

离散重复过程的有限频率范围迭代学习容错控制

陶洪峰, 杨登明, 杨慧中

(江南大学 教育部轻工过程先进控制重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对一类执行器故障不确定离散重复过程, 提出一种有限频率范围的迭代学习容错控制算法. 通过定义故障系数矩阵和输出跟踪系统的等价二维模型, 沿故障系统的时间轴和批次轴设计迭代学习被动容错控制器, 以线性矩阵不等式形式分别给出基于KYP引理的全频、分频区域重复控制系统稳定的充分必要条件, 同时保证故障系统在时域和频域范围内的容错性能. 最后, 以重复注塑过程的注射速度控制仿真验证了所提出分频控制算法的有效性.

关键词: 迭代学习容错控制; 执行器故障; 不确定重复过程; 有限频率范围; KYP引理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Iterative learning fault-tolerant control in finite frequency range for discrete repetitive process

TAO Hong-feng, YANG Deng-ming, YANG Hui-zhong

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: TAO Hong-feng, E-mail: taohongfeng@hotmail.com)

Abstract: For a class of uncertain discrete repetitive process with the actuator fault, an iterative learning fault-tolerant control algorithm in the finite frequency range is proposed. By defining the equivalent two dimensional model and fault coefficient matrix for the output tracking system, the passive fault-tolerant controller with the time axis and batch axis is designed at the same time. Then based on the Kalman-Yakubovich-Popov(KYP) lemma, the sufficient and necessary condition for the stability of the repetitive control system is given in terms of the linear matrix inequality technology in the whole frequency and division frequency range respectively, so that the fault tolerant performance of the fault system can be guaranteed both in time and frequency domain. Finally, the injection speed control simulation of the repetitive injection molding process verifies the effectiveness of the frequency division control algorithm.

Keywords: iterative learning fault tolerant control; actuator fault; uncertain repetitive process; finite frequency range; KYP lemma

0 引言

迭代学习控制(ILC)是智能控制领域的重要发展方向之一. ILC利用系统先前的控制经验和输出误差重复修正当前的控制输入,使得系统快速收敛,实现在有限区间上快速、高精度、高性能的完全跟踪^[1-2]. 根据迭代学习重复过程的特点,迭代学习可以视为基于时间轴和批次轴的2维(2D)控制过程,因此,基于2D理论分析的迭代学习控制方法始终受到学术和工程界的广泛关注^[3-6].

由于迭代学习重复过程的执行器通常以往复操作完成控制任务,在此重复过程中极易发生机械疲

劳、磨损等故障,影响系统的性能和安全,因此实施容错控制是进一步保证系统可靠性的重要措施. 容错控制可分为主动容错控制和被动容错控制,其中被动容错控制由于控制器结构简单、设计方便而受到广泛关注. 文献[7]针对线性2D重复过程的执行器故障设计迭代学习容错控制律,保证了系统在正常或故障情形下的收敛性. 文献[8]则进一步讨论了执行器故障重复过程的保性能控制问题. 但是在实际工程重复过程中,许多故障系统除了有限时间要求外,还限制系统运行在特定工作频域范围,因此,在有限频域范围内设计迭代学习容错控制器是在时间轴和批次轴上提

收稿日期: 2015-06-26; 修回日期: 2015-11-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273070, 61203092); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(JUSRP51510); 江苏省产学研前瞻性联合研究项目(BY2015019-21); 高等学校学科创新引智计划项目(B12018).

作者简介: 陶洪峰(1979—),男,副教授,博士,从事故障检测与容错控制等研究; 杨慧中(1955—),女,教授,博士生导师,从事过程控制理论及应用等研究.

高系统容错性能的必然要求。

Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理可以将全频域和分频域的控制统一设计, 但重复过程迭代学习控制的频域统一设计方法近期才引起重视. 文献 [9] 和文献 [10] 分别提出了线性连续和离散系统的分频迭代学习控制器的设计方法, 但未进一步考虑系统的故障和跟踪控制目标; 文献 [11] 针对线性离散重复过程, 分频设计迭代学习跟踪控制律以实现正常系统误差收敛, 但仅考虑了低频的控制设计, 频域讨论不够完整, 且未考虑系统的故障特性.

