

基于多LPV模型的调度离线鲁棒预测控制

马宇, 蔡远利

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049)

摘要: 针对一类具有大工作区域和快时变特性的约束非线性系统, 采用多个线性参数时变(LPV)模型近似描述原非线性系统. 对于各LPV模型, 设计基于参数独立Lyapunov函数的局部离线预测控制器. 构造各局部控制器间的切换策略, 在保证切换稳定性的同时, 使相互重叠的稳定域覆盖期望的工作区域. 仿真结果表明, 相比于已有的调度预测控制方法, 所提出的方法不仅能够保证控制输入在给定的约束范围内, 而且在局部控制器切换次数少的情况下, 获得良好的控制性能.

关键词: 多LPV模型; 参数独立Lyapunov函数; 离线鲁棒预测控制; 切换稳定性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Scheduled offline model predictive control based on multiple LPV models

MA Yu, CAI Yuan-li

(School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China. Correspondent: CAI Yuan-li, E-mail: ylicai@mail.xjtu.edu.cn)

Abstract: For a class of constrained nonlinear system with large operating regions and fast time-varying processes, a set of linear parameter-varying(LPV) models are designed as the approximate description of the original nonlinear system. For each LPV model, a local offline predictive controller with the stable region is designed according to the parameter dependent Lyapunov function. Then the overlapped stable regions cover the desired operating regions through the switching strategy in the set of local offline predictive controllers, and the stability of the scheduled controller is guaranteed. Simulation results show that, compared with the well-known scheduled predictive control algorithms, the proposed control strategy not only guarantees the control constraints, but also obtains good control performance with less switching times.

Keywords: multiple LPV models; parameter dependent Lyapunov function; offline robust model predictive control; switching stability

0 引言

模型预测控制(MPC)能够有效处理多输入多输出系统的约束问题, 因此已成为控制领域研究的热点. 近年来, 针对实际控制系统非线性特点, 非线性模型预测控制^[1-2]作为一种处理非线性特性和约束的方法, 已广泛应用于化学工业领域. 由于非线性模型预测控制在每个采样时刻, 需要求解一个非凸的非线性优化问题, 在线计算量较大. 非线性系统可以近似为LTV不确定系统^[3]或LPV系统^[4], 采用传统的模型预测控制方法设计控制器, 避免求解复杂的非凸非线性优化问题, 在一定程度上获得了良好的控制效果. 比较两种线性系统, LPV系统能够更精确地描述非线

性系统的动态.

针对LTV不确定系统, 文献[5]引用椭圆不变集理论, 在线求解基于LMI的凸优化问题, 获得包含当前状态的最大椭圆不变集及对应的状态反馈控制增益, 在线计算负担较重. 文献[6-7]离线计算一系列椭圆不变集, 在线凸组合当前状态相邻的两个椭圆不变集对应的控制增益获得控制律, 以牺牲一定控制性能为代价, 减小了在线计算量. 鉴于椭圆不变集处理不等式约束的保守性, 文献[8]采用多面体不变集设计离线的鲁棒预测控制, 该方法不仅扩大了控制器的初始可行域, 而且获得了更好的控制性能. 对于LPV系统, 假设时变参数可测, 为了降低上述基于单一Lyapunov

收稿日期: 2015-05-12; 修回日期: 2015-10-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61202128, 61463029); 宇航动力学国家重点实验室开放基金项目(2011ADL-JD0202).

作者简介: 马宇(1988-), 男, 博士生, 从事飞行器的制导与控制、预测控制的研究; 蔡远利(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事现代控制理论及应用、复杂系统建模与仿真等研究.

函数的鲁棒预测控制方法的保守性, 文献 [9-10] 引入包含系统状态和时变参数的参数独立 Lyapunov 函数 (PDLF) 设计鲁棒预测控制器. 同样, 为了减少在线计算量, 文献 [11] 进一步设计基于 PDLF 的离线预测控制方法, 比一般的离线预测控制方法^[7]的控制性能要好.

实际中, 针对具有大工作区域和强非线性的快时变系统, 基于单一线性系统模型的预测控制器不能在所有的工作区域获得令人满意的控制效果, 甚至导致系统不稳定. 文献 [12-14] 借鉴调度控制^[15]的思想设计调度预测控制器, 采用多个 LTV 系统近似非线性系统, 离线求解各 LTV 系统的最大椭圆不变集, 保证相互重叠的椭圆不变集覆盖期望的工作区域, 在线求解凸优化问题. 文献 [16] 以减小在线计算负担为目的, 结合离线预测控制^[7], 提出多模型离线预测控制. 然而, 当系统状态从一个稳定域进入相邻稳定域时, 该方法切换局部控制器, 采用相邻稳定域内部的离散状态点对应的控制增益, 因此其控制输入在局部控制器切换时, 不能保证满足约束条件. 为此, 文献 [17] 进一步设计调度离线预测控制方法, 在保证约束条件满足的同时, 系统渐近稳定. 该方法唯一的缺陷是各局部控制器的最大稳定域小于文献 [16], 因此, 在相互重叠椭圆不变集覆盖期望的工作区域时, 调度离线预测控制方法需增加局部控制器数量, 从而导致在线控制切换次数增加.

