

扩展目标跟踪的PCRLB

连峰, 王婷婷, 韩崇昭, 张光华

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049)

摘要: 在杂波和漏检的环境下针对扩展目标估计的性能评价问题, 提出求扩展目标跟踪估计的后验克拉美罗界(PCRLB)的方法. 该方法假设单个扩展目标的量测个数服从泊松分布, 杂波的个数也服从泊松分布, 给出在有漏检和杂波环境下求PCRLB的方法——信息约减因子法(IRF). 算例展示了不同的检测概率和杂波密度对PCRLB的影响. 仿真结果表明, 所提出方法能有效反映扩展目标跟踪所能达到的最优性能, 检测概率越高, PCRLB越小; 杂波密度越大, PCRLB越大.

关键词: 扩展目标跟踪; 性能评价; 后验克拉美罗界; 信息约减因子

中图分类号: TP274

文献标志码: A

PCRLB for extended target tracking

LIAN Feng, WANG Ting-ting, HAN Chong-zhao, ZHANG Guang-hua

(School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China. Correspondent:

LIAN Feng, E-mail: lianfeng1981@mail.xjtu.edu.cn)

Abstract: The method of calculating the posterior cramer-rao lower bound(PCRLB) for the extent target is proposed to address the performance evaluation for estimation of an extended target with clutters and missed detections. Supposing that the number of measurements from the extend target and false alarms have a Poisson distribution respectively, the method using information reduction factor is proposed, which can calculate the PCRLB with clutters and missed detections. Simulation results show that the proposed PCRLB can effectively show the performance limits of the extended target estimation algorithms. The higher the probability of detection is, the smaller the PCRLB will become. The greater the PCRLB is the bigger the clutter density will be.

Keywords: extended target tracking; performance evaluation; posterior Cramer-rao lower bound; information reduction factor

0 引言

对于目标跟踪领域的非线性滤波问题, 由于杂波、漏检的影响, 大多数滤波算法都是次优的, 为了衡量滤波算法的性能, 获得估计误差下界是很有必要的. 对于单目标状态估计问题, 在20世纪90年代, Tichavsky等^[1]提出采用后验克拉美罗下界(PCRLB)来衡量离散时间非线性滤波问题的均方误差(MSE), 随后PCRLB又被推广到杂波和漏检存在^[2]和目标机动^[3]等情况. 目前, 误差界的研究成果已经在传感器管理^[4]、弹道目标跟踪及性能预测^[5]、无源定位与跟踪^[6]等领域取得了成功的应用.

由于传感器分辨率的不断提高, 单个目标的不同

反射点(飞机的机头、机翼、机尾)可以同时产生多个观测, 该目标称为扩展目标. 近年来, 扩展目标跟踪已经成为目标跟踪领域的一个热点问题, 很多算法应运而生^[7-9]. 然而, 对PCRLB的研究只停留在对单目标的研究领域, 对扩展目标或者多目标的研究目前还较少有相关结论.

为解决此问题, 本文假设单个扩展目标的量测个数服从泊松分布, 杂波的个数也服从泊松分布, 利用信息约减因子法(IRF), 在单目标的研究基础上推导了在杂波和漏检存在时基于单个扩展目标跟踪PCRLB, 并通过算例展示了杂波和漏检对PCRLB的

收稿日期: 2015-05-19; 修回日期: 2015-11-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473217); 国家973计划项目(2013CB329405); 陕西省自然科学基金项目(2014JQ8333).

作者简介: 连峰(1981—), 男, 副教授, 从事信息融合与目标跟踪等研究; 王婷婷(1991—), 女, 硕士生, 从事信息融合与目标跟踪的研究.

影响.

1 模型建立

假设 \mathbf{X} 为目标状态, \mathbf{Z} 为测量数据集合, $P(\mathbf{Z}; \hat{\mathbf{X}})$ 为联合概率密度, \mathbf{X} 的无偏估计为 $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Z})$, 则有

$$E\{\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Z})\} = \mathbf{X}. \quad (1)$$

PCRLB 有如下形式:

$$E\{[\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}) - \mathbf{X}][\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}) - \mathbf{X}]^T\} \geq \mathbf{J}^{-1}. \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{J} = E\{[\nabla_{\mathbf{X}} \log(P(\mathbf{Z}; \mathbf{X}))][\nabla_{\mathbf{X}} \log(P(\mathbf{Z}; \mathbf{X}))]^T\} \quad (3)$$

为 Fisher 信息矩阵, \mathbf{J}^{-1} 为克拉美罗下界^[1](PCRLB).

