

## Markov 系统矩阵未知情况下的控制器设计

王国良, 秦 奋

(辽宁石油化工大学 信息与控制工程学院, 辽宁 抚顺 113001)

**摘要:** 针对 Markov 系统矩阵参数未知的实际情况, 提出一种基于状态反馈控制与自适应控制相结合的控制方法. 基于线性矩阵不等式技术给出相应控制器参数的求解条件. 与现有大多数自适应控制方法相比, 所提方法不仅使估计误差几乎处处有界, 而且原系统的系统状态几乎处处渐近稳定, 具有较好的收敛特性. 在所得结果的基础上, 进一步讨论了转移速率部分未知时的相关控制问题. 数值算例验证了所提出的设计方法的有效性.

**关键词:** Markov 跳变系统; 系统矩阵未知; 自适应控制; 转移速率部分未知; 几乎处处渐近稳定

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Stabilization of Markovian jump systems with unknown system matrices

WANG Guo-liang, QIN Fen

(School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University, Fushun 113001, China. Correspondent: WANG Guo-liang, E-mail: gliangwang@aliyun.com)

**Abstract:** For the stabilization problem of Markovian jump systems, whose system matrices are unknown, a kind of controller containing state feedback control and adaptive control simultaneously is proposed. Based on the linear inequality matrix technique, the corresponding parameters needed in the designed controller can be solved easily. Compared with some existing adaptive methods, not only the estimated errors are bounded almost surely, but also the states of the resulting closed-loop system are asymptotically stable almost surely. In this sense, the adaptive control method has a better convergence performance in terms of system states asymptotically stable in probability. Furthermore, more extension on the transition rate matrix being partially unknown is considered. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** Markovian jump systems; unknown system matrices; adaptive control; partially unknown transition rate matrix; almost sure asymptotic stability

### 0 引 言

在航空控制、目标跟踪、机器人学、制造系统等实际动力学系统中, 由于故障、环境突变、非线性系统工作点的改变等原因, 系统常会发生结构上的突变. 这些系统的状态受马尔科夫过程支配, 简称为 Markov 跳变系统. 在过去的几十年里, Markov 跳变系统中的许多问题都得到了很好的研究, 比如稳定性和稳定<sup>[1-9]</sup>、 $H_\infty$  控制和滤波<sup>[10-13]</sup>、最优跟踪与控制问题<sup>[14-16]</sup>、滑模控制<sup>[17]</sup>、自适应控制<sup>[18-19,21]</sup>.

上述文献中的一个重要前提是系统的系统矩阵是已知的. 然而, 在实际控制问题中, 尤其是在不稳定或干扰的情况下, 系统矩阵有时是很难获得的, 此时

基于系统矩阵的方法将不再适用, 需要重新考虑. 通过查阅现有相关文献可知, 现有的控制器设计方法大都针对系统矩阵可利用的情形. 因此, 就理论研究意义和实际应用方面而言, 研究系统矩阵未知情况下的控制问题具有重要意义.

首先, 为了解决上述情况, 提出一种基于状态反馈和自适应控制相结合的新型控制方法, 在此控制器作用下, 相应闭环系统的状态将几乎处处渐近稳定; 然后, 对转移速率部分未知时的相关控制问题进行阐述, 相应控制器的参数均可通过求解线性矩阵不等式 (LMI) 得到; 最后, 通过仿真算例验证了所提出的设计方法的正确性. 与现有方法相比, 本文方法具有以下

收稿日期: 2015-06-20; 修回日期: 2015-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104066, 61374043, 61473140); 中国博士后科学基金项目(2012M521086); 辽宁省高等学校优秀人才支持计划项目(LJQ2013040); 辽宁省自然科学基金项目(2014020106).

作者简介: 王国良(1981—), 男, 副教授, 博士, 从事广义马尔科夫系统的分析与控制等研究; 秦奋(1993—), 男, 从事 Markov 跳变系统、广义系统分析与设计的研究.

优势和特点: 1) 所提方法适用于系统矩阵未知的一般情况; 2) 所及基于状态反馈和自适应控制的方法不仅使得自适应辅助系统几乎处处有界, 而且系统状态向量  $x(t)$  可以几乎处处渐近稳定.

**注 1**  $\mathbf{R}^{m \times n}$  为所有  $m \times n$  维实数矩阵的集合;  $\emptyset$  为空集;  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  为随机变量的期望算子;  $|x|$  和  $\|A\|$  分别为向量  $|x|$  的 2-范数和矩阵  $\|A\|$  的  $F$ -范数;  $u \vee v$  为实数  $u$  和  $v$  中的最大值;  $u \wedge v$  为  $u$  和  $v$  中的最小值;  $\lambda_{\min}(Q)$  和  $\lambda_{\max}(Q)$  分别为矩阵  $Q$  的最小和最大特征值;  $\mathbf{C}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}_+)$  为从集合  $\mathbf{R}^n$  到集合  $\mathbf{R}_+$  的所有非负函数集合;  $\mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}; \mathbf{R}_+)$  为在  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}$  上的所有非负函数  $V(x, t, \eta_t)$  的集合, 其中  $V(x, t, \eta_t)$  对状态向量  $x(t)$  二阶可导, 对于时间  $t$  一阶可导;  $\mathcal{L}V$  为  $V(x, t, \eta_t)$  从  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}$  到  $\mathbf{R}^n$  的弱无穷小算子;  $\mathbf{L}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$  为连续函数族  $\gamma: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ , 使  $\int_0^\infty \gamma(t) dt < \infty$ , 如果该函数是连续的, 严格单调递增并且  $\gamma(0) = 0$ , 则称函数  $\gamma: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  属于  $K$  类函数, 如果  $\gamma(\cdot) \in K$  且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\gamma(t) \rightarrow \infty$ , 则称函数  $\gamma: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  属于  $K_\infty$ .