本文基于 PDLF 的离线预测控制^[11], 借鉴调度离线预测控制^[17]的思想, 提出基于多 LPV 模型的调度离线预测控制方法. 首先, 在某一工作点, 将非线性系统拟线性化为 LPV 模型, 并设计局部离线预测控制方法; 然后, 针对具有大工作区域的约束非线性系统, 采用多个 LPV 模型近似, 并获得对应的局部离线预测控制方法, 设计调度策略保证算法可行性和闭环系统稳定性; 最后, 通过仿真验证所提出算法的有效性.

1 局部离线预测控制

1.1 非线性系统的 LPV 模型近似

考虑一般的非线性系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad (1)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^{n_x}$ 和 $u \in \mathbf{R}^{n_u}$ 分别为系统状态和控制输入. 平衡点 (x^{eq}, u^{eq}) 附近的局部非线性系统表示为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \\ f(x(k), u(k)) - f(x^{eq}, u^{eq}) &= g(\tilde{x}, \tilde{u}), \end{aligned} \quad (2)$$

其中平移状态 $\tilde{x} = x - x^{eq}$ 和平移控制输入 $\tilde{u} = u - u^{eq}$ 满足如下约束:

$$|\tilde{x}_r(k+1)| \leq \tilde{x}_{r,max}, \quad r = 1, 2, \dots, n_x; \quad (3)$$

$$|\tilde{u}_h(k+1)| \leq \tilde{u}_{h,max}, \quad h = 1, 2, \dots, n_u. \quad (4)$$

对于非线性系统 (1), 假设状态变量可分为两部分 $x = [x_a^T \ x_b^T]^T$, $x_a \in \mathbf{R}^m$ ($m \leq n_x$), $x_b \in \mathbf{R}^{n_x-m}$. 在平衡点处, 系统的状态变量 x_b^{eq} 和控制输入 u^{eq} 由 x_a 的非线性函数表示, 即

$$\begin{cases} x_b^{eq} = \Phi(x_a), \\ u^{eq} = \Psi(x_a). \end{cases} \quad (5)$$

平移状态变量也可分为两部分 $\tilde{x} = [\tilde{x}_a^T \ \tilde{x}_b^T]^T$, $\tilde{x}_a = x_a - x_a^{eq}$, $\tilde{x}_b = x_b - \Phi(x_a)$. 将 \tilde{x}_a 作为系统拟线性化的可测状态变量, 原局部非线性系统 (2) 可以转化为如下拟线性系统^[4,18]:

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(\tilde{x}_a)\tilde{x}(k) + \tilde{B}(\tilde{x}_a)\tilde{u}. \quad (6)$$

由于状态变量 \tilde{x}_a 满足约束

$$\prod_{x_a} = \{\tilde{x} \in \mathbf{R}^m \mid |\tilde{x}_r(k+1)| \leq \tilde{x}_{r,max}, \quad r = 1, 2, \dots, m\},$$

定义参数空间 $P \triangleq \prod_{x_a}$, 局部非线性系统的动态由 LPV 模型近似表示^[18]为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A(p(k))\tilde{x}(k) + B(p(k))\tilde{u}, \\ [A(p(k)) \ B(p(k))] &\in \Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $p(k) \in P$ 为在线可测参数; 凸多面体 $\Omega = \text{Co}\{[A_1 \ B_1], \dots, [A_L \ B_L]\}$, $[A_j \ B_j]$ 为凸多面体的顶点. 在任意时刻, $[A(p(k)) \ B(p(k))]$ 均在多面体内, 由多面体顶点的线性组合表示^[10]为

$$\begin{aligned} A(p(k)) &= \sum_{j=1}^L p_j(k)A_j, \\ B(p(k)) &= \sum_{j=1}^L p_j(k)B_j, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $p_j(k)$ 为关于 \tilde{x}_a 的函数, 即 $p_j(k) = \phi_j(\tilde{x}_a)$, 满足 $\sum_{j=1}^L p_j(k) = 1, 0 \leq p_j(k) \leq 1$.

由于时变参数 $p_j(k)$ 反映了非线性系统的非线性特性, 本文采用拟线性化方法, 利用 LPV 系统近似描述非线性系统的局部动态, 从而将非线性系统的控制问题转化为 LPV 系统的控制问题.

1.2 基于 LPV 模型的离线预测控制

针对 LPV 系统 (7), 设计状态反馈控制器

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k) &= K(p(k))\tilde{x}(k), \\ K(p(k)) &= \sum_{j=1}^L p_j(k)K_j. \end{aligned} \quad (9)$$

同时满足如下 min-max 性能指标:

$$\min_{\tilde{u}(k+i/k)} \max_{[A(p(k+i)) \ B(p(k+i))] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k),$$

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [\|\tilde{x}(k+i/k)\|_\Theta^2 + \|\tilde{u}(k+i/k)\|_R^2];$$

s.t. 式 (3) 和 (4). (10)

其中 $\Theta \geq 0$ 和 $R > 0$ 为对称的权系数矩阵.

控制输入 $\tilde{u}(k)$ 使 LPV 系统 (7) 在满足状态约束 (3) 和控制输入约束 (4) 的情况下渐近稳定, 从而 $u(k) = \tilde{u}(k) + u^{eq}$ 使非线性系统 (1) 的状态渐近趋于平衡点.