状态估计向量 $\{\mathbf{X}_k\}$ 的 Fisher 信息子阵 $\{\mathbf{J}_k\}$ 服从以下递推公式^[1]:

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{D}_k^{33} - \mathbf{D}_k^{21}(\mathbf{J}_k + \mathbf{D}_k^{11})^{-1}\mathbf{D}_k^{12} + \mathbf{J}_Z(k+1). \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{D}_k^{11} = E_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}}\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{X}_k} \log P(\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_k^{12} = E_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}}\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{X}_{k+1}} \log P(\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{D}_n^{21} = [\mathbf{D}_{12}^T]^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_k^{33} = E_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}}\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k+1}}^{\mathbf{X}_{k+1}} \log P(\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\}, \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_Z(k+1) = E_{\mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{k+1}}\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k+1}}^{\mathbf{Z}_{k+1}} \log P(\mathbf{Z}_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1})\}. \quad (9)$$

初始信息阵由下式给出:

$$\mathbf{J}_0 = E_{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0}\{-\Delta_{\mathbf{X}_0}^{\mathbf{X}_0} \log P(\mathbf{X}_0)\}. \quad (10)$$

对于单个扩展目标, 假设在 k 时刻传感器获得的测量数据的个数为 m_k , 量测值中来自真实目标的测量个数为 m_e , 那么杂波的个数为 $m_k - m_e$.

考虑如下系统:

$$\mathbf{X}_{k+1} = f_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (11)$$

$$\mathbf{Z}_k^D(i) = h_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (12)$$

其中: \mathbf{w}_k 、 \mathbf{v}_k 为独立白噪声, 且 $\mathbf{w}_k \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_k)$, $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$, $i = 1, 2, \dots, m_e$.

假设杂波在区域 A 中服从均匀分布, 区域体积为 V , 那么杂波的量测模型为

$$\mathbf{Z}_k^{FA} = u_k. \quad (13)$$

当 $u_k \in A$ 时, $P(u_k) = 1/V$.

假设来源于真实目标的量测值个数服从均值为 α 的泊松分布^[10], 检测概率为 P_D , 在 k 时刻观测个数

的先验分布为

$$P(m_k) = (1 - P_D) \frac{(\lambda V)^{m_k} \exp(-\lambda V)}{m_k!} + P_D \sum_{m_e=1}^{m_k} \left(\frac{(\lambda V)^{m_k - m_e} \exp(-\lambda V)}{(m_k - m_e)!} \cdot \frac{(\alpha)^{m_e} \exp(-\alpha)}{m_e!} \right). \quad (14)$$

测量值中存在来源于目标的量测值的概率为

$$\varepsilon(m_k) = \frac{P_D}{P(m_k)} \sum_{m_e=1}^{m_k} \left\{ \frac{(\lambda V)^{m_k - m_e} \exp(-\lambda V)}{(m_k - m_e)!} \times \frac{(\alpha)^{m_e} \exp(-\alpha)}{m_e!} \right\}. \quad (15)$$

将量测值向量写为 $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{Z}_k(i) : i = 1, 2, \dots, m_k\}$, θ 表示 m_k 个量测值中有 m_e 个真实测量的所有组合, 测量值的维数为 n , 则有

$$P(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k, m_k, m_e) = (1 - \varepsilon(m_k))P(\{\mathbf{Z}_k(j)\}_{j=1}^{m_k} | \text{all false}; \mathbf{X}) + \sum_{\theta} \frac{\varepsilon(m_k)(m_k - m_e)!m_e!}{m_k!} P(\{\mathbf{Z}_k(j)\}_{j=1}^{m_k} | \{\mathbf{Z}_k(i)\}_{i=1}^{m_e} \text{from target others clutter}; \mathbf{X}) = \frac{1 - \varepsilon(m_k)}{V^{m_k}} + \frac{(m_k - m_e)!m_e!\varepsilon(m_k)}{m_k!V^{m_k - m_e}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{|2\pi\mathbf{R}_k|})^{m_e}} \times \sum_{\theta} \exp\left\{ \sum_{i=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2}[\mathbf{Z}_k^{\theta}(i) - h_k(\mathbf{X}_k)]^T \mathbf{R}_k^{-1} \times [\mathbf{Z}_k^{\theta}(i) - h_k(\mathbf{X}_k)] \right\} \right\}. \quad (16)$$