本文利用 2D 系统理论, 基于线性矩阵不等式研究执行器故障不确定离散重复系统的迭代学习容错控制问题. 通过参考信号的频率分解, 设计基于有限频率范围的迭代学习容错控制律, 同时满足重复过程正常和故障情形下的收敛性要求, 并基于 KYP 引理分析系统的稳定性. 重复注塑过程注射速度的控制仿真验证了本文方法的有效性.

在本文中, 对于矩阵 X , X^T 和 X^\perp 分别表示其转置和正交补; $\text{sym}(A) = A + A^T$; 符号 “*” 表示对称位置上的元素转置; 符号 “ \forall ” 表示任意.

1 问题描述

考虑具有如下形式的不确定性 2D 线性离散时不变重复系统:

$$\begin{cases} x(t+1, k) = \\ (A + \Delta A)x(t, k) + (B + \Delta B)u(t, k), \\ y(t, k) = (C + \Delta C)x(t, k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t, k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量; $y(t, k) \in \mathbf{R}^m$ 为输出向量; $u(t, k) \in \mathbf{R}^l$ 为输入向量; 边界条件 $x(0, k) = x_0$; 批次 $k = 0, 1, \dots, N$; $u(t, 0) = u_0(t)$; 重复周期 $0 \leq t \leq T$; A 、 B 和 C 矩阵为相应维数适当的系统参数矩阵; ΔA 、 ΔB 和 ΔC 满足: $\Delta A = H_1 \Xi F_1$, $\Delta B = H_1 \Xi F_2$, $\Delta C = H_2 \Xi F_2$, 这里 H_1 、 H_2 、 F_1 和 F_2 为已知确定性矩阵, Ξ 满足有界约束条件 $\Xi^T \Xi \leq I$.

对于控制输入 $u_i(t, k)$, 令 $u_i^F(t, k)$ 表示执行器故障的输出信号, 定义执行器故障模型

$$u_i^F(t, k) = \alpha_i u_i(t, k), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

其中执行器故障系数 α_i 未知, 但满足条件

$$0 \leq \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

若 $\alpha_i = 1$, 则表示执行器正常, 即 $u_i^F(t, k) = u_i(t, k)$; 若 $\alpha_i = 0$, 则表示因损坏、脱落等情形而造成的执行器完全失效; 若 $\alpha_i > 0$, 则表示因机械磨损、老化等情形而造成的执行器部分失效. 记

$$\begin{aligned} u^F &= [u_1^F, u_2^F, \dots, u_m^F]^T, \\ \bar{\alpha} &= \text{diag}\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m\}, \end{aligned}$$

$$\underline{\alpha} = \text{diag}\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \dots, \underline{\alpha}_m\},$$

$$\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}.$$

因此, 执行器故障不确定重复系统 (1) 可表示为

$$\begin{cases} x(t+1, k) = \\ (A + \Delta A)x(t, k) + (B + \Delta B)\alpha u(t, k), \\ y(t, k) = (C + \Delta C)x(t, k). \end{cases} \quad (4)$$

针对上述故障设计容错控制器, 定义矩阵

$$\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}, \quad \beta_i = \frac{\bar{\alpha}_i + \underline{\alpha}_i}{2};$$

$$\beta_0 = \text{diag}\{\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{m0}\}, \quad \beta_{i0} = \frac{\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_i + \underline{\alpha}_i}.$$

由此可知, 必然存在未知矩阵 α_0 使得

$$\alpha = (I + \alpha_0)\beta, \quad (5)$$

且 $|\alpha_0| \leq \beta_0 \leq I$, $\alpha_0 = \text{diag}\{\alpha_{10}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{m0}\}$, $|\alpha_0| = \text{diag}\{|\alpha_{10}|, |\alpha_{20}|, \dots, |\alpha_{m0}|\}$.

对于给定的执行器故障重复系统 (4), 本文的控制目标是在故障满足容许条件的情形下, 通过不断修正迭代学习容错控制输入量 $\{u(t, k), 0 \leq t \leq T\}$, 使得故障系统的输出 $y(t, k)$ 随着批次的重复逐渐跟踪上期望输出 $y_r(t)$, 即 $\sup_{0 \leq t \leq T} |y_r(t) - y(t, k)| < \varepsilon$.