传统的鲁棒预测控制^[5-8]在设计控制器时, 将可测参数作为不确定参数处理, 具有保守性. 文献 [10] 为了考虑可测参数, 引入 PDLF, 将式 (10) 中带有约束问题的 min-max 优化问题转化为一组含有 LMI 的凸优化问题.

引理 1^[10] 考虑 LPV 系统 (7), 在每一个采样时刻 k , 最小化性能指标 $J_\infty(k)$ 在最坏情况下的上界 γ , 通过求解基于 LMI 约束的凸优化问题获得一个使闭环系统鲁棒渐近稳定的状态反馈控制律 (9) ($K_j = Y_j G_j^{-1}$) 和椭圆不变集 $\varepsilon_j = \{\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n_x} | \tilde{x}^T Q_j^{-1} \tilde{x} \leq 1\}$.

虽然引理 1 的鲁棒预测控制算法减少了控制器的保守性, 能够获得更好的控制性能, 但在每一个时刻 k , 都需要在线求解凸优化问题, 随着多胞顶点的增加, 优化本身的计算量也在增加. 在实际中, 该方法不适用于快时变系统. 为了减少在线计算量, 文献 [11] 利用椭圆不变集渐近稳定的性质^[7], 设计了一种离线鲁棒预测控制算法.

算法 1 1) 离线计算.

Step 1: 选择离散的状态点 $\tilde{x}_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$, 根据引理 1, 对每个状态 \tilde{x}_i 求解凸优化问题, 获得对应的状态反馈增益 $K_{i,j} = Y_{i,j} G_{i,j}^{-1}$ 和椭圆不变集

$$\varepsilon_{i,j} = \{\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n_x} | \tilde{x}^T Q_{i,j}^{-1} \tilde{x} \leq 1\},$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N, \forall j = 1, 2, \dots, L.$$

保存 $\{K_{i,j}, Q_{i,j}^{-1}\}$, 以便在线调用.

Step 2: 当 $i \neq N$ 时, 检验如下不等式是否成立:

$$Q_{i,j}^{-1} - (A_j + B_j K_{i+1,j})^T Q_{i,l}^{-1} (A_j + B_j K_{i+1,j}) > 0,$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, L, \forall l = 1, 2, \dots, L. \quad (11)$$

2) 在线计算.

根据 k 时刻的状态 $\tilde{x}(k)$ 和可测参数 $p(k)$, 设计如下状态反馈控制律:

$$\tilde{u}(k) = \begin{cases} K(\alpha_i(k))\tilde{x}(k), & \tilde{x}(k) \in \varepsilon_{i,j}, \tilde{x}(k) \notin \varepsilon_{i+1,j}, \\ \quad \forall j = 1, 2, \dots, L, i \neq N; \\ K_N \tilde{x}(k), & \tilde{x}(k) \in \varepsilon_{N,j}, \forall j = 1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad (12)$$

$$K(\alpha_i(k)) =$$

$$\alpha_i(k) \left[\sum_{j=1}^L p_j(k) K_{i,j} \right] + (1 - \alpha_i(k)) \left[\sum_{j=1}^L p_j(k) K_{i+1,j} \right]. \quad (13)$$

$$K_N \tilde{x}(k) = \sum_{j=1}^L p_j(k) K_{N,j}. \quad (14)$$

若不等式 (11) 成立, 则 $\alpha_i(k) \in (0, 1]$, 由下式计算得到:

$$\tilde{x}(k)^T \left(\alpha_i(k) \left[\sum_{j=1}^L p_j(k) Q_{i,j}^{-1} \right] + (1 - \alpha_i(k)) \left[\sum_{j=1}^L p_j(k) Q_{i+1,j}^{-1} \right] \right) \tilde{x}(k) = 1. \quad (15)$$

若不等式 (11) 不成立, 则 $\alpha_i(k) = 1$.

引理 2^[11] 对于给定的初始状态 $\tilde{x}(0)$, 满足 $\|\tilde{x}(0)\|_{Q_{1,j}^{-1}}^2 \leq 1, \forall j = 1, 2, \dots, L$, 算法 1 保证闭环系统鲁棒渐近稳定.

2 调度离线鲁棒预测控制

尽管算法 1 极大地减小了在线计算量, 但其要求初始状态 $\tilde{x}(0) \in \varepsilon_{1,j}$. 因此, 系统的闭环鲁棒渐近稳定性受限于平衡点附近的椭圆吸引域内, 不适用于具有大工作区域的非线性系统. 为扩大非线性系统鲁棒渐近稳定的稳定域, 本文采用多个 LPV 模型近似非线性系统的策略, 提出调度离线鲁棒预测控制算法.