所以有

$$\nabla_{\mathbf{X}_k} \{\ln P(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k, m_k, m_e)\} = \beta(\mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_k) \cdot \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \sum_{\theta} \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta}(i)). \quad (17)$$

其中 \mathbf{H}_k 为观测方程的雅阁比矩阵, 且有

$$\beta(\mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_k) = \frac{1}{P(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k, m_k, m_e)} \times \frac{(m_k - m_e)!m_e!\varepsilon(m_k)}{m_k!V^{m_k - m_e}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{|2\pi\mathbf{R}_k|})^{m_e}}, \quad (18)$$

$$\varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta}(i)) = \left\{ \sum_{i=1}^{m_e} [\mathbf{Z}_k^{\theta}(i) - h_k(\mathbf{X}_k)] \right\} \times \exp \sum_{i=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2}[\mathbf{Z}_k^{\theta}(i) - h_k(\mathbf{X}_k)]^T \mathbf{R}_k^{-1} \times [\mathbf{Z}_k^{\theta}(i) - h_k(\mathbf{X}_k)] \right\}. \quad (19)$$

进而可以得出

$$\mathbf{J}_Z(k : m_k : m_e) =$$

$$E_{\mathbf{X}_k} \left[E_{\mathbf{Z}_k} \left[\left[\beta(\mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_k) \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \sum_{\theta_1} \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_1}(i)) \right] \times \left[\sum_{\theta_2} \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_2}(j))^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \beta(\mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_k) \right] \middle| \mathbf{X}_k \right] \right] = E_{\mathbf{X}_k} [\mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_k(m_k, m_e) \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k]. \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{Q}_k(m_k, m_e) = E_{\mathbf{Z}_k} \left[\beta(\mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_k)^2 \mathbf{R}_k^{-1} \times \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_1}(i)) \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_2}(j))^T \middle| \mathbf{X}_k \right]. \quad (21)$$

当 $\mathbf{Q}_k(m_k, m_e)$ 与 \mathbf{X}_k 无关时, 即为一个常量信息约减因子 (IRF). 本文的目的是通过化简 $\mathbf{Q}_k(m_k, m_e)$ 求出 $\mathbf{J}_Z(k : m_k : m_e)$, 继而求出 Fisher 信息子阵 $\{\mathbf{J}_k\}$.

2 IRF 的计算

在一定的假设下, $\mathbf{Q}_k(m_k, m_e)$ 与 \mathbf{X}_k 无关, 可以得到一个常量信息约减因子 (IRF), 在本模块中, 对 $\mathbf{Q}_k(m_k, m_e)$ 进行简化, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k(m_k, m_e) &= \int_{\mathbf{Z}_k(1) \in A} \cdots \int_{\mathbf{Z}_k(m_k) \in A} \beta(\mathbf{Z}_k, \mathbf{X}_k)^2 \times \\ &\mathbf{R}_k^{-1} \sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_1}(i)) \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_2}(j))^T \times \\ &P(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k, m_k, m_e) d\mathbf{Z}_k(m_k) \cdots d\mathbf{Z}_k(1) = \\ &\frac{(m_k - m_e)!^2 m_e!^2 \varepsilon(m_k)^2}{m_k!^2 V^{2m_k - 2m_e} |2\pi \mathbf{R}_k|^{m_e}} \times \\ &\sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \int_{\mathbf{Z}_k(1) \in A} \cdots \int_{\mathbf{Z}_k(m_k) \in A} \times \\ &\frac{\mathbf{R}_k^{-1} \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_1}(i)) \varphi(\mathbf{Z}_k^{\theta_2}(j))^T}{P(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k, m_k, m_e)} \times \\ &d\mathbf{Z}_k(m_k) \cdots d\mathbf{Z}_k(1). \end{aligned} \quad (22)$$

