

基于预测控制的时滞多机器人编队脉冲控制

张国良, 杜柏阳, 孙一杰, 徐 君, 汤文俊

(解放军第二炮兵工程大学 301教研室, 西安 710025)

摘要: 针对多机器人编队控制的时滞问题, 提出一种基于预测控制的脉冲控制方法. 首先, 利用一致性思想将多机器人编队控制转换为系统稳定性问题; 然后构建预测模型, 采用脉冲控制协议, 利用 Schur 稳定性定理推导实现多机器人编队控制的充分条件; 最后, 在数值仿真中随机设置一种包含生成树的通信拓扑关系, 并比较了不同采样时间间隔下时滞系统的控制效果. 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

关键词: 编队控制; 多机器人系统; 时滞; 脉冲控制; 预测控制

中图分类号: TP242

文献标志码: A

Impulsive control for multi-robot formation with communication delay based on predictive control

ZHANG Guo-liang, DU Bo-yang, SUN Yi-jie, XU Jun, TANG Wen-jun

(Teaching and Research Section 301, Hi-Tech Institution of Xi'an, Xi'an 710025, China. Correspondent: ZHANG Guo-liang, E-mail: zhgl@sohu.com)

Abstract: Concerning the communication delay of multi-robot formation control, an impulsive control algorithm based on predictive control is proposed. The formation control is transformed into the stability problem by using consensusability. The predictive model is established. And then the sufficient condition of stability in the multi-robot formation control is obtained by utilizing the stability theorem of Schur (the Lyapunov stability theorem in discrete time) and the impulsive protocol. In the simulation, the communication topology with a spinning tree is set up randomly, and different sample periods with time delay in multi-robot formation control is compared. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: formation control; multi-robot system; time delay; impulsive control; predictive control

0 引 言

编队控制问题在多机器人协同控制的研究中占有重要的地位. 在诸如多机械臂协同装配、无人机编队、卫星编队、集群航天器深空探测中得到了广泛研究^[1-4]. 在实际应用中, 时滞问题广泛存在于多机器人系统编队控制中^[5-6].

文献[7]开展了基于图论的一致性研究, 为在一致性基础上研究多机器人系统编队控制奠定了理论基础; 文献[8]拓展了一致性的研究, 提出了生成树理论; 文献[9]将其推广到多智能体的编队控制中; 文献[10]针对网络智能体的时滞问题, 探讨了输出一致性的条件; 文献[11]进一步分析了弱通信条件下的分布式编队控制稳定性; 文献[12]直接讨论了上述情况稳定的阈值范围; 文献[13]针对一阶和二阶的离散时滞问题, 给出了基于模型预测控制策略解决方案; 文

献[14]探讨了脉冲控制的二阶一致性的可行性; 而文献[15]采用矩形脉冲控制协议解决了弱通信条件下复杂的一致性问题的. 脉冲控制方法能够有效降低信息冗余^[16]、提高鲁棒性能^[17], 从而降低控制器对机器人系统的通信要求. 但在实际中, 通信时滞往往和较低的通信条件并存, 并且预测控制可以补偿通信时滞, 脉冲控制可以降低通信的通信条件. 关于将这两种方法相结合解决时滞条件下的编队控制问题的研究还比较少.

本文针对连续时间时滞多机器人编队控制系统, 采用有向图通信拓扑的方式, 给出基于预测控制策略的脉冲控制协议. 通过矩阵分析和 Schur 稳定性理论分析, 得到该系统在 Lyapunov 意义下的稳定充分条件, 并针对采样时间间隔上界进行讨论. 最后通过数值仿真验证了所提出控制方法的有效性.

收稿日期: 2015-05-05; 修回日期: 2015-07-16.

作者简介: 张国良(1970—), 男, 教授, 博士生导师, 从事先进控制理论与应用和机器人等研究; 杜柏阳(1990—), 男, 硕士生, 从事多机器人编队控制的研究.

1 基本知识介绍

有向图 $G(V, E, A)$ 是由顶点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 边集合 $E \subseteq V \times V$ 和邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n} (a_{ij} \geq 0)$ 共同表达的. $e_{ij} \in E$ 表示图 G 中顶点 i 到 j 的有向边, 信息从 i 流向 j , 即为 $a_{ji} > 0$. 信息流向节点 j 的节点集合为邻接集 $N_j = \{i \in V : e_{ij} \in E\}$. 当邻接矩阵 $a_{ji} = a_{ij}$ 时, 图为无向图, 如果此时不存在孤立节点, 则该无向图是连通的^[18]. 一个有向图包含有向生成树, 那么在该图中, 至少存在一个顶点能够通过有向路径到达任意其他顶点.

根据附加权重的有向图邻接矩阵的定义, 表达一个图采用的是 Laplacian 矩阵 L , 即

$$L = [l_{ij}] \in R^{n \times n},$$

$$l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} \ \& \ l_{ij} = -a_{ij} (i \neq j).$$

其中: n 表示图中顶点的数目, $R^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 的实数矩阵集合. 由推导易知, 矩阵 L 满足如下条件:

$$\begin{cases} l_{ij} \leq 0, \\ \sum_{j=1}^n l_{ij} = 0; \end{cases}$$

$$i \neq j, i = [1, n] \cap N^*. \quad (1)$$

引理 1 二阶多项式 $Q(z) = z^2 + (m + in)z + p + iq$ 是 Hurwitz 稳定的充要条件是 $Q(z)$ 中的系数满足如下条件^[19]:

$$\begin{cases} 0 < m, \\ 0 < mnq + m^2p - q^2. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $m, n, p, q \in R$.