考虑非线性系统 (1), 在初始状态 $x(0)$ 和期望的平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$ 之间, 选择一系列平衡点 $(x^{(l)}, u^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, M$. 在每个平衡点, 用如式 (7) 所示的局部 LPV 系统近似描述非线性系统, 并采用算法 1 设计局部离线鲁棒预测控制器 # l , 获得渐近稳定的椭圆吸引域

$$\varepsilon_{i,j}^{(l)} = \{x \in \mathbf{R}^{n_x} | (x - x^{(l)})^T (Q_{i,j}^{(l)})^{-1} (x - x^{(l)}) \leq 1\}.$$

本文将 $\psi^{(l)} \triangleq \varepsilon_{1,j}^{(l)}$ 作为局部 LPV 系统的最大稳定吸引域. 因为不仅要保证局部离线鲁棒预测控制器 # l 的稳定吸引域相互重叠, 覆盖非线性系统期望的工作点, 而且要保证控制器的切换使非线性系统渐近稳定, 所以中间平衡点的选择是至关重要的. 由文献 [12] 的平衡点选择方法, 首先设期望平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$ 的局部离线鲁棒预测控制器为 #0 ($l = 0$), 稳定吸引域为 $\psi^{(0)}$. 然后, 找到满足 $x^{(l+1)} \in \psi^{(l)}$ 的平衡点 $(x^{(l+1)}, u^{(l+1)})$, 设计局部离线鲁棒预测控制器 #($l + 1$), 稳定吸引域为 $\psi^{(l+1)}$. 以这种方式选择平衡点, 直到平衡点 $(x^{(M)}, u^{(M)})$ 的控制器 # M 的稳定吸引域 $\psi^{(M)}$ 覆盖初始状态 $x(0)$. 在线时, 根据当前状态 $x(k) \in \psi^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, M$), 选择局部离线鲁棒预测控制器 # l , 称这种控制策略为调度离线鲁棒预测控制, l 为

调度指示变量。

算法2 考虑一般的非线性系统(1), 给定初始状态 $x(0)$ 和期望的平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$, 设 $l = 0$ 。

1) 离线计算。

Step 1: 定义平移状态 $\tilde{x} = x - x^{(l)}$ 和平移控制输入 $\tilde{u} = u - u^{(l)}$, 满足约束(3)和(4), 局部非线性系统(2)由LPV系统(7)近似表示。

Step 2: 采用算法1设计局部离线鲁棒预测控制器 # l , 获得状态反馈增益 $K_{i,j}^{(l)}$ 和渐近稳定的椭圆吸引域

$$\varepsilon_{i,j}^{(l)} =$$

$$\{x \in \mathbf{R}^{n_x} | (x - x^{(l)})^T (Q_{i,j}^{(l)})^{-1} (x - x^{(l)}) \leq 1\},$$

设 $\psi^{(l)} \triangleq \varepsilon_{1,j}^{(l)}$, 保存 $\{x^{(l)}, u^{(l)}, K_{i,j}^{(l)}, (Q_{i,j}^{(l)})^{-1}, \psi^{(l)}\}$ 。

Step 3: 选择平衡点 $(x^{(l+1)}, u^{(l+1)})$, 满足 $x^{(l+1)} \in \psi^{(l)}$, 设 $l = l + 1$, 返回 Step 1, 直到新的控制器 # M 的稳定吸引域 $\psi^{(M)}$ 覆盖初始状态 $x(0)$ 。

2) 在线计算。

根据 k 时刻的状态 $x(k)$ 和已保存的 $\{x^{(l)}, u^{(l)}, K_{i,j}^{(l)}, (Q_{i,j}^{(l)})^{-1}, \psi^{(l)}\}$, 线性搜索, 找到 $x(k) \in \psi^{(l)}$ 的最小调度指示变量 l 。控制输入 $u(k) = K^{(l)}(k)(x(k) - x^{(l)}) + u^{(l)}$, $K^{(l)}(k)$ 由算法1计算得到。

定理1 对于非线性系统(1), 由算法2设计的调度离线鲁棒预测控制器能够使初始状态 $x(0) \in \bigcup_{l=0}^M \psi^{(l)}$ 渐近稳定于系统期望的平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$ 。

证明 因为算法2的稳定性主要从局部离线预测控制器和各控制器间切换的稳定性两方面证明, 所以分两步证明。

Step 1: 设可测状态 $x(k)$ 在任意最大稳定域 $\psi^{(l)}$ 内, $l = 1, 2, \dots, M$, 证明局部离线预测控制器 # l 在不等式(11)成立与否两种情况下, 所采用的反馈控制增益保证闭环系统渐近稳定, 即使 $x(k)$ 收敛于平衡点。

情况1: 设不等式(11)不成立, 当 $x(k) \in \varepsilon_{i,j}^{(l)}$ 时, 引理1已经证明状态反馈增益 $K_i^l = \sum_{j=1}^L p_j^l(k) K_{i,j}^l$ 保证闭环系统渐近稳定。因此, 控制器 # l 使 $x(k)$ 保持在椭圆吸引域 $\varepsilon_{i,j}^{(l)}$ 内, 并渐近收敛于更小的椭圆吸引域 $\varepsilon_{i+1,j}^{(l)}$ 。以此类推, 最后状态收敛到 $\varepsilon_{N,j}^{(l)}$ 内, 然后逐渐趋于平衡点。

情况2: 设不等式(11)成立, 当 $x(k) \in \varepsilon_{i,j}^{(l)}$ 且 $x(k) \notin \varepsilon_{i+1,j}^{(l)}$ 时, 结合引理1, 式(11)能够保证

$$(Q_i^l)^{-1} - (A + BK(\alpha_i^l(k)))^T (Q_i^l)^{-1} (A + BK(\alpha_i^l(k))) > 0$$