## 1 问题描述

在完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$  上考虑 Markov 系统, 即

$$\dot{x}(t) = A(\eta_t)x(t) + u(t). \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  为状态向量,  $u(t)$  为控制输入. 系统模态信号  $\{\eta_t, t \geq 0\}$  是一个在有限集合  $\mathbf{S} = \{1, 2, \dots, N\}$  里取值的右连续 Markov 链, 其转移速率为

$$\mathbf{P}\{\eta_{t+\Delta} = j | \eta_t = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta + o(\Delta), & j \neq i; \\ 1 + \pi_{ii}\Delta + o(\Delta), & j = i. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\Delta > 0, \lim_{h \rightarrow 0^+} (o(\Delta)/\Delta) = 0$ ; 对于  $i, j \in \mathbf{S}$ ,  $i \neq j$ , 有  $\pi_{ij} \geq 0, \pi_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}$ . 与现有大多数文献不同, 本文中系统矩阵  $A(\eta_t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  完全未知, 并满足

$$\|A(\eta_t)\| \leq \alpha^*(\eta_t), \quad (3)$$

其中  $\alpha^*(\eta_t)$  仍然未知. 令  $\alpha^* = \max_{i \in \mathbf{S}} \{\alpha_i\}$ , 可知  $\alpha^*$  同样未知.

可以看出, 系统 (1) 中矩阵  $A(\eta_t)$  完全未知使得状态反馈控制无法直接作用于系统 (1). 针对系统矩阵完全未知的一般条件, 本文提出一种控制方法使相应闭环系统渐近稳定. 首先, 定义如下非线性系统:

$$\dot{x}(t) = A(\eta_t)x(t) + f(x(t), t, \eta_t). \quad (4)$$

其中: 非线性函数  $f(x(t), t, \eta_t)$  满足局部 Lipschitz 条件, 即  $\forall (t, i) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}, x, \bar{x} \in \mathbf{R}^n$ , 对于任意  $k > 0$ , 当  $|x| \vee |\bar{x}| \leq k$  时, 存在  $C_k > 0$ , 使得

$$|f(x, t, i) - f(\bar{x}, t, i)| \leq C_k |x - \bar{x}|, \quad (5)$$

并且  $f(0, t, i) = 0$ .

**定义 1** 如果系统 (4) 的解  $x(t; x_0, \eta_0)$  满足

$$\sup_{t \geq t_0} |x(t; x_0, \eta_0)| < \infty, \text{ a.s.}$$

其中  $x_0 = x(t_0) \in \mathbf{R}^n$  和  $\eta_0 = \eta(t_0) \in \mathbf{S}$  为初始条件和初始模态, 则称系统 (4) 是几乎处处有界的.

**定义 2** 如果系统的解  $x(t; x_0, \eta_0)$  对于所有初始条件  $x_0 = x(t_0) \in \mathbf{R}^n$  和初始模态  $\eta_0 = \eta(t_0) \in \mathbf{S}$  满足

$$\mathbf{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; x_0, \eta_0)| = 0\} = 1,$$

则称系统 (4) 是几乎处处渐近稳定的.

**引理 1**<sup>[21]</sup> 如果存在函数  $V \in \mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}; \mathbf{R}_+)$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty, \gamma_3 \in \mathcal{K}, \rho \in \mathbf{L}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$  及正数  $\varepsilon > 0$  满足

$$\begin{aligned} \gamma_1(|x|) &\leq V(x, t, i) \leq \gamma_2(|x|), \\ \forall (x, t, i) &\in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathcal{L}V(x, t, i) \leq -\gamma_3(|x|) + \rho(t)\varepsilon, \quad (7)$$

则称系统 (4) 是几乎处处渐近稳定的, 即对于任意的初始条件  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  和初始模态  $\eta_0 \in \mathbf{S}$ , 系统 (4) 在区间  $[0, \infty)$  存在唯一解且几乎处处渐近稳定.

## 2 主要内容

考虑到系统 (1) 的系统矩阵  $A(\eta_t)$  完全未知, 本文提出一种基于状态反馈与自适应控制相结合的新方法, 进而使得相应闭环系统渐近稳定. 拟设计的控制器  $u(t)$  的形式如下:

$$u(t) = B(\eta_t)K(\eta_t)x(t) + g(x(t), t, \eta_t). \quad (8)$$

其中:  $B(\eta_t) \in \mathbf{R}^{n \times m}$  为系统给定控制矩阵,  $K(\eta_t)$  为待求的控制增益,  $g(x(t), t, \eta_t)$  为待确定的非线性函数. 由控制器 (8) 的表达式可以看出, 本文控制器是由线性和非线性两部分组成. 其中: 线性状态反馈控制器  $B(\eta_t)K(\eta_t)x(t)$  的作用是使系统状态  $x(t)$  渐近稳定, 即系统状态“1”概率渐近收敛到 0; 与此同时, 非线性函数  $g(x(t), t, \eta_t)$  用来处理未知系统矩阵, 即估计未知系统矩阵  $A(\eta_t)$  的未知范数  $\alpha^*(\eta_t)$ . 本文的关键与难点在于如何构造非线性函数  $g(x(t), t, \eta_t)$  并给出所设计的控制器 (8) 的 LMI 求解条件, 同时相应闭环系统的系统状态  $x(t; x_0, \eta_0)$  渐近稳定. 这里, 非线性函数  $g(x(t), t, \eta_t)$  的作用将通过自适应控制的方法予以实现. 基于上述事实, 所构造的控制器 (8) 又称状态反馈与自适应控制相结合的控制. 在本文中, 控制器 (8) 中的非线性函数  $g(x(t), t, \eta_t)$  形式如下:

$$g(x(t), t, i) = -\frac{P_i^{-1}x(t)\mu^2\alpha^2(t)|x(t)|^2}{\mu\alpha(t)|x(t)|^2 + \rho(t)}, \quad \forall \eta_t = i \in \mathbf{S}. \quad (9)$$