2 问题描述

考虑二阶连续时间的多机器人编队系统, 其通信拓扑固定并且包含生成树. 通常采用如下方式描述编队系统稳定.

定义 1 N 个机器人相对编队中心位置的期望位置为 p_1, p_2, \dots, p_N , 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x^*(t) - p\| + \|v^*(t)\|) = 0,$$

则系统可以实现编队控制, 其中 $p = [p_1^T, p_2^T, \dots, p_N^T]$ 为状态变量的维数.

2.1 问题转化

根据定义 1, 由状态和输入表达, 通过建立表征状态信息的变量, 将多机器人的编队问题转换成系统稳定性问题. 令

$$\begin{cases} x(t) = x^*(t) - p, \\ v(t) = v^*(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x^*(t), v^*(t)$ 为编队系统所在位置和速度状态信

息, 表示期望队形的相对位置. 如果表征状态的信息能够实现收敛到零, 则等价于多机器人系统能够实现编队控制.

由此, 编队系统的状态更新方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} v_i(t^+) = v_i(t) + \Delta v_i(t). \end{cases} \quad (4b)$$

其中: $x_i(t), v_i(t)$ 表示第 i 个机器人在 t 时刻的状态信息; $\Delta v_i(t)$ 为 t 时刻所在区间的脉冲控制量的积分,

$$\Delta v_i(t) = \int_{nT}^{(n+1)T} u_i(t) dt, \ t \in [nT, (n+1)T),$$

表示在 t 时刻对第 i 个机器人的速度量的脉冲控制增益, 这里 n 表示时间区间的序列. 为了表述方便, 采用 $\Delta v_i(t)$ 表示输入量, 式 (4a) 表示位置更新关系, 式 (4b) 表示在 t 时刻瞬间的速度更新关系.

2.2 预测控制模型

根据式 (4) 和脉冲控制的特点, 在预测控制模型中采用迭代的方式来模拟系统的状态更新, 由此可以在控制器上利用 $k - \tau$ 时刻的状态预测估计当前时刻的状态. 考虑预测方式补偿固定时滞, 建立实时变化的预测模型, 预测方程包含两个部分.

一步预测更新方程为

$$\begin{cases} \hat{x}(k - \tau + 1 | k - \tau) = \\ \hat{x}(k - \tau | k - \tau - 1) + T\hat{v}(k - \tau | k - \tau - 1) + \\ G_{xx}[\hat{x}(k - \tau | k - \tau - 1) - x(k - \tau)] + \\ G_{xv}[\hat{v}(k - \tau | k - \tau - 1) - v(k - \tau)], \\ \hat{v}(k - \tau + 1 | k - \tau) = \\ \hat{v}(k - \tau | k - \tau - 1) + \Delta v(k - \tau) + \\ G_{vx}[\hat{x}(k - \tau | k - \tau - 1) - x(k - \tau)] + \\ G_{vv}[\hat{v}(k - \tau | k - \tau - 1) - v(k - \tau)]. \end{cases} \quad (5)$$

通过观测时滞状态的信息, 利用 $k - \tau$ 时刻的真实状态 $x(k - \tau)$ 和 $v(k - \tau)$ 与上一次预测中得到的一步预测值 $\hat{x}(k - \tau | k - \tau - 1)$ 和 $\hat{v}(k - \tau | k - \tau - 1)$ 构成新息, 在观测矩阵 G_{xx}, G_{xv}, G_{vv} 和 G_{vx} 的调节下引入方程中, 结合时刻的真实输入, 推导出一步预测值. 观测矩阵的具体构造方法在后面小节给出.

多步迭代更新方程

$$\begin{cases} \hat{x}(k - \tau + d + 1 | k - \tau) = \\ \hat{x}(k - \tau + d | k - \tau) + T\hat{v}(k - \tau + d | k - \tau), \\ \hat{v}(k - \tau + d + 1 | k - \tau) = \\ \hat{v}(k - \tau + d | k - \tau) + \Delta v(k - \tau + d), \\ d \in [1, \tau] \cap N^*. \end{cases} \quad (6)$$

利用一步预测更新方程的结果, 结合 $k - \tau + d$ 时刻的输入 $u(k - \tau + d)$, 通过连续迭代求出 $d \in [1, \tau - 1] \cap N^*$ 时 $k - \tau$ 对 $k - \tau + d$ 时刻的预测值 $\hat{x}(k - \tau + d | k - \tau)$ 和 $\hat{v}(k - \tau + d | k - \tau)$, 最终可

以获得 $k - \tau$ 对当前时刻的预测值 $\hat{x}(k - \tau + d|k - \tau)$ 和 $\hat{v}(k - \tau + d|k - \tau)$. 其中: 时滞时间 $\tau \in N^*$, $\tau = \text{const}$; 当 $d \in [1, \tau - 1] \cap N^*$ 时, $k - \tau$ 对 $k - \tau + d$ 时刻的预测值 $\hat{x}(k - \tau + d|k - \tau)$ 和 $\hat{v}(k - \tau + d|k - \tau)$ 与真实系统中的位置和速度状态向量的维数是一致的, 其初始值由有界函数 $\varphi_x(k)$ 和 $\varphi_v(k)$ 确定, $k \in [0, \tau]$; T 为采样周期, 与式 (1) 相同.