成立, 因此, 状态反馈控制增益

$$K(\alpha_i^l(k)) = \alpha_i^l(k) K_i^l + (1 - \alpha_i^l(k)) K_{i+1}^l$$

能够保证闭环系统渐近稳定。类似于情况1的证明, 控制器 # l 保证 $x(k)$ 最后收敛于平衡点。

Step 2: 当 $x(0) \in \psi^{(l)}$ 时, Step 1 已经证明局部离线预测控制器 # l 能够使系统状态渐近稳定于平衡点 $(x^{(l)}, u^{(l)})$, 又因为 $x^{(l)} \in \psi^{(l-1)}$, 所以系统状态进入稳定吸引域 $\psi^{(l-1)}$ 。考虑到系统状态 $x \in \psi^{(l)} \cap \psi^{(l-1)}$, 根据算法2设计的控制器切换规则, 选择最小调度指示变量 $l - 1$, 控制器由 # l 切换到 # $(l - 1)$, 从而使系统状态渐近稳定于平衡点 $(x^{(l-1)}, u^{(l-1)})$ 。以此类推, 当系统状态 $x \in \psi^{(0)}$, 控制器 #0 保证系统状态渐近稳定于期望的平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$ 。因此, 在稳定吸引域 $\bigcup_{l=0}^M \psi^{(l)}$ 内, 算法2设计的调度离线鲁棒预测控制器使非线性系统鲁棒渐近稳定, 即初始状态渐近稳定于期望的平衡点。□

3 仿真分析

本文以连续搅拌釜的非线性模型为例验证算法的有效性, 其模型为

$$\begin{aligned} \dot{C}_A &= \frac{q}{V} (C_{AF} - C_A) - k_0 e^{(-\frac{E_a}{RT})} C_A, \\ \dot{T} &= \frac{q}{V} (T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 e^{(-\frac{E_a}{RT})} C_A + \\ &\quad \frac{UA}{V\rho C_p} (T_c - T). \end{aligned} \quad (16)$$

其中: C_A 为反应器中 A 的浓度 (mol/L); T 为反应器的温度 (K); T_c 为冷却剂的温度 (K); 其他模型参数见文献[11]。

3.1 非线性系统的多LPV模型近似

选取平衡点 $\{C_A^{(l)}, T^{(l)}, T_c^{(l)}\}$, $l = 1, 2, \dots, M$, 设平移状态 $\tilde{x}^{(l)} = [\tilde{C}_A^{(l)}, \tilde{T}^{(l)}]^T$ 。其中: $\tilde{C}_A^{(l)} = C_A - C_A^{(l)}$, $\tilde{T}^{(l)} = T - T^{(l)}$ 。平移控制输入 $\tilde{u}^{(l)} = \tilde{T}_c^{(l)} = T_c - T_c^{(l)}$ 。各平衡点处, $\tilde{C}_A^{(l)}$ 、 $\tilde{T}^{(l)}$ 和 $\tilde{T}_c^{(l)}$ 统一满足如下约束:

$$|\tilde{C}_A^{(l)}| \leq 0.5, |\tilde{T}^{(l)}| \leq 10, |\tilde{T}_c^{(l)}| \leq 40. \quad (17)$$

定义关于自变量 $\tilde{T}^{(l)}$ 的函数

$$\begin{aligned} \varphi_1^l(\tilde{T}^{(l)}) &= k_0 \exp\left(-\frac{E_a/R}{\tilde{T}^{(l)} + T^{(l)}}\right), \\ \varphi_2^l(\tilde{T}^{(l)}) &= k_0 \left[\exp\left(-\frac{E_a/R}{\tilde{T}^{(l)} + T^{(l)}}\right) - \exp\left(-\frac{E_a/R}{T^{(l)}}\right) \right] C_A^{(l)} / \tilde{T}^{(l)}, \\ g_1^l(\tilde{T}^{(l)}) &= \varphi_1^l(\tilde{T}^{(l)}) - \varphi_1^l, \\ g_2^l(\tilde{T}^{(l)}) &= \varphi_2^l(\tilde{T}^{(l)}) - \varphi_2^l. \end{aligned}$$

当 $|\tilde{T}^{(l)}| \leq 10$ 时, 设

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1^l &= [\varphi_1^l(-10) + \varphi_1^l(10)]/2, \\ \hat{\varphi}_2^l &= [\varphi_2^l(-10) + \varphi_2^l(10)]/2, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} g_1^l(-10) &\leq g_1^l(\tilde{T}^l) \leq g_1^l(10), \\ g_2^l(-10) &\leq g_2^l(\tilde{T}^l) \leq g_2^l(10). \end{aligned}$$

基于上述定义, 将非线性系统(16)用4个LPV模型近似表示为

$$\dot{\hat{x}}^{(l)} = \left(\sum_{j=1}^4 p_j^l A_j^l \right) \hat{x}^{(l)} + \begin{bmatrix} 0 \\ UA \\ \frac{V\rho C_p}{V\rho C_p} \end{bmatrix} \tilde{u}^{(l)}. \quad (18)$$