其中:  $\mu = \max_{i \in \mathbf{S}} \{\|P_i\|\}$ ,  $\rho(t) \in \mathbf{L}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$  是一个任意给定的函数. 式 (9) 中的正定矩阵  $P_i$  为待设计的对称正定矩阵, 可由如下条件求出:

$$P_i B_i K_i + (B_i K_i)^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j < 0, \forall i \in \mathbf{S}. \quad (10)$$

等价于存在  $X_i > 0$  和  $Y_i$ , 满足

$$\begin{bmatrix} \Omega_{i1} & \Omega_{i2} \\ * & \Omega_{i3} \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_{i1} &= B_i Y_i + Y_i^T B_i^T + \pi_{ii} X_i, \\ \Omega_{i2} &= [\sqrt{\pi_{i1}} X_i \cdots \sqrt{\pi_{i(i-1)}} X_i \sqrt{\pi_{i(i+1)}} X_i \cdots \sqrt{\pi_{iN}} X_i], \\ \Omega_{i3} &= -\text{diag}\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N\}, \\ X_i &= P_i^{-1}, Y_i = K_i X_i. \end{aligned}$$

函数  $\alpha(t) \in \mathbf{R}_+$  是未知参数  $\alpha^* \in \mathbf{R}_+$  的估计值, 可由如下更新律进行更新:

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma \rho(t) \alpha(t) + 2\gamma \mu |x(t)|^2. \quad (12)$$

令  $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) - \alpha^*$ , 系统 (12) 可写为

$$\dot{\tilde{\alpha}}(t) = -\gamma \rho(t) \tilde{\alpha}(t) + 2\gamma \mu |x(t)|^2 - \gamma \rho(t) \alpha^*, \quad (13)$$

初始条件  $\tilde{\alpha}_0 \in \mathbf{R}^+$  有界.

**注 2** 虽然所构造的控制器 (8) 由线性和非线性两部分组成, 但这两部分所需要的相关参数均可通过求解 LMI 条件得到. 具体过程如下: 对于线性控制器  $B(\eta_t)K(\eta_t)x(t)$  中的待求参数  $K(\eta_t)$  而言, 可通过求解 LMI 条件 (11) 得到; 另一方面, 由表达式 (9) 可知, 非线性函数  $g(x(t), t, \eta_t)$  由  $X(\eta_t) = P^{-1}(\eta_t) \cdot \mu \cdot x(t) \cdot |x(t)| \cdot \alpha(t)$  以及  $\rho(t)$  组成,  $|x(t)|$  可由系统状态变量  $x(t)$  直接得出,  $\rho(t) \in \mathbf{L}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$  为任意给定函数, 函数  $\alpha(t) \in \mathbf{R}_+$  将由更新律 (12) 给出, 矩阵  $X(\eta_t)$  可通过求解 LMI (11) 得到, 从而进一步得到  $P^{-1}(\eta_t)$  和  $\mu = \max_{i \in \mathbf{S}} \{ \|P_i\| \}$ . 因此, 基于上述事实, 称控制器 (8) 的相关参数可以通过求解 LMIs 得到.

**定理 1** 通过选取适当的设计参数  $\gamma$  和  $\rho(t)$ , 由式 (1)、(8) 和 (13) 形成的自适应闭环辅助系统在区间  $[0, \infty)$  上有唯一解  $(x, \tilde{\alpha})(t; x_0, \eta_0, \alpha_0)$ , 且几乎处处有界. 特别地,  $x(t)$  几乎处处渐近稳定.

**证明** 对于由式 (1)、(8) 和 (13) 形成的自适应闭环辅助系统, 选取如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V((x, \tilde{\alpha})(t), t, \eta_t = i) &= \\ x^T(t) P_i x(t) &+ \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^T(t) \gamma^{-1} \tilde{\alpha}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

其中:  $P_i > 0, \forall i \in \mathbf{S}$  是式 (10) 的解;  $\gamma > 0$  是任意给定的常数. 对于任意的  $i \in \mathbf{S}$ , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V((x, \tilde{\alpha})(t), t, \eta_t) &= \\ 2x^T(t) P_i \dot{x}(t) &+ x^T(t) \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j x(t) + \tilde{\alpha}^T(t) \gamma^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}(t) = \\ x^T(t) \left( P_i B_i K_i &+ K_i^T B_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j \right) x(t) + \\ 2x^T(t) P_i (A_i x(t) &+ g(x(t), t, i)) + \tilde{\alpha}^T(t) \gamma^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}(t) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\xi |x(t)|^2 &+ 2\mu \alpha^* |x(t)|^2 + 2x^T(t) P_i g(x, t) + \\ \tilde{\alpha}^T(t) \gamma^{-1} (-\gamma \rho(t) \tilde{\alpha}(t) &+ 2\gamma \mu |x(t)|^2 - \gamma \rho(t) \alpha^*) = \\ -\xi |x(t)|^2 &+ 2\mu \alpha(t) |x(t)|^2 + 2x^T(t) P_i g(x, t) + \\ \tilde{\alpha}^T(t) (-\rho(t) \tilde{\alpha}(t) - \rho(t) \alpha^*). \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\xi = \min_{i \in \mathbf{S}} \lambda_{\min}(-\bar{P}_i),$$

$$\bar{P}_i = P_i B_i K_i + K_i^T B_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j.$$