2 基于 2D 的迭代学习容错控制设计

2.1 等价 2D 模型

根据控制目标, 定义输出跟踪误差为

$$e(t, k) = y_r(t) - y(t, k). \quad (6)$$

对于系统 (4), 采用如下被动容错控制律:

$$u(t, k+1) = u(t, k) + \Delta u(t, k). \quad (7)$$

其中: $u(t, k+1)$ 为本批次输入变量, $u(t, k)$ 为前一批次输入量, $\Delta u(t, k)$ 为对控制进行更新的修正量. 定义

$$\eta(t, k) = x(t-1, k+1) - x(t-1, k), \quad (8)$$

则式 (7) 所示的迭代学习更新律可改写为

$$\Delta u(t, k) = K_1 \eta(t+1, k) + K_2 e(t+1, k), \quad (9)$$

其中 K_1 、 K_2 为未知待定矩阵. 将控制律 (9) 代入系统 (4), 可以得到控制系统的 2D 状态空间模型为

$$\begin{cases} \eta(t+1, k) = \hat{A}\eta(t, k) + \hat{B}e(t, k), \\ e(t, k+1) = \hat{C}\eta(t, k) + \hat{D}e(t, k). \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\hat{A} = (A + \Delta A) + (B + \Delta B)\alpha K_1,$$

$$\hat{B} = (B + \Delta B)\alpha K_2,$$

$$\hat{C} = -(C + \Delta C)((A + \Delta A) + (B + \Delta B)\alpha K_1),$$

$$\hat{D} = I - (C + \Delta C)(B + \Delta B)\alpha K_2.$$

2.2 有限频率范围的稳定性

引理 1^[12] 假设 $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ 可控, $\{\hat{C}, \hat{A}\}$ 可观, 则式

(10)所描述的迭代学习控制重复系统稳定, 当且仅当以下不等式成立:

1) $\rho(\hat{D}) < 1$, 模值严格小于1, 保证输出迭代批次上的收敛性;

2) $\rho(\hat{A}) < 1$, 模值严格小于1, 保证重复周期时间上的收敛性;

3) 传递函数矩阵 $G(z) = \hat{C}(zI - \hat{A})\hat{B} + \hat{D}$, $z = e^{j\omega}$, $\forall \omega \geq 0$, 模值严格小于1, 单输入单输出系统要求传递函数 $G(z)$ 的极点位于单位圆内, 保证时间和批次上的收敛性.

引理2^[13] 给定矩阵 A, B 和 $M = M^T$, 假设对于离散线性系统传递函数 $G(z)$ 和频率响应 $G(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega}I - A)^{-1}B + D$, 以下不等式等价:

1) 频率响应不等式

$$\begin{bmatrix} (e^{j\omega}I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (e^{j\omega}I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

存在矩阵 $P = P^T$, 使得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + M < 0; \quad (12)$$

2) 矩阵 M, F, Φ, Ψ 给定, 当且仅当存在 $Q > 0$ 和系统矩阵 P 使得

$$F^*(\Phi \otimes Q + \Psi \otimes P)F + M < 0. \quad (13)$$

其中: $\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Ψ 定义为如表1所示形式^[14].

表1中

$$\omega_c = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}, \omega_m = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}.$$

表1 不同频率段对应的 Ψ

	低频	中频	高频
ω	$ \omega < \omega_l$	$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$	$ \omega > \omega_h$
Ψ	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\cos\omega_l \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & e^{j\omega_c} \\ e^{-j\omega_c} & -2\cos\omega_m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\cos\omega_h \end{bmatrix}$

引理3^[15] 给定维数适当的矩阵 Γ, Λ 和 Σ , 存在矩阵 W 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\Gamma + \text{sym}\{\Lambda^T W \Sigma\} < 0, \quad (14)$$

当且仅当下面两个关于矩阵 W 的不等式成立:

$$\Lambda^{\perp T} \Gamma \Lambda^{\perp} < 0, \Sigma^{\perp T} \Gamma \Sigma^{\perp} < 0. \quad (15)$$