其中: A_j^l 为第 l 个 LPV 模型的多胞顶点, 即

$$\begin{aligned} A_1^l &= \begin{bmatrix} -1 - \hat{\varphi}_1^l - 2g_1^l(10) & -\hat{\varphi}_2^l \\ 209.2\hat{\varphi}_1^l + 418.4g_1^l(10) & -3.092 + 209.2\hat{\varphi}_2^l \end{bmatrix}, \\ A_2^l &= \begin{bmatrix} -1 - \hat{\varphi}_1^l - 2g_1^l(-10) & -\hat{\varphi}_2^l \\ 209.2\hat{\varphi}_1^l + 418.4g_1^l(-10) & -3.092 + 209.2\hat{\varphi}_2^l \end{bmatrix}, \\ A_3^l &= \begin{bmatrix} -1 - \hat{\varphi}_1^l & -\hat{\varphi}_2^l - 2g_2^l(10) \\ 209.2\hat{\varphi}_1^l & -3.092 + 209.2\hat{\varphi}_2^l + 418.4g_2^l(10) \end{bmatrix}, \\ A_4^l &= \begin{bmatrix} -1 - \hat{\varphi}_1^l & -\hat{\varphi}_2^l - 2g_2^l(-10) \\ 209.2\hat{\varphi}_1^l & -3.092 + 209.2\hat{\varphi}_2^l + 418.4g_2^l(-10) \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

p_j^l 为关于 $\tilde{T}^{(l)}$ 的可测参数, 有

$$\begin{aligned} p_1^l &= \frac{g_1^l(\tilde{T}^{(l)}) - g_1^l(-10)}{2(g_1^l(10) - g_1^l(-10))}, \\ p_2^l &= \frac{g_1^l(10) - g_1^l(\tilde{T}^{(l)})}{2(g_1^l(10) - g_1^l(-10))}, \\ p_3^l &= \frac{g_2^l(\tilde{T}^{(l)}) - g_2^l(-10)}{2(g_2^l(10) - g_2^l(-10))}, \\ p_4^l &= \frac{g_2^l(10) - g_2^l(\tilde{T}^{(l)})}{2(g_2^l(10) - g_2^l(-10))}. \end{aligned}$$

对4个LPV系统的多胞顶点离散化, 获得调度离线鲁棒预测控制器设计所需要的模型. 设离散时间 $T_s = 0.01 \text{ min}$, 式(10)性能指标 $J_\infty(k)$ 的权系数矩阵 $\Theta = I, R = 0.01$. 本文的控制目标是通过算法2设计的调度离线鲁棒预测控制器能够使初始状态 $x(0) = [0.44 \ 355.33]^T$ 渐近稳定于系统期望的平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)}) = ([0.62 \ 343.28]^T, 302.07)$. 对于多个LPV模型, 本文各选取19个离散的状态点, 根据算法2的离线部分设计局部离线鲁棒预测控制器 # $l, l \in \{0, 1, 2, 3\}$, 获得状态反馈增益 $K_{i,j}^{(l)}$ 和渐近稳定的椭圆吸引域 $\varepsilon_{i,j}^{(l)}$, 最大稳定域为 $\psi^{(l)} \triangleq \varepsilon_{1,j}^{(l)}$, 保存 $\{x^{(l)}, u^{(l)}, K_{i,j}^{(l)}, (Q_{i,j}^{(l)})^{-1}, \psi^{(l)}\}$. 如图1所示, 实线椭圆表示局部离线鲁棒预测控制器 # l 的最大稳定域 $\psi^{(l)}$, 虚线椭圆表示最大稳定域中椭圆不变集序列. 本文引入PDLF设计局部离线鲁棒预测控制器, 且各LPV模型的多胞顶点数为4, 各平衡点对应4组椭圆不变集序列.