考虑到

$$0 \leq \frac{ab}{a+b} \leq a, \forall a > 0, b \geq 0, \quad (16)$$

并将式 (9) 代入 (15), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x(t), t, i) &\leq \\ -\xi |x(t)|^2 &+ 2\mu \alpha(t) |x(t)|^2 - \frac{2\mu^2 \alpha^2(t) |x(t)|^4}{\mu \alpha(t) |x(t)|^2 + \rho(t)} + \\ \tilde{\alpha}^T(t) (-\rho(t) \tilde{\alpha}(t) - \rho(t) \alpha^*) &= \\ -\xi |x(t)|^2 &+ \frac{2\mu \alpha(t) \rho(t) |x(t)|^2}{\mu \alpha(t) |x(t)|^2 + \rho(t)} + \\ \tilde{\alpha}^T(t) (-\rho(t) \tilde{\alpha}(t) - \rho(t) \alpha^*) &\leq \\ -\xi |x(t)|^2 &+ 2\rho(t) + \tilde{\alpha}^T(t) (-\rho(t) \tilde{\alpha}(t) - \rho(t) \alpha^*) \leq \\ -\xi |x(t)|^2 &+ \rho(t) \epsilon, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\epsilon = 2 + \frac{1}{4} |\alpha^*|^2$ . 由引理 1 可知, 由式 (1)、(8) 和 (13) 描述的自适应闭环辅助系统在区间  $[0, \infty)$  上有唯一解  $(x, \tilde{\alpha})(t; x_0, \eta_0, \alpha_0)$ , 且几乎处处有界,  $x(t)$  几乎处处渐近稳定. 值得说明的是, 由式 (1)、(8) 和 (13) 形成的闭环系统含有非线性项, 例如  $g(x(t), t, \eta_t)$ . 而引理 1 成立的前提条件是非线性项  $f(x(t), t, \eta_t)$  满足局部 Lipschitz 条件 (5), 即

$$\tilde{f}((x, \tilde{\alpha}), t, \eta_t) = \begin{bmatrix} g(x(t), t, \eta_t) \\ 2\gamma \mu |x(t)|^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

满足局部 Lipschitz 条件. 对于任意  $(t, i) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}$  和  $(x_1, \tilde{\alpha}_1), (x_2, \tilde{\alpha}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$  且  $|(x_1, \tilde{\alpha}_1)| \vee |(x_2, \tilde{\alpha}_2)| \leq k$ , 有

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x_1, \tilde{\alpha}_1, t, i) - \tilde{f}(x_2, \tilde{\alpha}_2, t, i)| &\leq \\ C_k |(x_1, \tilde{\alpha}_1) - (x_2, \tilde{\alpha}_2)|, \end{aligned} \quad (19)$$

从而相应的自适应辅助系统存在唯一解  $(x, \tilde{\alpha})(t)$ . 当  $|(x_1, \tilde{\alpha}_1)| \vee |(x_2, \tilde{\alpha}_2)| \leq k$  时, 非线性项  $g(x(t), t, \eta_t)$  满足

$$\begin{aligned} |g((x_1, \tilde{\alpha}_1)) - g((x_2, \tilde{\alpha}_2))| &\leq \\ a_k^1 |\tilde{\alpha}_1^2 x_1 |x_1|^2 - \tilde{\alpha}_2^2 x_2 |x_2|^2| &= \\ a_k^1 |\tilde{\alpha}_1^2 x_1 |x_1|^2 - \tilde{\alpha}_2^2 x_1 |x_1|^2 - \tilde{\alpha}_2^2 x_2 |x_2|^2 &+ \tilde{\alpha}_2^2 x_1 |x_1|^2| \leq \\ a_k^2 |\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2| + a_k^3 |x_1 - x_2| &\leq \\ C_k^1 |(x_1, \tilde{\alpha}_1) - (x_2, \tilde{\alpha}_2)|, \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $a_k^1, a_k^2, a_k^3, C_k^1$  为正常数. 同理可知,  $2\gamma \mu |x(t)|^2$

也满足局部 Lipschitz 条件 (5).  $\square$

**注 3** 当系统 (1) 的系统矩阵完全未知时, 本文提出一种基于状态反馈与自适应控制相结合的控制方法, 给出其相应参数的 LMI 求解条件. 由定理 1 可知, 所设计的控制器 (8) 不仅保证相应闭环自适应辅助系统的解存在且唯一, 而且自适应辅助系统几乎处处有界. 特别地, 系统 (1) 的状态向量  $x(t)$  几乎处处渐近稳定. 基于本文方法, 可以进一步考虑其他相关控制问题, 例如系统矩阵含有未知不确定性时的分析与控制问题; Markov 系统的转移速率满足一般条件时的控制问题, 比如转移速率矩阵含有不确定性或部分未知, 非线性系统的非线性项满足 Lipschitz 条件但 Lipschitz 系数未知, 以及时滞系统中时滞未知时的相关控制问题等.

**注 4** 与现有相关方法相比, 本文方法具有以下特点和优势: 1) 与现有文献中系统矩阵已知不同, 例如文献 [2-4,7,11,13], 本文方法适用于系统矩阵未知的一般情况; 2) 与仅能保证闭环系统几乎处处有界的自适应控制方法 [17-20] 不同, 本文所提出的基于状态反馈与自适应控制相结合的方法不仅使自适应辅助系统几乎处处有界, 而且原系统状态向量  $x(t)$  可以几乎处处渐近稳定. 从这个角度而言, 本文控制器具有较好的收敛特性.