令

$$\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta = \mathbf{Z}_k^\theta(r) - h_k(\mathbf{X}_k), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k(m_k, m_e) &= \frac{(m_k - m_e)!^2 m_e!^2 \varepsilon(m_k)^2}{m_k!^2 V^{2m_k - 2m_e} |2\pi \mathbf{R}_k|^{m_e}} \times \\ &\sum_{\theta_1} \sum_{\theta_2} \int_{\tilde{\mathbf{Z}}_1 \in A'} \cdots \int_{\tilde{\mathbf{Z}}_{m_k} \in A'} \times \\ &\mathbf{R}_k^{-1} \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{Z}}_i^{\theta_1}) \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{Z}}_j^{\theta_2})^T \left/ \left(\frac{1 - \varepsilon(m_k)}{V^{m_k}} + \frac{(m_k - m_e)! m_e! \varepsilon(m_k)}{m_k! V^{m_k - m_e} (\sqrt{|2\pi \mathbf{R}_k|})^{m_e}} \right) \right. \times \\ &\left. \sum_{\theta} \exp \left\{ \sum_{r=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta] \right\} \right\} \right) \times \\ &d\tilde{\mathbf{Z}}_{m_k} \cdots d\tilde{\mathbf{Z}}_1. \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{Z}}_i^{\theta_1}) = \left[\sum_{i=1}^{m_e} \tilde{\mathbf{Z}}_i^{\theta_1} \right] \exp \left\{ \sum_{i=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{Z}}_i^{\theta_1}]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\tilde{\mathbf{Z}}_i^{\theta_1}] \right\} \right\}, \quad (25)$$

A' 表示在式 (23) 的转换下, 与区域 A 相匹配的区域的转换.

假设 1 将量测限制到一个确定的门限, 如

$$\begin{aligned} |\mathbf{Z}_k^\theta(i)^j - h_k(\mathbf{X}_k)^j| &< g\sigma_j, \\ i &= 1, 2, \dots, m_e, j = 1, 2, \dots, n, \\ \theta &= 1, 2, \dots, \frac{m_k!}{m_e!(m_k - m_e)!}. \end{aligned} \quad (26)$$

其中: n 为数据的维数, $\mathbf{Z}_k^\theta(i)^j$ 为测量值 $\mathbf{Z}_k^\theta(i)$ 的第 j 个成分, $h_k(\mathbf{X}_k)^j$ 为 $h_k(\mathbf{X}_k)$ 的第 j 个成分, σ_j 为测量向量第 j 个成分的误差标准差.

假设 2 测量值是 n 维的, 各维都是相互正交的.

在这种假设下, A' 可以用一个超立方体表示为

$$A' = [-g\sigma_1, -g\sigma_1] \times \cdots \times [-g\sigma_n, -g\sigma_n]. \quad (27)$$

该超立方体有以下体积:

$$V_g = (2g)^n \prod_{i=1}^n \sigma_i = (2g)^n \sqrt{|\mathbf{R}_k|}. \quad (28)$$

式 (24) 是与 X_k 不相关的, 且当 $i \neq j$ 时, 被积函数是奇对称的, 积分区域是对称的, 所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k(m_k, m_e) &= \frac{m_e^2 \varepsilon_g(m_k)^2}{m_k V_g^{2m_k - 2m_e} |2\pi \mathbf{R}_k|^{m_e}} \times \\ &\int_{-g\sigma_n}^{-g\sigma_n} \cdots \int_{-g\sigma_1}^{-g\sigma_1} \cdots \int_{-g\sigma_n}^{-g\sigma_n} \cdots \int_{-g\sigma_1}^{-g\sigma_1} \times \\ &\mathbf{R}_k^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \exp(-m_e \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \mathbf{R}_k^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_1) / \\ &\left(\frac{1 - \varepsilon_g(m_k)}{V_g^{m_k}} + \frac{(m_k - m_e)! m_e! \varepsilon_g(m_k)}{m_k! V_g^{m_k - m_e} (\sqrt{|2\pi \mathbf{R}_k|})^{m_e}} \right) \times \\ &\sum_{\theta} \exp \left\{ \sum_{r=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta] \right\} \right\} d\tilde{\mathbf{Z}}_{m_k} \cdots d\tilde{\mathbf{Z}}_1. \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\varepsilon_g(m_k)$ 为在 m_k 个观测值中存在真实测量的概率, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(m_k) &= \frac{P_D}{P_g(m_k)} \cdot \sum_{m_e=1}^{m_k} \left\{ \frac{(\lambda V_g)^{m_k - m_e} \cdot \exp(-\lambda V_g)}{(m_k - m_e)!} \times \frac{(\alpha)^{m_e} \cdot \exp(-\alpha)}{m_e!} \right\}; \end{aligned} \quad (30)$$

