pseudospectral methods for optimal control[D]. Gainesville: Mechanical Engineering, University of Florida, 2011.
- [8] Garg Divya, Patterson Michael, Hager William W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1843-1851.
- [9] Mirsky Leonid. An introduction to linear algebra[M]. Mew York: Dover Publications, 2012.
- [10] Rao Anil V, Mease Kenneth D. Eigenvector approximate dichotomic basis method for solving hypersensitive optimal control problems[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2000, 21(1): 1-19.

(责任编辑: 齐 霖)