当系统矩阵  $A(\eta_t)$  完全未知时, 提出一种基于状态反馈控制与自适应控制相结合的新的控制器 (8). 需要指出的是, 本文方法同样可以应用到其他参数未知的情况, 例如状态转移速率矩阵  $\Pi$  含有不确定性但不确定性上界未知的一般情况, 具体描述如下:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & ? & \pi_{13} & ? \\ ? & ? & ? & \pi_{24} \\ \pi_{31} & ? & ? & \pi_{34} \\ ? & ? & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix},$$

其中 ‘?’ 为转移速率矩阵  $\Pi$  中的未知元素. 对于任意  $i \in \mathcal{S}$ , 定义集合  $\mathcal{S}^i = \mathcal{S}_k^i + \mathcal{S}_{\bar{k}}^i$  满足如下条件:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k^i &= \{j : \pi_{ij} \text{ is known}\}, \\ \mathcal{S}_{\bar{k}}^i &= \{j : \pi_{ij} \text{ is unknown}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

进一步等价于

$$\mathcal{S}_k^i = \{k_1^i, k_2^i, \dots, k_m^i\}, \quad \mathcal{S}_{\bar{k}}^i = \{\bar{k}_1^i, \bar{k}_2^i, \dots, \bar{k}_{N-m}^i\}.$$

其中:  $k_j^i \in \mathcal{Z}^+$  为转移速率矩阵  $\Pi$  第  $i$  行中第  $j$  个已知元素的列坐标, 第  $(N-j)$  个未知元素的列坐标为  $\bar{k}_{N-j}^i \in \mathcal{Z}^+$ . 当  $\tau = \min_{i \in \mathcal{S}_k^i} \{\pi_{ii}\}$  已知时, 文献 [6, 8-9] 给出了系统在转移速率部分未知时的相关条件; 但当  $\tau$  未知时, 上述文献的方法需要重新考虑. 在本文中, 假设  $\Pi$  中未知元素的上界  $\pi^* = \max_{i \in \mathcal{S}, j \in \mathcal{S}_k^i, j \neq i} \{\pi_{ij}\}$  仍然未知. 在系统矩阵  $A(\eta_t)$  和转移速率部分未知的一般条件下, 相应系统的控制器设计如下:

$$u(t) = B(\eta_t)K(\eta_t)x(t) + g_1(x(t), t, \eta_t) + g_2(x(t), t, \eta_t); \quad (22)$$

$$g_1(x(t), t, i) = -\frac{P_i^{-1}x(t)\mu_1^2\alpha^2(t)|x(t)|^2}{\mu_1\alpha(t)|x(t)|^2 + \rho(t)}, \quad \forall \eta_t = i \in \mathcal{S}; \quad (23)$$

$$g_2(x(t), t, i) = -\frac{1}{2} \times \frac{P_i^{-1}x(t)\mu_2^2\pi^2(t)|x(t)|^2}{\mu_2\pi(t)|x(t)|^2 + \rho(t)}, \quad \forall \eta_t = i \in \mathcal{S}. \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \max_{i \in \mathcal{S}} \{\|P_i\|\}, \quad P_i = X_i^{-1}; \\ \mu_2 &= \max_{i \in \mathcal{S}} \left\{ \left\| \sum_{j \in \mathcal{S}_k^i, j \neq i} X_i^{-1}W_jX_i^{-1} \right\| \right\}; \end{aligned}$$

$\rho(t) \in \mathbf{L}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$  为一个任意给定的函数. 未知参数  $\alpha^* \in \mathbf{R}^+$  仍由式 (12) 进行估计. 函数  $\pi(t) \in \mathbf{R}^+$  是  $\pi^* \in \mathbf{R}^+$  的估计值, 由如下更新律更新:

$$\dot{\pi}(t) = -\gamma_2\rho(t)\pi(t) + \gamma_2\mu_2|x(t)|^2, \quad (25)$$

其中  $\gamma_2$  是任意给定正数. 令  $\tilde{\pi}(t) = \pi(t) - \pi^*$ , 式 (25) 等价于

$$\dot{\tilde{\pi}}(t) = -\gamma_2\rho(t)\tilde{\pi}(t) + \gamma_2\mu_2|x(t)|^2 - \gamma_2\rho(t)\pi^*, \quad (26)$$

初始条件  $\tilde{\pi}_0 \in \mathbf{R}^+$  有界. 上述控制器中的相关参数  $X_i, W_i$  将由如下定理中 LMIs 求解得出.

**定理 2** 当系统转移速率满足一般条件 (22) 时, 通过选取适当的设计参数  $\gamma_1, \gamma_2$  和  $\rho(t)$ , 式 (1)、(22)、(13) 和 (26) 形成的自适应闭环辅助系统在区间  $[0, \infty)$  上有唯一解  $(x, \tilde{\alpha}, \tilde{\pi})(t; x_0, \eta_0, \alpha_0, \pi_0)$ , 且几乎处处有界, 特别地,  $x(t)$  几乎处处渐近稳定. 如果存在矩阵  $X_i > 0, W_i > 0$  和  $Y_i$ , 使得如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{i1} & \bar{\Omega}_{i2} \\ * & \bar{\Omega}_{i3} \end{bmatrix} < 0; \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} -X_i - W_i & X_i \\ * & -X_j \end{bmatrix} \leq 0, \quad i \in \mathcal{S}, j \in \bar{\mathcal{S}}_k^i, j \neq i. \quad (28)$$

其中

$$\bar{\Omega}_{i1} = B_i Y_i + Y_i^T B_i^T - \sum_{j \in \mathcal{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij} X_i,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{i2} &= [\sqrt{\pi_{ik_1^i}} X_i \cdots \sqrt{\pi_{ik_{r-1}^i}} X_i \sqrt{\pi_{ik_{r+1}^i}} X_i \\ &\quad \cdots \sqrt{\pi_{ik_m^i}} X_i], \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}_{i3} = -\text{diag}\{X_{k_1^i}, \dots, X_{k_{r-1}^i}, X_{k_{r+1}^i}, \dots, X_{k_m^i}\}.$$

