

考虑输入饱和的离散最优积分滑模控制

李 理, 刘 杨, 陈兴林

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 针对含有匹配有界干扰的线性离散系统, 提出一类最优积分滑模控制算法. 在系统开环极点位于单位圆内(上)的前提下, 考虑输入饱和, 可以实现系统状态的半全局稳定. 该算法是低增益反馈和积分滑模的有益结合, 通过低增益反馈使输入饱和得到满足, 通过滑模控制增强了系统对干扰的鲁棒性; 另外, 该算法可以使特定的性能指标达到最优, 使系统稳态误差达到 $O(T^2)$ 的量级. 仿真结果验证了所提出算法的有效性.

关键词: 离散系统; 最优积分滑模控制; 输入饱和

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Discrete-time optimal integral sliding mode control with input saturation

LI li, LIU Yang, CHEN Xing-lin

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: LIU Yang, E-mail: hitlg@hit.edu.cn)

Abstract: An optimal integral sliding mode control algorithm for linear discrete-time systems with matched bounded disturbances is proposed. Under the premise that poles of the open-loop system locate inside or on the unit circle, the scheme can semi-globally regulate the system in the presence of input saturation. The scheme is an effective combination of low-gain feedback and integral sliding mode, for it can satisfy the input limit via low-gain feedback and improve the robustness of the system to disturbances owing to sliding mode control. Moreover, the method can minimize the specific performance index and achieve $O(T^2)$ steady-state error. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: discrete-time system; optimal integral sliding mode control; input saturation

0 引 言

由于采样频率有限, 连续滑模控制算法不能直接应用到离散系统上, 否则会影响系统的控制性能甚至稳定性. 因此, 学者们对离散滑模控制进行了大量的研究^[1].

文献[2]首先提出了基于干扰估计器的离散滑模控制, 该方法使用一步延迟干扰估计器进行鲁棒控制分量的设计. 在此基础上, 文献[3]设计了一种离散积分滑模控制器, 提高了系统的调节精度; 文献[4]进一步考虑了系统含有非匹配干扰的情况; 文献[5-6]将最优控制与离散积分滑模控制相结合, 设计了离散最优积分滑模控制器, 使得特定的性能指标达到最优; 特别地, 文献[6]还考虑了输入时延的问题. 需要指出的是, 上述所有的离散滑模控制算法都没有考虑输入

饱和, 然而, 对于所有的执行机构而言, 输入饱和约束是一定存在的. 针对输入饱和问题, 低增益反馈是一类有效的控制算法, 其中基于代数黎卡提方程的低增益反馈控制在文献[7]中被首次提出, 它能够有效地满足输入饱和约束, 但是没有考虑外部干扰的影响.

在已有成果的基础上, 本文首先对基于代数黎卡提方程的离散低增益反馈控制进行回顾, 然后与离散积分滑模进行结合, 设计出一类能够满足输入饱和约束的离散最优积分滑模控制器.

1 模型与问题描述

考虑如下含有匹配干扰的线性连续系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + f(t)). \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 是连续系统状态, $A \in R^{n \times n}$ 和 $B \in R^{n \times m}$ 是已知的常数实矩阵, $u(t) \in R^m$ 是连续系统

收稿日期: 2015-05-05; 修回日期: 2015-10-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51405097); 国家科技重大专项基金项目(2009ZX02207).

作者简介: 李理(1990-), 男, 博士生, 从事离散滑模控制、超精密运动控制的研究; 陈兴林(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事超精密运动控制等研究.

的控制输入, $f(t) \in R^m$ 是连续系统的外界干扰.