2.3 脉冲控制协议

结合时滞信息, 给出如下脉冲控制协议:

$$\Delta v(t) = \begin{cases} 0, & t \in (t_k, t_{k+1}]; \\ H_x \Delta \hat{x}(k|k - \tau) + H_v \Delta \hat{v}(k|k - \tau), & k = nl; \\ H_v \Delta \hat{v}(k|k - \tau), & k \neq nl. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $n = 1, 2, 3$; $\Delta v(t)$ 为 t 时刻的速度控制增益, 维数与状态向量相同, 矩阵 H_x 和 H_v 需要根据实际情况具体设计; l 为控制协议的变换时间间隔, 只有在特定的时间点存在输入时, 在特定的时间点中的特定时刻才需要采样位置和速度两种状态信息. $\Delta \hat{x}(k|k - \tau)$ 和 $\Delta \hat{v}(k|k - \tau)$ 表示邻接集中机器人间状态信息的差异值, $\hat{x}(k|k - \tau)$ 和 $\hat{v}(k|k - \tau)$ 是预测模型中在时刻 $k - \tau$ 对 k 的估计, L 为 Laplacian 矩阵. $\Delta \hat{x}(k|k - \tau)$ 和 $\Delta \hat{v}(k|k - \tau)$ 由 $\Delta \hat{x}_i(k|k - \tau)$ 和 $\Delta \hat{v}_i(k|k - \tau)$ 构成, $i \in [1, N] \cap N^*$, 且有

$$\Delta \hat{x}_i(k|k - \tau) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{x}_j(k|k - \tau) - \hat{x}_i(k|k - \tau)), \quad (8)$$

$$\Delta \hat{v}_i(k|k - \tau) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{v}_j(k|k - \tau) - \hat{v}_i(k|k - \tau)). \quad (9)$$

定义 2 根据协议 (7), 且在固定通信拓扑的条件下, 系统 (4) 实现编队控制的条件为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|e_x(k)\| + \|e_v(k)\|) = 0 \quad (10)$$

和定义 1 中的条件. 其中预测误差 $e(k)$ 表示 k 时刻下位置状态信息与速度状态信息的预测估计同真实值之间的误差, 具体的表达式为

$$\begin{aligned} e_x(k) &= \hat{x}(k|k - 1) - x(k), \\ e_v(k) &= \hat{v}(k|k - 1) - v(k). \end{aligned}$$

由此容易推得, 在协议 (7) 下, 定义 2 与定义 1 的条件等价.

3 一致性分析

定理 1 对于协议 (7) 下的固定时滞 τ 的二阶系统而言, 在固定通信拓扑的条件下, 如果存在矩阵 H_x 、 H_v 、 Ψ_1 、 Ψ_2 和 Ω_G 满足以下条件, 则该系统具

有一致性:

$$\begin{aligned} & 1) \\ \Psi_1 &= \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes I_n + RH_x T(L_2 \otimes I_n) & \rightarrow \\ & RH_x(L_2 \otimes I_n) \\ & \leftarrow (I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n)) \\ & I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix}, \\ \Psi_2 &= \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes I_n & T(I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n)) \\ 0 & I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为 Schur 矩阵;

2) Ω_G 为 Schur 矩阵、预测模型中引入观测状态信息的系数矩阵, 并且为矩阵 G_{xx} 、 G_{xv} 、 G_{vv} 和 G_{vx} 的综合; 且有

$$R = [\mathbf{1}_{N-1} \quad -I_{N-1}] \otimes I_n, \quad L_2 = L[\mathbf{0} \quad I_{N-1}]^T,$$

L 为连通图的 Laplacian 矩阵.

证明 令 $\delta_x(k) = Rx(k)$, $\delta_v(k) = Rv(k)$, 其中

$$R = [\mathbf{1}_{N-1} \quad -I_{N-1}] \otimes I_n.$$

根据协议 (7), 结合预测模型 (6), 可得

$$\Delta v(t) = \begin{cases} 0, & t \in (t_k, t_{k+1}]; \\ H_x \Delta \hat{x}(k|k - \tau) + H_v \Delta \hat{v}(k|k - \tau), & k = nl; \\ H_v \Delta \hat{v}(k|k - \tau), & k \neq nl. \end{cases} \quad (11)$$

其中: $n = 1, 2, 3$; $L_2 = L[\mathbf{0} \quad I_{N-1}]^T$. 又由定义 2 中预测误差的定义可得

$$\begin{aligned} e_x(k - \tau + 1) &= (I_N + G_{xx})e_x(k - \tau) + (TI_N + G_{xv})e_v(k - \tau), \quad (12) \\ e_v(k - \tau + 1) &= G_{vx}e_x(k - \tau) + I_N + G_{vv})e_v(k - \tau). \quad (13) \end{aligned}$$

再将式 (11) 代入协议 (7) 中, 可得以下两种情况:

1) 当 $l = nk$ 时, 有

$$\begin{aligned} \Delta v(k) &= H_x[(L_2 \otimes I_n)\delta_v(k) - (L \otimes I_n)e_v(k - \tau + 1)] + \\ & H_x[(L_2 \otimes I_n)\delta_x(k) - (L \otimes I_n)e_x(k - \tau + 1) - \\ & (\tau - 1)T(L \otimes I_n)e_v(k - \tau + 1)], \quad k \in N^*. \quad (14) \end{aligned}$$