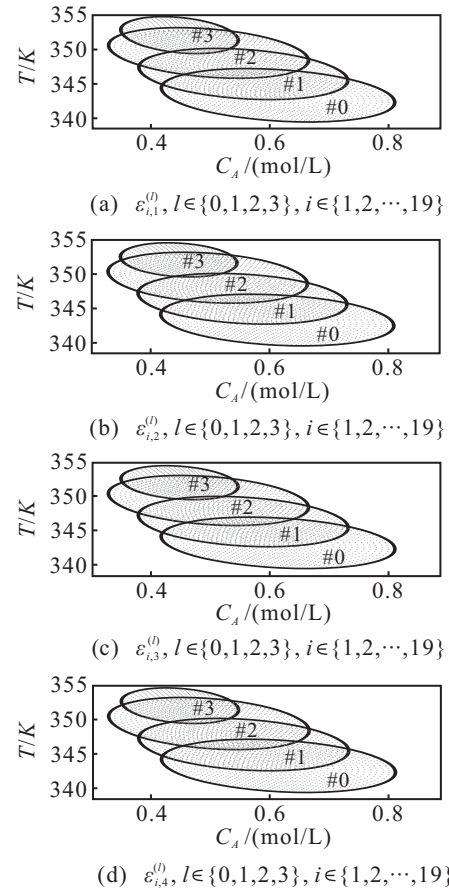


图1 算法2离线计算的稳定域及其椭圆不变集序列

3.2 仿真结果对比分析

对文献[16](多模型离线预测控制)、文献[17](调度离线预测控制)和本文提出的基于多LPV模型的调度离线预测控制3种方法进行仿真对比分析. 针对平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$, 选择相同的离散状态点, 3种方法的最大稳定域如图2所示. 与其他两种方法对比, 调度离线预测控制的最大稳定域最小. 因此, 当相互重叠椭圆不变集覆盖给定的初始状态和期望平衡点时, 调度离线预测控制选择的平衡点数增多, 局部离线预测控制器之间的切换次数增多, 离线存储空间增大. 如图3(a)所示, 实线椭圆表示多模型离线预测控制的局部控制器 # l 的最大稳定域 $\psi^{(l)}, l \in \{0, 1, 2, 3\}$, 虚线椭圆表示最大稳定域中椭圆不变集序列. 调度离线预测控制离线计算的各平衡点对应的稳定域及其相应的椭圆不变集序列如图3(b)所示.

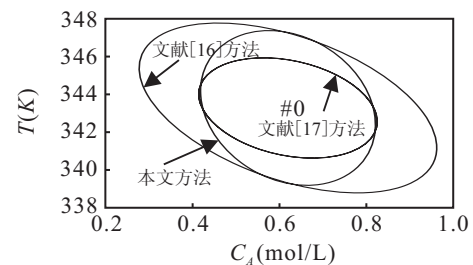
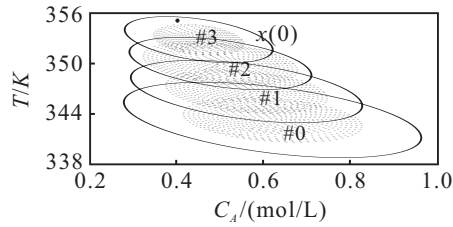
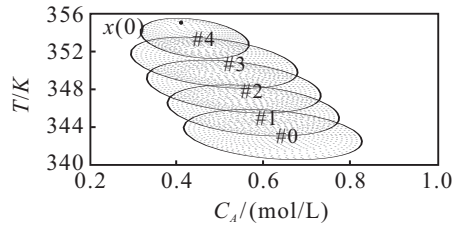


图2 在平衡点 $(x^{(0)}, u^{(0)})$ 处3种方法的最大稳定域

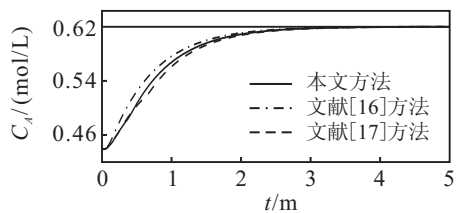


(a) 文献[16]离散计算的椭圆不变集序列

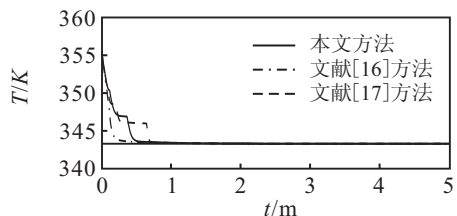


(b) 文献[17]离散计算的椭圆不变集序列

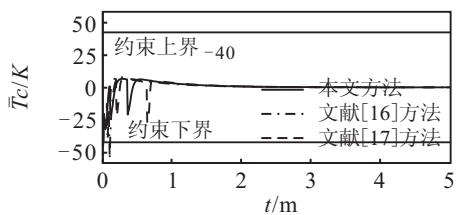
图 3 文献[16-17]计算的稳定域及其椭圆不变集序列



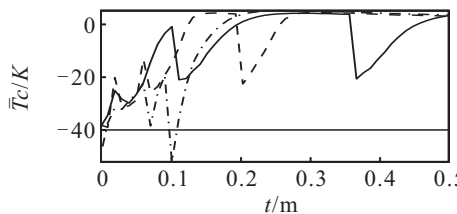
(a) 反应物A浓度曲线



(b) 反应物温度曲线



(c) 冷却剂温度的平移控制输入



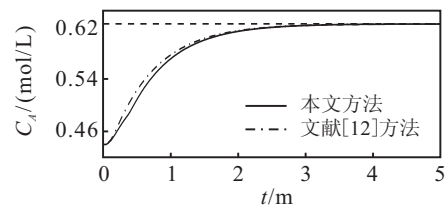
(d) 冷却剂温度平移控制输入曲线局部放大

图 4 3 种方法仿真结果

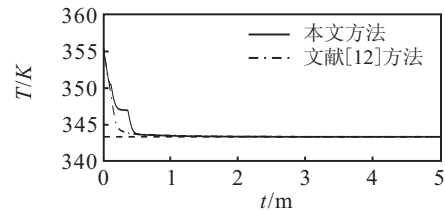
本文以 Intel 奔腾双核 E 2200 上的 Matlab 2012 作为仿真平台,对 3 种方法进行仿真分析.仿真步长为 0.01 min,控制步长为 0.01 min,仿真时间为 5 min.仿真结果如图 4 所示,3 种方法都能使非线性系统初始状态 $x(0)$ 收敛于期望平衡点 (x^0, u^0) ,多模型离线

预测控制的收敛速度最快.然而,当系统状态从一个稳定域进入相邻稳定域时,多模型离线预测控制根据最大稳定域进行局部控制器的切换,采用相邻稳定域内部的离散状态点对应的控制增益计算控制输入,因此该方法计算出的控制输入超界.为了保证控制输入是可控的,实际和仿真时都不超出界限,需要额外增加限幅器实现.算法 2 和调度离线预测控制均能保证控制输入在给定的约束范围内,且算法 2 收敛速度较快.由图 3 可见,调度离线预测控制的局部控制器切换次数最多.在相同控制目标时,考虑到控制器之间的切换次数尽可能少的原则,算法 2 和多模型离线预测控制要优于调度离线预测控制.