如果采样周期为 T , 并且使用零阶保持器, 系统 (1) 的精确离散化形式如下所示:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + p(k). \quad (2)$$

其中: $x(k) \in R^n$ 是离散系统状态, $\Phi \in R^{n \times n}$ 和 $\Gamma \in R^{n \times m}$ 是已知的常数实矩阵, $u(k) \in R^m$ 是离散系统的控制输入, $p(k) \in R^m$ 是离散系统的外界干扰, 而

$$\begin{cases} \Phi = e^{AT}, \\ \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B, \end{cases} \quad (3)$$

$$p(k) = \int_0^T e^{A\tau} B f((k+1)T - \tau) d\tau. \quad (4)$$

由式 (3) 可知, Γ 在 $O(T)$ 量级上. 根据泰勒定理和式 (4), 还可以得到

$$p(k) = \Gamma f(k) + \Gamma \frac{1}{2} \dot{f}(k)T + O(T^3), \quad (5)$$

其中 $f(k) \in R^m$ 和 $\dot{f}(k) \in R^m$ 分别为向量 $f(t) \in R^m$ 和 $\dot{f}(t) \in R^m$ 的采样.

设 $d(k) = f(k) + \frac{1}{2} \dot{f}(k)T + O(T^2)$, 将离散系统 (2) 化成如下标准的含有匹配干扰的形式:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma(u(k) + d(k)). \quad (6)$$

当外部干扰随时间变化缓慢时, 关于 $d(k)$ 给出如下引理和假设.

引理 1 $d(k) - d(k-1) = O(T)$.

引理 2 $d(k) - 2d(k-1) + d(k-2) = O(T^2)$.

假设 1 $|d_i(k)| < u_{\max}$, $i = 1, 2, \dots, m$, u_{\max} 表示控制量能达到的最大幅值.

定义 1 半全局有界稳定, 对预先给定的任意大的有界区域 $W \subset R^n$, 在输入饱和和约束的条件下, 寻找 $u(k)$, 使得闭环系统的状态最终能够到达十分微小的有界区域 $\Delta \subset W$, Δ 是包含平衡点 $x = 0$ 的一个不变集, 并且 W 包含在该不变集的吸引域内.

假设 2 矩阵 Φ 特征值在单位圆内 (上).

假设 3 (Φ, Γ) 满足可控条件.

引理 3 $E(k+1) = \Xi E(k) + \mu$, 其中矩阵 Ξ 所有的特征值都在单位圆内 ($\|\Xi\| < 1$). 如果 μ 的幅值是在 $O(T^r)$ 的量级上, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $E(k)$ 的幅值在 $O(T^{r-1})$ 的量级上, r 是不小于 1 的正整数.

2 控制器设计

2.1 低增益反馈控制

在不考虑外部干扰的情况下, 系统 (6) 的标称模型如下所示:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k). \quad (7)$$

对于系统 (7), 选取二次型性能指标如下:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon x^T(k)x(k) + u^T(k)u(k)]. \quad (8)$$

状态反馈控制律如下:

$$u(k) = -Fx(k), \quad (9)$$

其中 $F = (\Gamma^T P(\varepsilon)\Gamma + I)^{-1} \Gamma^T P(\varepsilon)\Phi$.

引理 4 在假设 2 和假设 3 的条件下, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在唯一正定的矩阵 $P(\varepsilon) > 0$, 满足如下代数黎卡提方程:

$$P = \Phi^T P \Phi + \varepsilon I - \Phi^T P \Gamma (\Gamma^T P \Gamma + I)^{-1} \Gamma^T P \Phi, \quad (10)$$

并且使矩阵 $\Phi - \Gamma(\Gamma^T P(\varepsilon)\Gamma + I)^{-1} \Gamma^T P(\varepsilon)\Phi$ 的所有特征值都位于单位圆内, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\varepsilon) = 0. \quad (11)$$

引理 5 对于标称模型 (7) 和二次型性能指标 (8), 控制律 (9) 是最优的, 并且能够使系统指数稳定.