结合状态更新方程 (4) 和协议 (7), 可得

$$\delta_x(k + 1) = \delta_x(k) + T\delta_v(k + 1), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \delta_v(k + 1) &= RH_x(L_2 \otimes I_n)\delta_x(k) + \\ & (I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n))\delta_v(k) - \\ & RH_x(L \otimes I_n)e_x(k - \tau + 1) - \\ & (RH_x(\tau - 1)T(L \otimes I_n) + RH_v(L_2 \otimes I_n))e_v(k). \quad (16) \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon(k) = [\delta_x^T(k) \quad \delta_v^T(k) \quad e_x^T(k - \tau) \quad e_v^T(k - \tau + 1)]^T,$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & A_1 & B_1 \\ \mathbf{0} & & \Omega_G \end{bmatrix}, \quad A_1 = -RH_x(L_2 \otimes I_n),$$

$$B_1 = -RH_x(\tau - 1)T(L \otimes I_n) - RH_v(L \otimes I_n),$$

$\Psi_1 =$

$$\begin{bmatrix} I + RH_x T(L_2 \otimes I_n) & T(I + RH_v(L_2 \otimes I_n)) \\ RH_x(L_2 \otimes I_n) & I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_G = \begin{bmatrix} I_{n \times N} + G_{xx} & TI_{n \times N} + G_{xv} \\ G_{vx} & I_{n \times N} + G_{vv} \end{bmatrix}.$$

2) 当 $l \neq nk$ 时, 有

$$\delta_x(k+1) = \delta_x(k) + T\delta_v(k+1), \tag{17}$$

$$\delta_v(k+1) = (I_N \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n))\delta_v(k) - RH_v(L \otimes I_n)e_v(k - \tau + 1). \tag{18}$$

综上所述, 系统模型表达为

$$\varepsilon(k+1) = \Omega_2 \varepsilon(k). \tag{19}$$

其中

$$\varepsilon(k) = [\delta_x^T(k) \quad \delta_v^T(k) \quad e_x^T(k - \tau) \quad e_v^T(k - \tau + 1)]^T,$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \Psi_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & B_2 \\ \mathbf{0} & & \Omega_G \end{bmatrix}, \quad B_2 = -RH_v(L \otimes I_n),$$

$\Psi_2 =$

$$\begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes I_n & T(I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n)) \\ \mathbf{0} & I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_G = \begin{bmatrix} I_{n \times N} + G_{xx} & TI_{n \times N} + G_{xv} \\ G_{vx} & I_{n \times N} + G_{vv} \end{bmatrix}.$$

由上述分析可知, 对于连续的一段脉冲控制而言, 状态转移关系可以表达为

$$\varepsilon(k+l) = \Omega_1 \Omega_2^{l-1} \varepsilon(k). \tag{20}$$

其中: l 为脉冲控制协议变换时间间隔, $\varepsilon(k)$ 的定义同式(19).

采用归纳法, 可求出

$$\Omega_2^{l-1} = \begin{bmatrix} & \Psi_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{j=l-3} \Omega_G^j + \\ \Psi_2^{l-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \Omega_G^{l-2} \\ \mathbf{0} & \Omega_G^{l-1} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

由此可得

$$\Omega_1 \Omega_2^{l-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & A_1 & B_1 \\ \mathbf{0} & & \Omega_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{j=l-3} \Omega_G^j + \\ \Psi_2^{l-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \Omega_G^{l-2} \\ \mathbf{0} & \Omega_G^{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \Psi_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{j=l-3} \Omega_G^j + \\ \Psi_1 \Psi_2^{l-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \Omega_G^{l-2} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_1 & B_1 \end{bmatrix} \Omega_G^{l-1} \\ \mathbf{0} & \Omega_G^l \end{bmatrix}. \tag{22}$$

在定理 1 中的条件 1) 和条件 2) 的基础上, 选取合适的 \hat{H} , 又由 Schur 补定理可知, $\Omega_1 \Omega_2^{l-1}$ 为 Schur 矩阵, 从而实现系统的 Schur 稳定.

构造一个 Schur 矩阵 Ω_G , 采用 Matlab 求解离散黎卡提方程. 设 $Q = I_{2n}$, 结合式(4)可列出以下方程:

$$\begin{bmatrix} I_{N \times n} & TI_{N \times n} \\ \mathbf{0} & I_{N \times n} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} I_{N \times n} & TI_{N \times n} \\ \mathbf{0} & I_{N \times n} \end{bmatrix} - P + Q - \begin{bmatrix} I_{N \times n} & TI_{N \times n} \\ \mathbf{0} & I_{N \times n} \end{bmatrix}^T P (P + R)^{-1} P \begin{bmatrix} I_{N \times n} & TI_{N \times n} \\ \mathbf{0} & I_{N \times n} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

由此可得到正定矩阵 P , 并由下式求出 G_{xx} 、 G_{xv} 、 G_{vv} 和 G_{vx} :

$$\begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xv} \\ G_{vx} & G_{vv} \end{bmatrix} = (P + R)^{-1} P \begin{bmatrix} I_{N \times n} & TI_{N \times n} \\ \mathbf{0} & I_{N \times n} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

由此定理 1 得证. \square

定理 1 讨论了系统实现稳定的理论条件, 其中 Ω_G^l 可以通过设计 Ω_G 直接满足. 下面探讨 $\Psi_1 \Psi_2^{l-1}$ 成为 Schur 矩阵的充分条件.