则控制器 (22) 中状态反馈控制器的控制增益为

$$K_i = Y_i X_i^{-1}. \quad (29)$$

**证明** 对于由式 (1)、(22)、(13) 和 (26) 形成的自适应闭环辅助系统, 选取如下李雅普诺夫函数:

$$\begin{aligned} V((x, \tilde{\alpha}, \tilde{\pi})(t), t, \eta_t) &= \\ &= x^T(t)P(\eta_t)x(t) + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^T(t)\gamma_1^{-1}\tilde{\alpha}(t) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\pi}^T(t) \gamma_2^{-1} \tilde{\pi}(t), \tag{30}$$

其中  $\gamma_1, \gamma_2$  为任给的正常数. 对于任意的  $i \in \mathbf{S}$ , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V((x, \tilde{\alpha}, \tilde{\pi})(t), t, \eta_t) = & 2x^T(t)P_i\dot{x}(t) + x^T(t) \sum_{j=1}^N \pi_{ij}P_jx(t) + \\ & \tilde{\alpha}^T(t)\gamma_1^{-1}\dot{\tilde{\alpha}}(t) + \tilde{\pi}^T(t)\gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\pi}}(t) = \\ & x^T(t) \left[ P_iB_iK_i + K_i^TB_i^TP_i + \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - P_i) \right] x(t) + \\ & 2x^T(t)P_i(A_ix(t) + g_1(x(t), t, i) + \\ & g_2(x(t), t, i)) + \tilde{\alpha}^T(t)\gamma_1^{-1}\dot{\tilde{\alpha}}(t) + \tilde{\pi}^T(t)\gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\pi}}(t) + \\ & x^T(t) \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - P_i)x(t) = \\ & x^T(t) \left[ P_iB_iK_i + K_i^TB_i^TP_i + \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - P_i) \right] x(t) + \\ & 2x^T(t)P_i(A_ix(t) + g_1(x(t), t, i) + \\ & g_2(x(t), t, i)) + x^T(t) \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}X_i^{-1}W_iX_i^{-1}x(t) + \\ & \tilde{\alpha}^T(t)\gamma_1^{-1}\dot{\tilde{\alpha}}(t) + x^T(t) \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - P_i - \\ & X_i^{-1}W_iX_i^{-1})x(t) + \tilde{\pi}^T(t)\gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\pi}}(t) \leq \\ & -\xi|x(t)|^2 + 2\mu_1\alpha^*|x(t)|^2 + 2x^T(t)P_i g_1(x, t) + \\ & \tilde{\alpha}^T(t)\gamma_1^{-1}(-\gamma_1\rho(t)\tilde{\alpha}(t) + 2\gamma_1\mu_1|x(t)|^2 - \\ & \gamma_1\rho(t)\alpha^*) + 2x^T(t)P_i g_2(x, t) + \pi^*\mu_2|x(t)|^2 + \\ & \tilde{\pi}^T(t)\gamma_2^{-1}(-\gamma_2\rho(t)\tilde{\pi}(t) + \gamma_2\mu_2|x(t)|^2 - \gamma_2\rho(t)\pi^*) = \\ & -\xi|x(t)|^2 + 2\mu_1\alpha(t)|x(t)|^2 + 2x^T(t)P_i g_1(x, t) + \\ & \tilde{\alpha}^T(t)(-\rho(t)\tilde{\alpha}(t) - \rho(t)\alpha^*) + 2x^T(t)P_i g_2(x, t)(t) + \\ & \pi^*\mu_2|x(t)|^2 + \tilde{\pi}^T(t)(-\rho(t)\tilde{\pi}(t) - \rho(t)\pi^*) = \\ & -\xi|x(t)|^2 + 2\mu_1\alpha(t)|x(t)|^2 + 2x^T(t)P_i g_1(x, t) + \\ & \tilde{\alpha}^T(t)(-\rho(t)\tilde{\alpha}(t) - \rho(t)\alpha^*) + 2x^T(t)P_i g_2(x, t)(t) + \\ & \pi^*\mu_2|x(t)|^2 + \tilde{\pi}^T(t)(-\rho(t)\tilde{\pi}(t) - \rho(t)\pi^*) = \\ & -\xi|x(t)|^2 + \frac{2\mu_1\alpha(t)\rho(t)|x(t)|^2}{\mu_1\alpha(t)|x(t)|^2 + \rho(t)} + \\ & \tilde{\alpha}^T(t)(-\rho(t)\tilde{\alpha}(t) - \rho(t)\alpha^*) + \frac{\mu_2\pi(t)|x(t)|^2}{\mu_2\pi(t)|x(t)|^2 + \rho(t)} + \\ & \tilde{\pi}^T(t)(-\rho(t)\tilde{\pi}(t) - \rho(t)\pi^*) \leq \\ & -\xi|x(t)|^2 + \rho(t)(-\tilde{\alpha}^2(t) - \alpha^*\tilde{\alpha}(t) + 2) + \\ & \rho(t)(-\tilde{\pi}^2(t) - \pi^*\tilde{\pi}(t) + 1) \leq \\ & -\xi|x(t)|^2 + \rho(t)(\epsilon_1 + \epsilon_2). \tag{31} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \xi = \min_{i \in \mathbf{S}} \lambda_{\min} \left( - (P_iB_iK_i + K_i^TB_i^TP_i) - \right. \\ \left. \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - P_i) \right), \end{aligned}$$

$$\epsilon_1 = \frac{8 + \pi^{*2}}{4}, \quad \epsilon_2 = \frac{4 + \pi^{*2}}{4}.$$

而满足式 (31) 需要下列条件同时成立:

$$P_iB_iK_i + K_i^TB_i^TP_i + \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - P_i) < 0; \tag{32}$$

$$P_j - P_i - X_i^{-1}W_iX_i^{-1} < 0, \forall j \neq i, j \in \mathbf{S}_k^i. \tag{33}$$