$P_g(m_k)$ 为观测个数的先验分布, 有

$$\begin{aligned} P_g(m_k) &= (1 - P_D^g) \cdot \frac{(\lambda V_g)^{m_k} \exp(-\lambda V_g)}{m_k!} + \end{aligned}$$

$$P_D^g \sum_{m_e=1}^{m_k} \left(\frac{(\lambda V_g)^{m_k-m_e} \exp(-\lambda V_g)}{(m_k - m_e)!} \times \frac{(\alpha)^{m_e} \exp(-\alpha)}{m_e!} \right), \quad (31)$$

P_D^g 为在区域 A' 中的检测概率, 当 g 取一个较大值时^[21], 认为

$$P_D^g \approx P_D. \quad (32)$$

假设 \mathbf{R}_k 是一个对角矩阵, 有

$$\mathbf{R}_k = \text{diag}(\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \cdots \ \sigma_n^2). \quad (33)$$

$\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta$ 表示为

$$\tilde{\mathbf{Z}}_r^\theta = (\tilde{Z}_r^\theta[1] \ \cdots \ \tilde{Z}_r^\theta[n])^T. \quad (34)$$

那么有

$$\begin{aligned} [Q_k(m_k, m_e)]_{ab} = & \frac{m_e^2 \varepsilon_g(m_k)^2}{m_k V_g^{2m_k-2m_e} |2\pi \mathbf{R}_k|^{m_e}} \times \\ & \int_{-g\sigma_n}^{-g\sigma_n} \cdots \int_{-g\sigma_1}^{-g\sigma_1} \cdots \int_{-g\sigma_n}^{-g\sigma_n} \cdots \int_{-g\sigma_1}^{-g\sigma_1} \times \\ & \sigma_a^{-2} \tilde{Z}_1[a] \tilde{Z}_1[b] \exp \left\{ -m_e \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_1[i]^2 \sigma_i^{-2} \right\} / \\ & \left(\frac{1 - \varepsilon_g(m_k)}{V_g^{m_k}} + \frac{(m_k - m_e)! m_e! \varepsilon_g(m_k)}{m_k! V_g^{m_k-m_e} (\sqrt{|2\pi \mathbf{R}_k|})^{m_e}} \right) \times \\ & \sum_{\theta} \exp \left\{ \sum_{r=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_r^\theta[i]^2 \sigma_i^{-2} \right\} \right\} d\tilde{\mathbf{Z}}_{m_k} \cdots d\tilde{\mathbf{Z}}_1, \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $[Q_k(m_k, m_e)]_{ab}$ 为 $\mathbf{Q}_k(m_k, m_e)$ 矩阵中第 a 行第 b 列的元素. 当 $a \neq b$ 时, 式 (35) 中的被积函数是奇对称的, 积分区域是对称的, 所以有

$$[Q_k(m_k, m_e)]_{ab} = 0, \quad a \neq b. \quad (36)$$

作如下变换:

$$\hat{Z}_j[i] = \frac{\tilde{Z}_j[i]}{\sigma_i}, \quad j = 1, 2, \cdots, m_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad (37)$$

则式 (35) 可以化简为

$$\begin{aligned} [Q_k(m_k, m_e)]_{aa} = & \frac{m_e^2 \varepsilon_g(m_k)^2 |\mathbf{R}_k|^{0.5m_k-m_e}}{m_k V_g^{2m_k-2m_e} (2\pi)^{nm_e}} \times \\ & \int_{-g}^{-g} \cdots \int_{-g}^{-g} \cdots \int_{-g}^{-g} \cdots \int_{-g}^{-g} \times \\ & \hat{Z}_1[a]^2 \exp \left\{ -m_e \sum_{i=1}^n \hat{Z}_1[i]^2 \right\} / \\ & \left(\frac{1 - \varepsilon_g(m_k)}{V_g^{m_k}} + \frac{(m_k - m_e)! m_e! \varepsilon_g(m_k)}{m_k! V_g^{m_k-m_e} \sqrt{|2\pi \mathbf{R}_k|}^{m_e}} \right) \times \\ & \sum_{\theta} \exp \left\{ \sum_{r=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \hat{Z}_r^\theta[i]^2 \right\} \right\} d\hat{\mathbf{Z}}_{m_k} \cdots d\hat{\mathbf{Z}}_1, \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $a = 1, 2, \cdots, n$. 令

$$q_k(m_k, m_e) = [Q(m_k, m_e)]_{aa}, \quad a = 1, 2, \cdots, n. \quad (39)$$

有

$$\mathbf{Q}_k(m_k, m_e) = q_k(m_k, m_e) \times \mathbf{I}_n. \quad (40)$$

其中: \mathbf{I}_n 为 $n \times n$ 的单位矩阵; $q_k(m_k, m_e)$ 与 \mathbf{X}_k 不相关, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_Z(k : m_k : m_e) = & \\ q_k(m_k, m_e) E_{\mathbf{X}_k} [(\mathbf{H}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k], \end{aligned} \quad (41)$$