定理 2 若系统满足以下条件:

- 1) H_x 和 H_v 为可对角化矩阵;
- 2) $T < \min_{\{\mu_1, \mu_2\}} \left[\frac{-a_1 b_1 b_2 - a_1^2 a_2}{a_1^2 + b_2^2} \right]$. 其中: μ_1 和 μ_2 分别为 $H_x RL_2$ 和 $H_v RL_2$ 的一个特征值;

$$a_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{2\mu_2}{\mu_1} \right), a_2 = \operatorname{Re} \left(\frac{2\mu_2[(1 + \mu_2)^l + 1]}{\mu_1[(1 + \mu_2)^l - 1]} \right),$$

$$b_1 = \operatorname{Im} \left(\frac{2\mu_2}{\mu_1} \right), b_2 = \operatorname{Im} \left(\frac{2\mu_2[(1 + \mu_2)^l + 1]}{\mu_1[(1 + \mu_2)^l - 1]} \right).$$

则 $\Psi_1 \Psi_2^{l-1}$ 为 Schur 矩阵.

证明 利用直积的性质, 简化 $\Psi_1 \Psi_2^{l-1}$ 矩阵, 即

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes I_n + RH_x T(L_2 \otimes I_n) & \\ & RH_x(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} T(I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n)) & \\ I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix} \leftarrow \\ & \begin{bmatrix} I_{N-1} + RH_x L_2 & T(I_{N-1} + RH_v L_2) \\ RH_x L_2 & I_{N-1} + RH_v L_2 \end{bmatrix} \otimes I_n = \\ & \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes I_n & T(I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n)) \\ 0 & I_{N-1} \otimes I_n + RH_v(L_2 \otimes I_n) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} I_{N-1} & T(I_{N-1} + RH_v L_2) \\ \mathbf{0} & I_{N-1} + RH_v L_2 \end{bmatrix} \otimes I_n. \end{aligned} \quad (25)$$

令

$$\Psi'_1 = \begin{bmatrix} I_{N-1} + RH_x L_2 & T(I_{N-1} + RH_v L_2) \\ RH_x L_2 & I_{N-1} + RH_v L_2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\Psi'_2 = \begin{bmatrix} I_{N-1} & T(I_{N-1} + RH_v L_2) \\ \mathbf{0} & I_{N-1} + RH_v L_2 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由此可知, $\Psi'_1 \Psi'_2^{l-1}$ 与 $\Psi_1 \Psi_2^{l-1}$ 的特征值性质等价. 由条件 1) 可知, RL_2 已知, 且为可对角化矩阵, 则 $RH_x L_2$ 和 $RH_v L_2$ 均存在 $N - 1$ 个特征值, 其中一个特征值分别用 μ_1 和 μ_2 表示. 通过令方阵的行列式等于零求特征值的范围, 并用 λ 表示特征值, 则有

$$\begin{aligned} & |\lambda I_{2N} - \Psi'_1 \Psi'_2^{l-1}| = \\ & \prod_{j=1}^{j \in N_i} \left\{ (\lambda - 1 - \mu_1 T) \cdot \right. \\ & \left. (\lambda - \mu_1 T \sum_{j=1}^{l-1} (1 + \mu_2)^j - (1 + \mu_2)^l) - \right. \\ & \left. \mu_1 \left[(1 + \mu_1 T) \sum_{j=1}^{l-1} (1 + \mu_2)^j + T(1 + \mu_2)^l \right] \right\} = \\ & \prod_{j=1}^{j \in N_i} \left\{ \lambda^2 + (1 + \mu_2)^l - \left[1 + \mu_1 T + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu_1 T \sum_{j=1}^{l-1} (1 + \mu_2)^j + (1 + \mu_2)^l \right] \lambda \right\} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

将其写为形如 $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ 的表达式, 其中

$$\alpha = - \left[1 + \mu_1 T + \mu_1 T \sum_{j=1}^{l-1} (1 + \mu_2)^j + (1 + \mu_2)^l \right],$$

$$\beta = (1 + \mu_2)^l.$$

通过双线性变换, 转换解域. 令

$$\lambda = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1},$$

可得

$$0 = (\sigma - 1)^2 \left[\left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right) + \beta \right] =$$

$$(1 + \alpha + \beta)\sigma^2 + (2 - 2\beta)\sigma + (1 - \alpha + \beta),$$

通过化简推导可得

$$(1 + \alpha + \beta)\sigma^2 + (2 - 2\beta)\sigma + (1 - \alpha + \beta) =$$

$$(1 + \alpha + \beta) \left[\sigma^2 + \frac{(2 - 2\beta)}{(1 + \alpha + \beta)}\sigma + \frac{(1 - \alpha + \beta)}{(1 + \alpha + \beta)} \right] =$$

$$\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} T [(1 + \mu_2)^l - 1] \right). \quad (29)$$

$$\left[\sigma^2 + \frac{2\mu_2}{\mu_1 T} \sigma - \frac{2\mu_2[(1 + \mu_2)^l + 1]}{\mu_1 T [(1 + \mu_2)^l - 1]} - 1 \right] = 0. \quad (30)$$

令

$$a_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{2\mu_2}{\mu_1} \right), a_2 = \operatorname{Re} \left(\frac{2\mu_2[(1 + \mu_2)^l + 1]}{\mu_1[(1 + \mu_2)^l - 1]} \right),$$

$$b_1 = \operatorname{Im} \left(\frac{2\mu_2}{\mu_1} \right), b_2 = \operatorname{Im} \left(\frac{2\mu_2[(1 + \mu_2)^l + 1]}{\mu_1[(1 + \mu_2)^l - 1]} \right).$$

由引理 1 可得

$$\begin{cases} 0 < \frac{a_1}{T}, \\ 0 < -\frac{a_1 b_1 b_2}{T^3} + \frac{a_1^2}{T^2} \left(-1 - \frac{a_2}{T} \right) - \frac{b_2^2}{T^2}, \end{cases} \quad (31)$$