令  $X_i = P_i^{-1}, Y_i = K_iX_i$ , 式 (32) 和 (33) 等价于

$$B_iY_i + Y_i^TB_i^T - \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}X_i + \sum_{j \in \mathbf{S}_k^i, j \neq i} \pi_{ij}X_iX_j^{-1}X_i < 0; \tag{34}$$

$$X_iX_j^{-1}X_i - X_i - W_i < 0, \forall j \neq i, j \in \mathbf{S}_k^i. \tag{35}$$

由 Schur 补引理可知, 式 (27) 和 (28) 在 (29) 条件下等价于 (34) 和 (35). 接下来与定理 1 的证明过程类似, 在此省略.  $\square$

**注 5** 在系统 (1) 的系统矩阵  $A(\eta_t)$  未知及转移速率矩阵  $\Pi$  部分未知的条件下, 定理 2 给出了一种新的控制方法. 与文献 [6, 8-9] 需要假设未知元素上界已知的方法不同, 定理 2 给出的方法中未知元素的上界仍然未知. 就这个意义而言, 定理 2 的方法是上述文献方法的有益扩展和补充.

### 3 仿真算例

考虑形如系统 (1) 的 Markov 系统, 其系统参数描述如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.3 & -0.3 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.4 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.3 & -0.7 \end{bmatrix}.$$

这里虽然给出了系统矩阵  $A(\eta_t)$ , 但在系统相关控制器设计时没有用到其具体值. 首先假设系统转移速率矩阵已知, 具体如下:

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.6 & 0.9 \\ 0.7 & -1.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & -0.8 \end{bmatrix}.$$

基于本文方法, 设计控制器 (8), 相应的控制器矩阵  $B(\eta_t)$  取值如下:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

由定理 1 可得

$$X_1 = \begin{bmatrix} 7.4209 & -0.0000 \\ -0.0000 & 7.4209 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 8.3485 & -0.0000 \\ -0.0000 & 8.3485 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 7.4209 & -0.0000 \\ -0.0000 & 7.4209 \end{bmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 9.8714 & 61.2222 \\ -4.7460 & 26.3930 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 31.2849 & 22.3314 \\ -19.7728 & -29.5530 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 9.6471 & 29.6337 \\ -19.9866 & 39.2809 \end{bmatrix}.$$

其中:  $X_i = P_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 且可得  $\mu = 0.1348$ . 由此, 控制器 (8) 的状态反馈控制增益计算如下:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.3302 & 8.2500 \\ -0.6396 & 17.0321 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3.7474 & 2.6749 \\ -2.3684 & -3.5399 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.3000 & 3.9933 \\ -2.6933 & 5.2933 \end{bmatrix}.$$

令  $\rho(t) = e^{-t}$ ,  $\gamma = 0.5$ , 可得相应的控制器 (8). 假设初始条件  $x_0 = [1, -0.5]^T$ ,  $\alpha_0 = 0.2$ , 相应的自适应辅助系统的状态响应如图 1 和图 2 所示. 可以看出, 参数估计  $\alpha(t)$  是有界的, 系统状态  $x(t)$  渐近稳定.

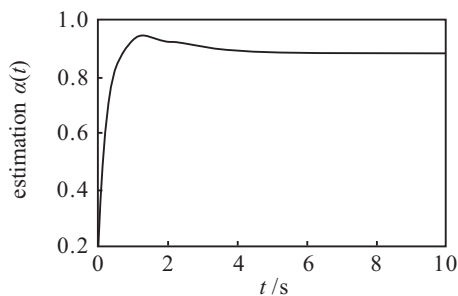


图 1  $\alpha(t)$  估计值的响应

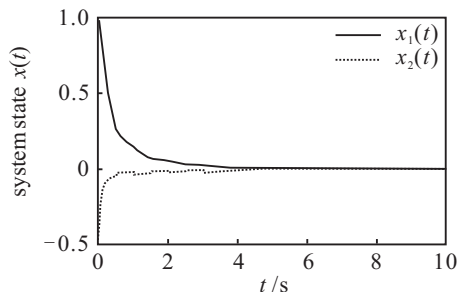


图 2 闭环系统状态变量  $x(t)$  的响应

另一方面, 当系统的转移速率矩阵部分未知时, 不失一般性, 假设其形式如下:

$$\Pi = \begin{bmatrix} ? & 0.6 & ? \\ 0.7 & -1.2 & 0.5 \\ ? & ? & -0.8 \end{bmatrix},$$

由定理 2 可得

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4.9902 & 0 \\ 0 & 4.9902 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 4.2304 & -0.0000 \\ -0.0000 & 4.2304 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 4.2832 & -0.0000 \\ -0.0000 & 4.2832 \end{bmatrix};$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 9.7586 & 0 \\ 0 & 9.7586 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 11.4220 & 0 \\ 0 & 11.4220 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 9.2804 & 0.0000 \\ 0.0000 & 9.2804 \end{bmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -394.2972 & 22.2094 \\ -797.4781 & -113.3001 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -78.8623 & 504.0987 \\ 233.0477 & -410.4574 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = 1.0e^{+003} \times \begin{bmatrix} 0.0074 & 3.3250 \\ -3.3176 & 3.3324 \end{bmatrix}.$$

其中:  $X_i = P_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 并且可得  $\mu_1 = 0.2364$ ,  $\mu_2 = 1.5272$ . 从而, 控制器 (8) 中的状态反馈增益计算如下:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -79.0146 & 4.4506 \\ -159.8094 & -22.7046 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -18.6420 & 119.1621 \\ 55.0893 & -97.0266 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.7333 & 776.2816 \\ -774.5482 & 778.0149 \end{bmatrix}.$$

在相同的参数条件下, 可以构造控制器 (8), 其相应的系统响应如图 3 和图 4 所示.