$q_k(m_k, m_e)$ 可以通过如下蒙特卡洛的方法计算^[11]:

$$\begin{aligned} q_k(m_k, m_e) \approx & \frac{(2g)^{nm_k} m_e^2 \varepsilon_g(m_k)^2 |\mathbf{R}_k|^{0.5m_k-m_e}}{m_k V_g^{2m_k-2m_e} (2\pi)^{nm_e}} \cdot \frac{1}{N_s} \times \\ & \sum_{l=1}^{N_s} U_{1,1}[l]^2 \exp \left\{ -m_e \sum_{j=1}^n U_{1,j}[l]^2 \right\} / \\ & \left(\frac{1 - \varepsilon_g(m_k)}{V_g^{m_k}} + \frac{(m_k - m_e)! m_e! \varepsilon_g(m_k)}{m_k! V_g^{m_k-m_e} (\sqrt{|2\pi \mathbf{R}_k|})^{m_e}} \right) \times \\ & \sum_{\theta} \exp \left\{ \sum_{r=1}^{m_e} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n U_{r,j}^\theta[l]^2 \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

$U_{i,j}[l]$ ($i = 1, 2, \cdots, m_k, j = 1, 2, \cdots, n, l = 1, 2, \cdots, N_s$) 是一个独立同分布的随机变量, 且服从 $[-g, g]$ 的均匀分布. 例如, $U_{i,j}[l] \sim U[-g, g]$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_Z(k) = E_{m_k, m_e} [\mathbf{J}_Z(k : m_k : m_e)] = & \\ \{ E_{m_k, m_e} [q_k(m_k, m_e)] \} \cdot E_{\mathbf{X}_k} (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k) = & \\ \left\{ \sum_{m_k=1}^{\infty} P(m_k) \sum_{m_e=1}^{m_k} P(m_e | m_k) q_k(m_k, m_e) \right\} \times & \\ E_{\mathbf{X}_k} (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k). \end{aligned} \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} P(m_e | m_k) = \frac{P(m_k | m_e) P(m_e)}{P(m_k)} = & \\ \frac{(\lambda V)^{m_k-m_e} \exp(-\lambda V)}{(m_k - m_e)!} \cdot \frac{(\alpha)^{m_e} \exp(-\alpha)}{m_e!} & \\ \frac{1}{P(m_k)}. \end{aligned} \quad (44)$$

令

$$\delta_k = \sum_{m_k=1}^{\infty} P(m_k) \sum_{m_e=1}^{m_k} P(m_e | m_k) q_k(m_k, m_e), \quad (45)$$

式 (43) 可以化简为

$$\mathbf{J}_Z(k) = \delta_k \cdot E_{\mathbf{X}_k} (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k). \quad (46)$$

δ_k 即为全局 IRF.

3 算例分析

假设目标在一个二维平面作匀速直线运动, 目标状态可以表示为 $\mathbf{X}_k = (x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k)^T$, 目标状态演

化方程为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{w}_k, \quad (47)$$

其中 $\mathbf{w}_k \sim N(0, \Sigma_k)$, \mathbf{F}_k 和 Σ_k 为

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\Sigma_k = q \times \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{2} & t \end{bmatrix}, \quad (49)$$

q 为功率谱密度, t 为采样间隔. 测量方程为

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} \\ \arctan\left(\frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}\right) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \quad (50)$$

其中: $(x_0, y_0)^T$ 为观测站位置, 测量误差 \mathbf{v}_k 为一个零均值的高斯随机变量, $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$, 且有

$$\mathbf{R}_k = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2). \quad (51)$$

从模型上看, 线性方程是线性的, 观测方程是非线性的, 要求其雅阁比矩阵, 显然有

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{x_k - x_0}{\sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}} & 0 \\ \frac{-(y_k - y_0)}{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} & 0 \\ \frac{y_k - y_0}{\sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}} & 0 \\ \frac{x_k - x_0}{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

本例中假设

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \text{diag}(10 \ 0.01 \ 10 \ 0.01), \\ g &= 2.5, \ \alpha = 3, \ V_g = 4g^2\sigma_1\sigma_2, \\ q &= 1 \times 10^{-8}, \ N_s = 1 \times 10^4, \ \sigma_1 = 2.5, \\ \sigma_2 &= 1.9, \ x_0 = 0, \ y_0 = 0. \end{aligned}$$

表 1 给出了当杂波密度 $\lambda = 0.005$ 时, 不同检测概率 P_D 得出的 IRF 值.