将控制律 (9) 代入系统 (7) 中, 有

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma F)x(k). \quad (12)$$

由引理 4 可知, 闭环系统 (12) 是渐近稳定的. 另外, 如果选取李雅普诺夫函数为

$$V(x(k)) = x^T(k)P(\varepsilon)x(k), \quad (13)$$

则经过文献 [7] 中详细的推导, 最终可得

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq -\varepsilon x^T(k)x(k). \quad (14)$$

可见, 闭环系统 (12) 是指数稳定的, $V(x(k))$ 将不断减小, 直至减为 0.

注 1 对预先给定的任意大的有界区域 W , 一定存在合适的 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意 $x(k) \in W$, 都有

$$|u_i(k)| \leq \|u(k)\|_2 \leq \bar{u}$$

成立. 因为

$$\begin{aligned} \|u(k)\|_2 &= \|(\Gamma^T P(\varepsilon)\Gamma + I)^{-1} \Gamma^T P(\varepsilon)\Phi x(k)\|_2 \leq \\ &\|\Gamma^T P(\varepsilon)\Phi\|_2 \|x(k)\|_2, \end{aligned} \quad (15)$$

根据式 (11), 可知上述说法是正确的.

综上, 总可以选取任意大的有界区域 W , 使之包含系统 (7) 的初始条件; 然后通过选取合适的 ε , 使注 1 成立; 由引理 5 可知, 系统指数稳定, 意味着在整个控制过程中, 注 1 会始终成立, 输入饱和约束能够始终得到满足.

2.2 基于低增益反馈的最优积分滑模控制

选取如下最优积分滑模面:

$$s(k) = Dx(k) + \varsigma(k), \quad (16)$$

$$\varsigma(k+1) - \varsigma(k) = Ex(k). \quad (17)$$

其中 $E = -D\Phi + D\Gamma F + D$, 并选取 $\varsigma(0) = -Dx(0)$.

由上述滑模面及系统方程 (6) 可得

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \\ &D\Gamma u(k) + D\Gamma d(k) + \varsigma(k) + Dx(k) + D\Gamma Fx(k). \end{aligned} \quad (18)$$

令 $s(k+1) = 0$, 系统的等效控制分量为

$$u_{eq}(k) = -Fx(k) - d(k) - (D\Gamma)^{-1}(\zeta(k) + Dx(k)). \quad (19)$$

若采用 $d(k-1)$ 作为 $d(k)$ 的估计, 即

$$\hat{d}(k) = (D\Gamma)^{-1}D(x(k) - \Phi x(k-1)) - (D\Gamma)^{-1}D(\Gamma u(k-1)), \quad (20)$$

离散最优积分滑模控制器为

$$u(k) = -Fx(k) - \hat{d}(k) - (D\Gamma)^{-1}(\zeta(k) + Dx(k)). \quad (21)$$

定理 1 对于离散系统 (6), 它在控制律 (21) 的作用下, 闭环动态方程为

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma F)x(k) + \delta_k. \quad (22)$$

其中: $\delta_k \in R^n$ 的幅值是在 $O(T^3)$ 的量级上, 并且 $x(k)$ 的幅值最终在 $O(T^2)$ 的量级上.

证明 将控制器 (21) 代入 (18) 中, 得

$$s(k+1) = D\Gamma(d(k) - d(k-1)) = O(T^2). \quad (23)$$

可见 $s(k)$ 的幅值在 $O(T^2)$ 的量级上.

再将控制器 (21) 代入系统 (6) 中, 得

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma F)x(k) + \Gamma(d(k) - d(k-1)) - (D\Gamma)^{-1}(\zeta(k) + Dx(k)). \quad (24)$$

若令

$$\delta_k = \Gamma(d(k) - d(k-1)) - (D\Gamma)^{-1}(\zeta(k) + Dx(k)), \quad (25)$$

则式 (24) 可以化作 (22).