故条件 2) 使式 (2) Hurwitz 稳定. 由此可知, $\Psi'_1 \Psi'_2^{l-1}$ 为 Schur 矩阵, 等价于 $\Psi_1 \Psi_2^{l-1}$ 是 Schur 矩阵. \square

另外, 前文讨论的时滞都是固定时滞 τ , 当 τ 随着时间变量 k 变化时便成为时变时滞 $\tau(k)$. 当 $\tau(k)$ 满足如下两个条件^[20]时: 1) $\exists \bar{\tau} \in N^*, 0 \leq \tau(k) \leq \bar{\tau}, \exists h, |\Delta\tau(k)| T \leq h \leq 1, \bar{\tau}$ 和 h 可知; 2) 考虑当 $k \in [0, \bar{\tau}]$ 时的时滞状态信息, 当 $k \in [-\bar{\tau}, 0]$ 时, $x_i(k) = \phi_{x_i}(k), v_i(k) = \phi_{v_i}(k), \phi_{x_i}(k)$ 和 $\phi_{v_i}(k)$ 均为有界的函数. 可舍弃时滞上界内的状态信息, 此时这种时变时滞的情形可通过时滞上界作为固定时滞解决.

4 算例仿真

下面首先确定系统的基本模型的参数, 然后确定预测模型的参数, 最后通过 Matlab 仿真编程实现.

4.1 初始化参数

设置一个由 6 个机器人 R_i 组成的系统, $x_i = [x_{ix}, x_{iy}]^T$ 表示位置信息, $v_i = [v_{ix}, v_{iy}]^T$ 表示速度信息. 其中: x_{ix}, x_{iy} 分别表示机器人 R_i 在全局坐标系下 x 方向的位移、 y 方向的位移; v_{ix}, v_{iy} 分别表示机器人在全局坐标系下 x 方向的速度、 y 方向的速度. 本文将机器人运动当做质点运动. 设置期望的编队队

形为正六边形, 初始位置、初始速度随机设置. 仿真参数如表 1 所示. 编队系统的几何队形和通信拓扑如图 1 所示.

表 1 仿真参数

编号 i	期望相对位置 p_i	初始位置 $x_i(0)$	初始速度 $v_i(0)$
1	$[2, 0, 0]^T$	$[2, 1, 0]^T$	$[-0.1, 0, 0]^T$
2	$[1, \sqrt{3}, 0]^T$	$[-0.2, 0.6, 0]^T$	$[0.1, 0, 0]^T$
3	$[-1, \sqrt{3}, 0]^T$	$[-4.2, 2.6, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$
4	$[-2, 0, 0]^T$	$[-6, 0, 0]^T$	$[0, 0.2, 0]^T$
5	$[-1, -\sqrt{3}, 0]^T$	$[-1, 4, 0]^T$	$[0.1, 0, 0]^T$
6	$[1, -\sqrt{3}, 0]^T$	$[-2, -6, 0]^T$	$[0, -0.1, 0]^T$

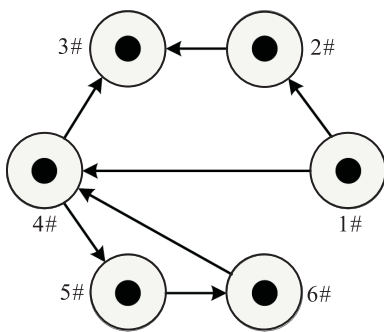


图 1 机器人队形和通信拓扑

相应地, 编队系统的 Laplacian 矩阵

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

并且设固定时滞 $\tau = 5$, 状态采样周期 $T = 0.25$.

根据定理 2, 选取合适的协议配置矩阵, H_x 和 H_v 可对角化, 即

$$H_x = \begin{bmatrix} 0.1936 & 0.0067 & 0.0165 \\ 0.0067 & 0.1918 & -0.0044 \\ 0.0165 & -0.0044 & 0.01948 \\ -0.0166 & -0.0140 & -0.0047 \\ -0.0252 & -0.0195 & -0.0133 \\ -0.0320 & -0.0190 & -0.0037 \\ -0.0165 & -0.0252 & -0.0320 \\ -0.0140 & -0.0195 & -0.0190 \\ -0.0047 & -0.0133 & -0.0037 \\ 0.1654 & -0.0335 & -0.0011 \\ -0.0335 & 0.2014 & -0.0326 \\ -0.0011 & -0.0326 & 0.1930 \end{bmatrix} \otimes I_n,$$

$$H_v = \begin{bmatrix} 0.4452 & -0.0015 & -0.0034 \\ -0.0015 & 0.4437 & 0.0034 \\ -0.0034 & 0.0034 & 0.4441 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.0002 \\ 0.0016 & 0.0022 & 0.0010 \\ 0.0029 & 0.0022 & 0.0003 \\ 0.0008 & 0.0016 & 0.0029 \\ 0.0001 & 0.0022 & 0.0022 \\ 0.0002 & 0.0010 & 0.0003 \\ 0.4488 & 0.0023 & -0.0022 \\ 0.0023 & 0.4430 & 0.0027 \\ -0.0022 & 0.0027 & 0.4453 \end{bmatrix} \otimes I_n,$$

结合定理 1 中的条件 2), 通过计算可得采样上界 $T < 1.0475$ s.