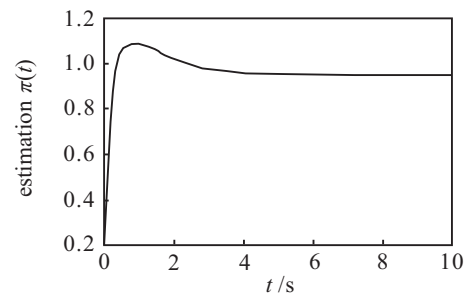


图 3  $\pi(t)$  估计值的响应

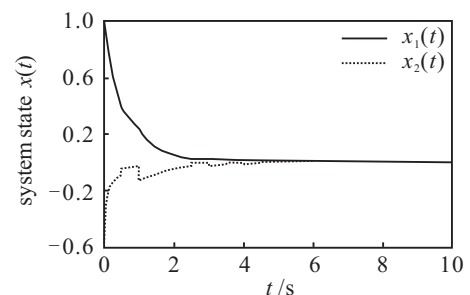


图 4  $\Pi$  部分未知时闭环系统状态变量  $x(t)$  的响应

图 3 为状态转移速率矩阵中未知元素未知上界

的估计  $\pi(t)$  的响应, 图4为状态变量  $x(t)$  的响应. 上述仿真实验验证了所提出方法的有效性.

## 4 结 论

本文研究了一类 Markov 跳变系统在系统矩阵未知条件下的控制问题, 建立了一种基于状态反馈控制与自适应控制相结合的新型控制方法, 给出了控制器参数的 LMI 求解条件. 可以看出, 尽管系统矩阵未知, 所设计的控制器仍能使相应闭环系统稳定. 与现有大多数自适应控制方法不同, 本文给出的自适应方法具有较好的收敛特性. 基于所提方法, 可进一步将所得结果推广到转移速率部分未知时的情况. 最后通过仿真算例验证了本文设计方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Costa O L V, Filho E O A, Boukas E K, et al. Constrained quadratic state feedback control of discrete-time Markovian jump linear system[J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 617-626.
- [2] Huang L R, Mao X R. Robust delayed-state-feedback stabilization of uncertain stochastic systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1332-1339.
- [3] Fragoso M D, Costa O L V. A separation principle for the continuous-time LQ-problem with Markovian jump parameters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(12): 2692-2707.
- [4] 盛立, 杨慧中. 一类离散 Markov 跳变奇异系统的镇定控制[J]. *控制与决策*, 2010, 2(8): 1189-1194.  
(Sheng L, Yang H Z. Stabilization control of a class of discrete-time Markov jump singular systems[J]. *Control and Decision*, 2010, 2(8): 1189-1194.)
- [5] Boukas E K, Msirdi N K. Stabilization of stochastic systems with partially known transition jumps rates[J]. *Int J of Innovative Computing, Information and Control*, 2010, 6(3A): 1199-1206.
- [6] Zhang L X, Lam J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition descriptions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(7): 1695-1701.
- [7] Wu Z, Shi P, Su H, et al. Passivity analysis for discrete-time stochastic Markovian jump neural networks with mixed time-delays[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2011, 22(10): 1566-1575.
- [8] Kao Y G, Xie J, Wang C, et al. Stabilisation of singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2604-2610.
- [9] 王国良, 薄海英. 广义马氏跳变系统在一般转移速率下的控制器设计[J]. *自动化学报*, 2015, 41(1): 215-220.  
(Wang G L, Bo H Y. Stabilization of singular Markovian jump systems with general switching[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 215-220.)
- [10] Boukas E K, Liu Z K. Robust  $H_\infty$  control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1918-1924.
- [11] Xu S Y, Chen T W, Lam J. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5): 900-907.
- [12] Boukas E K, Shi P, Nguang S K. Robust  $H_\infty$  control for linear Markovian jump systems with unknown nonlinearities[J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, 282(1): 241-255.
- [13] 常华, 楼顺天, 方洋旺. 基于不完全转移率的连续 Markov 跳变奇异系统的  $H_\infty$  控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(10): 1839-1844.  
(Chang H, Lou S T, Fang Y W.  $H_\infty$  control of continuous-time Markov jump singular systems subject to incomplete transition rates[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(10): 1839-1844.)
- [14] Sathananthan S, Keel L H. Optimal practical stabilization and controllability of systems with Markovian jumps[J]. *Nonlinear Analysis*, 2003, 54(6): 1011-1027.
- [15] 李桂林, 王传锐, 季海波. 具有 Markov 跳跃参数的一类随机非线性系统逆最优增益设计[J]. *自动化学报*, 2004, 40(7): 1285-1293.  
(Li G L, Wang C R, Ji H B. Inverse optimal gain assignment control for a class of stochastic nonlinear systems with Markovian jump parameters[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 40(7): 1285-1293.)
- [16] Nakura G. Stochastic optimal tracking with preview by state feedback for linear discrete-time Markovian jump systems[J]. *Int J of Innovative Computing, Information and Control*, 2010, 6(1): 15-28.
- [17] Shi P, Xia Y, Liu G, et al. On designing of sliding mode control for stochastic jump systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(1): 97-103.
- [18] Xia Y Q, Fu M Y, Shi P, et al. Adaptive backstepping controller design for stochastic jump systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(12): 2853-2859.
- [19] Wu Z J, Yang J, Shi P. Adaptive tracking for stochastic nonlinear systems with Markovian switching[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2135-2141.
- [20] Xie L, Khargonekar P. Lyapunov-based adaptive state estimation for a class of continuous-time nonlinear stochastic systems[J]. *American Control Conf*, 2010, 48(8): 6071-6076.
- [21] Wang G, Zhang Q. Adaptive state estimation for stochastic delay systems with state-dependent Markovian switching[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 6(6): 822-828.