检测概率	P_D	0.2	0.4	0.6	0.8
IRF	δ_k	0.5421	0.7110	0.8195	0.9075

由表 1 可见: 当检测概率较低时, 测量值是杂波的可能性较大, IRF 较小; 随着检测概率的增加, IRF 也随之增加.

图 1 为杂波密度 $\lambda = 0.005$ 时, 不同 P_D 下测量值中存在真实目标量测的概率 $\varepsilon_g(m_k)$ 随测量个数 m_k 的变化曲线; 图 2 为检测概率 $P_D = 0.8$ 时, 不同的杂波密度 λ 下测量值中存在真实目标量测的概率 $\varepsilon_g(m_k)$ 随测量个数 m_k 的变化曲线.

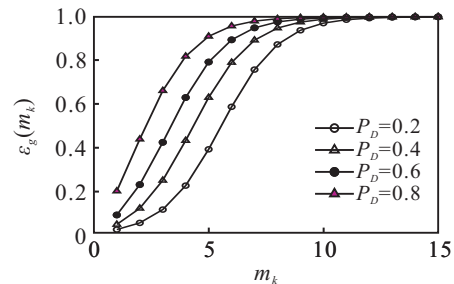


图 1 不同 P_D 下 $\varepsilon_g(m_k)$ 随 m_k 的变化曲线

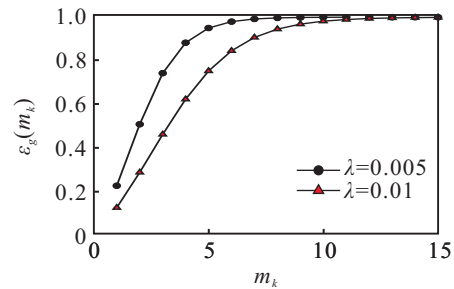


图 2 不同 λ 下 $\varepsilon_g(m_k)$ 随 m_k 的变化曲线

由图 1 可见, 测量值中存在真实目标量测的概率 $\varepsilon_g(m_k)$ 随测量个数 m_k 的增加而增加, 在相同的测量个数下, 检测概率 P_D 越大, 测量值中存在真实目标量测的概率 $\varepsilon_g(m_k)$ 越大. 当 $\lambda = 0.005$, $P_D = 0.2$ 时, 如果某一采样时刻得到测量数据的个数 $m_k \geq 12$, 则 $\varepsilon_g(m_k) \approx 1$, 认为这些数据中一定会存在真实目标的量测. 当 $\lambda = 0.005$, $P_D = 0.8$ 时, 如果某一采样时刻得到测量数据的个数 $m_k \geq 10$, 则 $\varepsilon_g(m_k) \approx 1$, 检测概率 P_D 越大, $\varepsilon_g(m_k)$ 的收敛速率越快. 对于扩展目标, 传感器更容易采集到来自真实目标的数据, $\varepsilon_g(m_k)$ 更容易接近 1.

由图 2 可见, 杂波密度 λ 越大, 在相同的测量个数 m_k 下, 测量值中存在真实目标量测的概率 $\varepsilon_g(m_k)$ 越小. 当 $\lambda = 0.005$, $P_D = 0.8$ 时, 如果某一采样时刻得到测量数据的个数 $m_k \geq 9$, 则 $\varepsilon_g(m_k) \approx 1$. 当 $\lambda = 0.01$, $P_D = 0.8$ 时, 如果某一采样时刻得到测量数据的个数 $m_k \geq 13$, 则 $\varepsilon_g(m_k) \approx 1$. 一般认为这些数据中一定会存在真实目标的量测, 所以杂波密度 λ 越大, $\varepsilon_g(m_k)$ 的收敛速率越慢.

图 3 为杂波密度 $\lambda = 0.005$ 时, 不同检测概率 P_D 下 PCRLB 随采样个数的变化曲线; 图 4 为检测概率 $P_D = 0.8$ 时, 不同的杂波密度 λ 下 PCRLB 随采样个数的变化曲线.