将式 (16) 和 (23) 共同代入 (25) 中, 得

$$\delta_k = \Gamma(d(k) - 2d(k-1) + d(k-2)). \quad (26)$$

由引理 2 可知, δ_k 的幅值在 $O(T^3)$ 的量级上; 再由式 (22) 和引理 3 可知, $x(k)$ 的幅值最终在 $O(T^2)$ 的量级上. \square

注 2 控制律 (21) 可以改写为如下形式:

$$u(k) = -Fx(k) - \hat{d}(k) - (D\Gamma)^{-1}s(k). \quad (27)$$

由于 $s(0) = 0$, 有 $s(k) = O(T^2)$, $(D\Gamma)^{-1}s(k) = O(T)$, 且 $|\hat{d}_i(k)| = |d_i(k-1)|$ 有界. 另外, $x(k)$ 最终的界所围成的区域就是定义 1 描述的包含平衡点 $x = 0$ 的不变集 Δ , 当系统 (6) 的初始条件 (假设与系统 (7) 相同) 在 Δ 以外 W 以内时, 系统的状态最终会进入 Δ 中. 在这一过程中, 只要选取一个比第 2.1 节稍小一些的 ε , 输入饱和和约束就可以得到满足.

3 仿真结果分析

为了验证所提出设计算法的有效性, 使用文献 [3] 提出的离散积分滑模控制方法 (DISMC) 与本文设计的离散最优积分滑模控制方法 (DOISMC) 进行对比.

仿真所使用的连续时间系统的系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

外部干扰为

$$f(t) = 3 \sin(4\pi t).$$

系统的初始条件设置为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2.5$; 输入饱和约束设置为 $|u_i| \leq 8$; 连续系统的采样频率设置为 0.01 ms, 离散控制器的采样频率设置为 1 ms.

DOISMC 的参数选取如下: 根据系统的初始条件, 选取

$$W = \{x \in R^2 \mid |x_j| \leq 3, j = 1, 2\}.$$

利用 Matlab 工具, 如果选取 $\varepsilon = 2$, 则可计算得到

$$P = \begin{bmatrix} 2382.6 & 298.9 \\ 298.9 & 253.8 \end{bmatrix},$$

$$F = [0.895 \quad 0.7565].$$

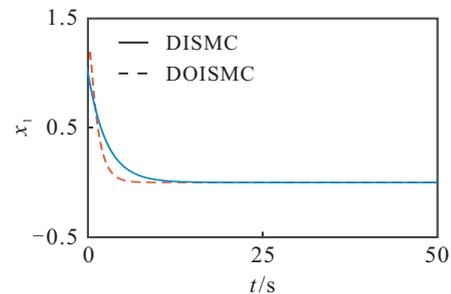
此时闭环系统的特征值为 $\lambda_1 = 0.9991, \lambda_2 = 0.9946$. 且经经验可证, $\sqrt{18}\|F\|_2 \leq 4.9721 < 5$; 选取 $D = 10^7 \times \Gamma^T$, 经计算可得

$$E = [139.9911 \quad 187.3522].$$

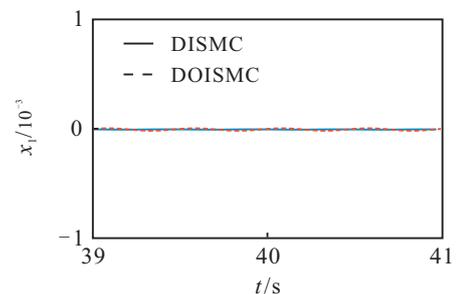
作为对比, DISMC 的参数选取如下: 任取 $F = [25 \quad 67]$ 作为反馈矩阵, 闭环系统特征值为 $\lambda_1 = 0.9996, \lambda_2 = 0.7957$; D 与前文相同, 经计算可得

$$E = [2300.8 \quad 6125.4].$$

在 DISMC 和 DOISMC 的作用下, 系统状态 x_1 的响应曲线如图 1 所示, 控制输入的响应曲线如图 2 所示, 二次型性能指标的响应曲线如图 3 所示. 其中, x_2 的响应曲线与 x_1 的类似, 故略去.