4.2 算例分析

例 1 如图 2 和图 3 所示, 选取 $T = 1.00$ s, 可以验证 Ψ_1 的特征值的实部为

$$-0.9822, -0.5650, -0.2766, 0.87824, 0.8782, 0.5620, 0.5620, 0.5286, 0.6368, 0.5920;$$

Ψ_2 的特征值为

$$1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 0.8294, 0.3818, -0.5987, -0.1501, -0.3361.$$

此时的采样间隔处在收敛的范围以内, 同时预测模型、控制协议也满足了系统收敛的条件, 从理论上多机器人系统能够实现编队控制. 仿真结果中, 各机器人由图例对应表示, 图 2 为机器人编队的运动轨迹, 初始位置随机设置, 经过一段时间运动, 形成了编队, 并且在随后的运动中保持编队形态. 图 3(a) 和图 3(b) 表达了机器人编队在不同方向上的位移变化, 图 3(c) 和图 3(d) 表达了机器人编队在不同方向上的速度变化, 未形成编队时速度变化剧烈, 形成后趋于一致、稳定.

例 2 如图 4 和图 5 所示, 选取 $T = 1.05$ s, 可以验证 Ψ_1 的特征值的实部为

$$-1.0063, -0.5809, -0.2865, 0.8765, 0.8765, 0.5558, 0.5558, 0.5092, 0.6219, 0.5764;$$

Ψ_2 的特征值为

$$1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 0.8294, 0.3818, -0.5987, -0.1501, -0.3361.$$

此时的采样间隔处在收敛范围以外, 尽管此时预测模型、控制协议同例 1, 也满足了系统收敛的条件, 但是从理论上多机器人系统不能够实现编队控制. 仿

真结果中, 各机器人由图例对应表示, 图 4 为机器人编队的运动轨迹, 既不能形成编队也不能维持编队。图 5(a) 和图 5(b) 表达了机器人编队在不同方向的位移变化, 图 5(c) 和图 5(d) 则表达了机器人编队在不同方向的速度变化, 呈现发散状态。

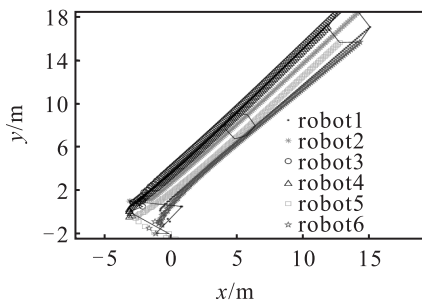
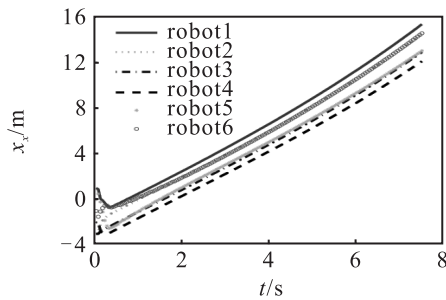
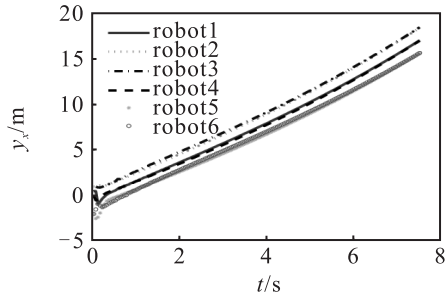


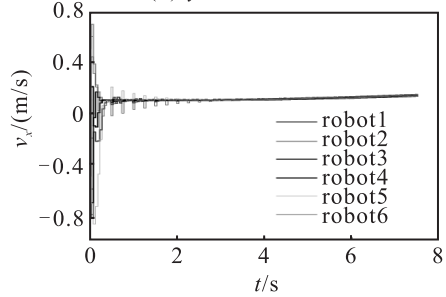
图 2 收敛情况下机器人编队系统的运动轨迹



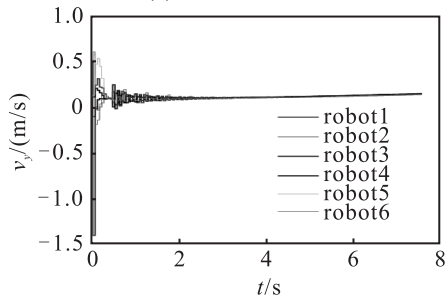
(a) x 方向的位置变化



(b) y 方向的位置变化



(c) x 方向的速度变化



(d) y 方向的速度变化

图 3 收敛情况下 x 方向和 y 方向的速度、位置变化

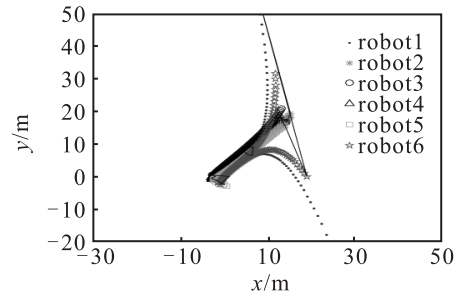
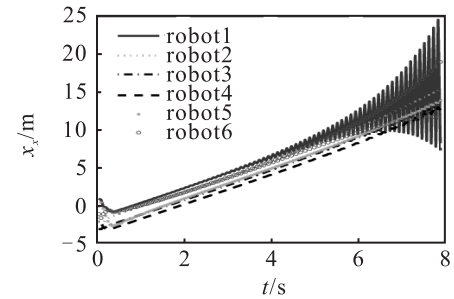
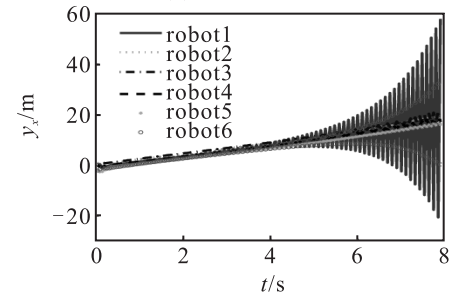