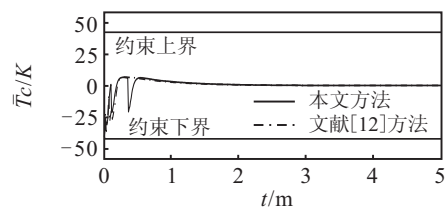
在相同的仿真条件下,采用在线调度模型预测控制方法^[12]与算法 2 进行对比分析.在 5 min 的仿真时间中,在线调度模型预测控制方法的仿真运行时间为 414.75 min,算法 2 的仿真运行时间为 0.228 min.仿真结果如图 5 所示,两种方法均能在满足控制输入的约束条件下,使非线性系统的初始状态收敛于期望平衡点,且在线调度模型预测控制方法的收敛速度较快.然而,在线调度模型预测控制方法在每个采样时刻需求解基于线性矩阵不等式的凸优化问题,计算量较大.算法 2 以牺牲较少控制性能为代价,减小了在线计算量,更适用于具有快时变特性的非线性系统.



(a) 反应物A浓度曲线



(b) 反应物温度曲线



(c) 冷却剂温度的平移控制输入

图 5 两种方法的仿真结果

仿真结果表明,本文方法在保证控制约束的同时,不仅获得较好的控制性能,而且控制器之间的切换次数少,仿真运行时间短,更适用于这类具有大工作区域和快时变特性的约束非线性系统.

4 结 论

本文提出了基于多LPV模型的调度离线鲁棒预测控制算法。引入拟线性方法和调度预测思想,采用多个LPV模型近似描述非线性系统,不仅扩大了工作区域,而且降低了LTV模型近似的保守性。离线时,设计基于PDLF的局部离线预测控制器及其相应的稳定域;在线时,根据当前状态所处的稳定域,不需要复杂的凸优化求解,便可获得控制律,在线计算负担小。通过设定调度策略,所提出方法在满足系统约束的同时,能够保证非线性系统闭环稳定。以连续搅拌釜为例进行仿真对比分析,结果验证了所提出算法的优越性。

参考文献(References)

- [1] De Oliveira Kothare S L, Morari M. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(6): 1053-1071.
- [2] Magni L, De Nicolao G, Magnani L, et al. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1351-1362.
- [3] Angeli D, Casavola A, Mosca E. Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(13): 1091-1103.
- [4] Chisci L, Falugi P, Zappa G. Gain-scheduling MPC of nonlinear systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(3/4): 295-308.
- [5] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [6] Wan Z, Kothare M V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities[J]. J of Process Control, 2002, 12(7): 763-774.
- [7] Wan Z, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 2003, 39(5): 837-846.
- [8] Bumroongsri P, Kheawhom S. An off-line robust MPC algorithm for uncertain polytopic discrete-time systems using polyhedral invariant sets[J]. J of Process Control, 2012, 22(6): 975-983.
- [9] Daafouz J, Bernussou J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties[J]. Systems & Control Letters, 2001, 43(5): 355-359.
- [10] Wada N, Saito K, Saeki M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent lyapunov function[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2006, 53(12): 1446-1450.
- [11] Bumroongsri P, Kheawhom S. An ellipsoidal off-line model predictive control strategy for linear parameter varying systems with applications in chemical processes[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(3): 435-442.
- [12] Wan Z, Kothare M V. Efficient scheduled stabilizing model predictive control for constrained nonlinear systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(3/4): 331-346.
- [13] Wan Z, Kothare M V. Efficient scheduled stabilizing output feedback model predictive control for constrained nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(7): 1172-1177.
- [14] Wan Z, Kothare M V. A framework for design of scheduled output feedback model predictive control[J]. J of Process Control, 2008, 18(3): 391-398.
- [15] McConley M W, Appleby B D, Dahleh M A, et al. A computationally efficient Lyapunov-based scheduling procedure for control of nonlinear systems with stability guarantees[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(1): 33-49.
- [16] Tao X, Li N, Li S. Multiple-model off-line predictive control for fast time-varying systems[C]. The 25th Chinese Control and Decision Conf. Guiyang: IEEE Press, 2013: 732-737.
- [17] 高海燕, 蔡远利, 唐伟强. 高超声速飞行器的调度离线预测控制[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(2): 224-230.
(Gao H Y, Cai Y L, Tang W Q. Scheduled offline model predictive control for a generic hypersonic vehicle[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(2): 224-230.)
- [18] 赵敏, 李少远. 约束非线性系统切换鲁棒预测控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(4): 495-500.
(Zhao M, Li S Y. Switching robust model predictive control strategy for constrained nonlinear system[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(4): 495-500.)

(责任编辑: 郑晓蕾)