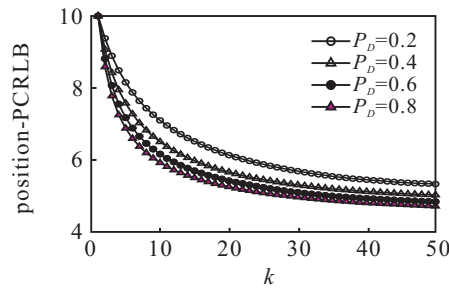


图 3 不同 P_D 下 PCRLB 随采样个数的变化曲线

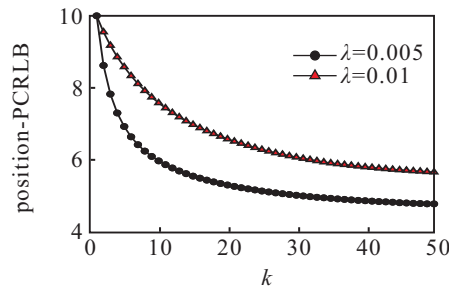


图 4 不同 λ 下 PCRLB 随采样个数的变化曲线

由图3可见,当检测概率一定时,PCRLB随采样个数的增加逐渐收敛,且不同的检测概率 $P_D = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 对PCRLB大小均有影响,但对误差界的收敛速度的影响差异不大.在同一个采样时刻,检测概率 P_D 越大,PCRLB越低.由图4可见,不同的杂波密度 λ 对PCRLB的大小也是有影响的.在同一个采样时刻,杂波密度 λ 越大,PCRLB越大,但对误差界收敛速度的影响差异不大.

4 结 论

本文在以往对点目标研究的基础上研究了单个扩展目标估计的PCRLB,在漏检和杂波的环境中,推导出计算扩展目标PCRLB的公式.假设单个扩展目标的量测个数服从泊松分布,杂波的个数也服从泊松分布,给出了扩展目标跟踪的克拉美罗界的递推形式,并推导出在有漏检和杂波环境下求解PCRLB的方法——IRF.但是,本算法只适用于单个传感器跟踪单个扩展目标的场景,今后的工作是结合多个传感器跟踪多个扩展目标的场景,进一步研究本算法,使本算法有更为广阔的应用空间.

参考文献(References)

[1] Tichavsky, Muravchik C, Nehorai A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete time nonlinear filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(5): 1386-1396.

- [2] Hernandez M, Farina A, Ristic B. PCRLB for tracking in cluttered environments: Measurement sequence conditioning approach[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(2): 680-704.
- [3] Hernandez M, Benavoli A, Graziano A, et al. Performance measures and MHT for tracking move-stop-move targets with MTI sensors[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 996-1025.
- [4] Tharmarasa R, Kirubarajan T, Hernandez M, et al. PCRLB-based multisensor array management for multitarget tracking[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(2): 539-555.
- [5] 巫春玲, 韩崇昭. 用于弹道目标跟踪的有限差分扩展卡尔曼滤波算法[J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(2): 143-146.
(Wu C L, Han C Z. Finite-difference extended Kalman filtering algorithm for ballistic target tracking[J]. J of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(2): 143-146.)
- [6] 刘学, 焦淑红. 拟蒙特卡洛自适应粒子滤波的机载无源定位算法[J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(9): 34-39.
(Liu X, Jiao S H. Quasi Monte-Carlo adaptive particle filter for airborne passive location[J]. J of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(9): 34-39.)
- [7] Koch W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(3): 1042-1059.
- [8] Mahler R. PHD filters for nonstandard targets: I extended targets[C]. Proc of the 12th Int Conf on Information Fusion. Piscataway: IEEE, 2009: 915-921.
- [9] Lian Feng, Han Chongzhao, Liu Weifeng, et al. Unified cardinalized probability hypothesis density filters for extended targets and unresolved targets[J]. Signal Processing, 2012, 92(7): 1729-1744.
- [10] Kevin Gilholm, Simon Godsill, Simon Maskell, et al. Poisson models for extended target and group tracking[C]. Proc of the SPIE Conf on Signal and Data Processing of Small Targets. San Diego: SPIE, 2005, 5913: 230-241.
- [11] Press W, Teukolsky S, Vetterling W, et al. Numerical recipes in C[M]. 2nd ed. Cambridge: MIT Press, 1997: 315-317.

(责任编辑: 郑晓蕾)