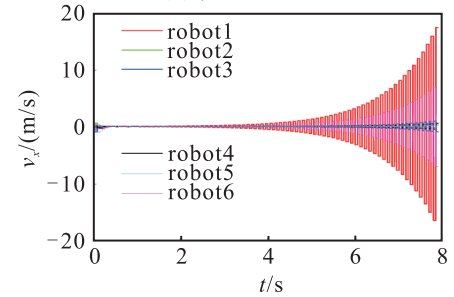
图 4 发散情况下机器人编队系统的运动轨迹



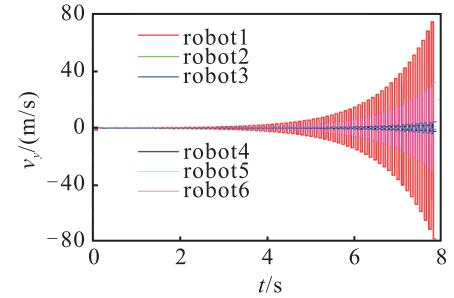
(a) x 方向的位置变化



(b) y 方向的位置变化



(c) x 方向的速度变化



(d) y 方向的速度变化

图 5 发散情况下 x 方向和 y 方向的速度、位置变化

5 结 论

本文针对连续时间时滞多机器人系统的编队控制问题, 从一致性角度出发, 将问题转化为系统的稳定性问题. 建立了预测控制模型, 分析了脉冲控制下系统实现稳定的条件, 讨论了采样时间间隔上界并加

以证明. 最后, 通过一组对比算例验证了所提出控制方法的有效性和正确性.

参考文献(References)

- [1] Li Z J, Li J X, Kang Y. Adaptive robust coordinated control of multiple mobile manipulators interacting with rigid environments[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2028-2034.
- [2] Abdessameud A, Tayebi A. Formation control of VTOL unmanned aerial vehicles with communication delays[J]. *Automatica*, 2011, 47(11): 2383-2394.
- [3] Beard R W, Lawton J, Hadaegh F Y. A coordination architecture for spacecraft formation control[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2001, 9(6): 777-790.
- [4] Smith R S, Hadaegh F Y. Control of deep-space formati on-flying spacecraft relative sensing and switched information[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 28(1): 106-114.
- [5] 闵海波, 刘源, 王仕成, 等. 多个体协调控制问题综述[J]. *自动化学报*, 2012, 38(10): 1557-1570.
(Min H B, Liu Y, Wang S C, et al. An overview on coordination control problem of multi-agent system[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2012, 38(10): 1557-1570.)
- [6] 王祥科, 李迅, 郑志强. 多智能体系统编队控制相关问题研究综述[J]. *控制与决策*, 2013, 28(11): 1601-1613.
(Wang X K, Li X, Zheng Z Q. Survey of developments on multi-agent formation control related problems[J]. *Control and Disicion*, 2013, 28(11): 1601-1613.)
- [7] Fax J A, Murray M R. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465-1477.
- [8] Ren W, Beard R. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [9] Ren W. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2007, 1(2): 505-512.
- [10] Tan C, Liu G P. Consensusability of discrete-time linear networked multi-agent systems[C]. *UKACC Int Conf on Control*. Cardiff, 2012: 1100-1105.
- [11] 杨波, 方华京. 具有通信约束的分布式水下航行器群编队控制[J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2009, 37(2): 57-60.
(Yang B, Fang H J. Distribution underwater vehicles formation control with limited communication[J]. *Huazhong University of Science and Technology: Natural Science*, 2009, 37(2): 57-60.)
- [12] 吴晋, 张国良, 曾静, 等. 多机器人编队离散模型及队形控制稳定性分析[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(3): 293-301.
(Wu J, Zhang G L, Zeng J, et al. Discrete-time modeling for multirobot formation and stability of formation control algorithm[J]. *Control Theory & Application*, 2014, 31(4): 293-301.)
- [13] Zhong Z Z, Sun L N, Wang J C, et al. Consensus for first- and second-order discrete-time multi-agent systems with delays based on model predictive control schemes[J]. *Circuits System Signal Process*, 2015, 34(1): 127-152.
- [14] Ding L, Yu P, Liu Z W, et al. Consensus of second-order multi-agent systems via impulsive control using sampled hetero-information[J]. *Automatic*, 2013, 49(7): 2881-2886.
- [15] Han G S, Guan Z H, Li J, et al. Multi-consensus of multi-agent networks via a rectangular impulsive approach[J]. *System & Control Letters*, 2015, 76(2): 28-34.
- [16] Zhou J, Xiang L, Liu Z R. Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive effects[J]. *Physics Letters A*, 2007, 384(2): 684-692.
- [17] Guan Z H, Hill D J, Shen X. On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control[J]. *IEEE Trans Automation Control*, 2005, 50(7): 1058-1062.
- [18] 孙一杰, 张国良, 张胜修, 等. 一类异构多智能体系统一致性协议的收敛性分析[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(11): 1524-1529.
(Sun Y J, Zhang G L, Zhang S X, et a. Convergence analysis for consensus protocol of heterogeneous multi-agent systems[J]. *Control Theory & Application*, 2014, 31(11): 1524-1529.)
- [19] Parks P C, Hahn V. *Stability theory*[M]. New York: Prentice Hall, 1993: 93-101.
- [20] Tan C, Liu G P. Consensus of discrete-time linear networked multi-agent systems with communication delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2013, 58(11): 2962-2968.

(责任编辑: 滕 蓉)