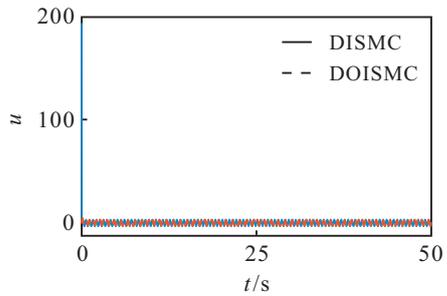


(a) x_1 的响应曲线

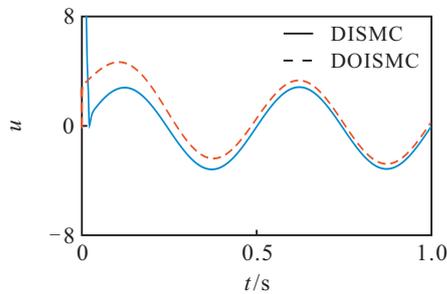


(b) x_1 的响应曲线局部放大

图 1 DISMC 和 DOISMC 作用下 x_1 的响应曲线



(a) 控制输入响应曲线



(b) 控制输入响应曲线局部放大

图2 DISMC和DOISM作用下控制输入响应曲线

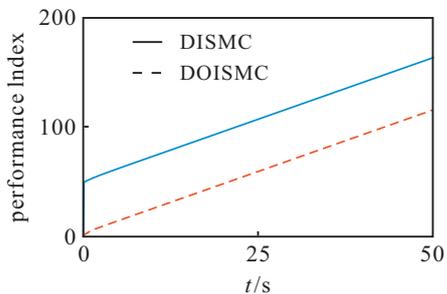


图3 DISMC和DOISM作用下的二次型性能指标比较

从仿真结果可以清楚地看到,在两种控制器的作用下,系统的稳态误差相差无几,但DISMC的控制量的最大值远大于8,消耗的能量也更多,DOISM能够严格满足输入饱和的要求。

4 结 论

通过理论分析和仿真验证可知,本文设计的基于低增益反馈的离散最优积分滑模控制方法能够更好地满足输入饱和的约束,并使得特定的性能指标达到最优。

参考文献(References)

- [1] Yu X, Wang B, Li X. Computer-controlled variable structure systems: The state-of-the-art[J]. IEEE Trans on Industrial Informatics, 2012, 8(2): 197-205.
- [2] Su W, Drakunov S V. An $O(T^2)$ boundary layer in sliding mode for sampled-data systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 482-485.
- [3] Abidi K, Xu J. On the discrete-time integral sliding-mode control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(3): 709-715.
- [4] 杨朋松, 孙秀霞, 董文瀚, 等. 一类不确定离散时间系统的积分滑模控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(7): 1277-1280.
(Yang P S, Sun X X, Dong W H, et al. Integral sliding mode control of discrete-time systems with uncertainties[J]. Control and Decision, 2013, 28(7): 1277-1280.)
- [5] Sun N, Niu Y, Chen B. Optimal integral sliding mode control for a class of uncertain discrete-time systems[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2014, 35(4): 468-478.
- [6] 周珊珊, 董瑞, 唐功友. 离散时滞系统的最优滑模控制[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 299-306.
(Zhou S S, Dong R, Tang G Y. Optimal sliding mode control of discrete-time systems with time-delay[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 299-306.)
- [7] Lin Z, Saberi A, Stoorvogel A A. Semiglobal stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation, via linear feedback-an ARE-based approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(8): 1203-1207.
- [8] Gao W, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [9] Chakrabarty S, Bandyopadhyay B. A generalized reaching law for discrete time sliding mode control[J]. Automatica, 2015, 52: 83-86.
- [10] Xu Q, Li Y. MicroNanopositioning using model predictive output integral discrete sliding mode control[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2012, 59(2): 1161-1170.

(责任编辑: 齐 霖)