定理1 假设系统(10)运行的整个频率范围被分成若干个频率间隔, 若存在 $P_{1i} > 0, Q_i > 0, S > 0$ 和 W_1 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\hat{A}^T S \hat{A} - S < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i & \Psi_{12}P_{1i} - W_1 & 0 & 0 \\ * & Q_i + \Psi_{22}P_{1i} + \hat{A}^T W_1 + W_1^T \hat{A} & W_1^T \hat{B} & \hat{C}^T \\ * & * & -I & \hat{D}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

则重复2D系统输出在各个频率范围内的时间轴和批次轴上均能渐近稳定跟踪期望信号.

证明 如果式(17)成立, 则自然有下式成立:

$$\begin{bmatrix} -I & \hat{D}^T \\ \hat{D} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

显然 $\rho(\hat{D}) < 1$, 即满足引理1的条件1); 而式(16)的成立保证了 $\rho(\hat{A}) < 1$, 满足引理1的条件2). 从重复过程模型分离出每一段特定矩阵, 式(12)可改写成下式:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + M < 0. \quad (19)$$

其中: $M = \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 且

$$(\Lambda^{\perp})^T \begin{bmatrix} -Q_i & \Psi_{12}P_{1i} \\ * & Q_i + \Psi_{22}P_{1i} + \hat{C}^T \hat{C} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}^T \hat{D} \\ \hat{D}^T \hat{D} - I \end{bmatrix} \Lambda^{\perp} + \Gamma < 0, \quad (20)$$

这里 $(\Lambda^{\perp})^T = \begin{bmatrix} \hat{A}^T & I & 0 \\ \hat{B}^T & 0 & I \end{bmatrix}$, 同时

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -Q_i & \Psi_{12}P_{1i} & 0 \\ * & Q_i + \Psi_{22}P_{1i} + \hat{C}^T \hat{C} & \hat{C}^T \hat{D} \\ * & \hat{D}^T \hat{C} & \hat{D}^T \hat{D} - I \end{bmatrix}.$$

对于式(20)中的 Λ^{\perp} , $\Lambda = [-I \ \hat{A} \ \hat{B}]$, 根据引理3, 存在矩阵 $\Sigma^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$, $\Sigma = [0 \ I \ 0]$ 满足 $(\Sigma^{\perp})^T \Gamma \Sigma^{\perp} < 0$ 的条件, 此时如下不等式成立:

$$\Sigma^{\perp T} \Gamma \Sigma^{\perp} = \begin{bmatrix} -Q_i & 0 \\ 0 & \hat{D}^T \hat{D} - I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

当且仅当两个分块矩阵满足: $-Q_i < 0, \hat{D}^T \hat{D} - I < 0$. 由引理3, 得

$$\begin{bmatrix} -Q_i & \Psi_{12}P_{1i} & 0 \\ * & Q_i + \Psi_{22}P_{1i} + \hat{C}^T \hat{C} & \hat{C}^T \hat{D} \\ * & * & \hat{D}^T \hat{D} - I \end{bmatrix} + \text{sym}\{\Lambda^T W_1 \Sigma\} < 0. \quad (22)$$

进而对式(22)应用Schur补引理, 可以直接证明

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T (\Phi \otimes Q_i + \Psi \otimes P_{1i}) \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

其中: Φ, Ψ 由引理 2 给出, M 由式 (19) 给出. 则式 (23) 可以进一步改写为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (e^{j\omega}I - \hat{A})^{-1}\hat{B} \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (e^{j\omega}I - \hat{A})^{-1}\hat{B} \\ I \end{bmatrix} < 0, \\ & \forall \omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]; \end{aligned} \quad (24)$$

或者

$$G^*(e^{j\omega})G(e^{j\omega}) - I < 0, \forall \omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]. \quad (25)$$

于是引理 1 的条件 3) 满足, 系统 (10) 稳定. \square

2.3 迭代学习容错控制律设计

定理 2 针对式 (1) 执行器故障 (不考虑不确定性), 存在矩阵 $X_1, X_2, \hat{W}, \hat{S} > 0, \hat{Q}_i > 0, \hat{P}_{1i} > 0$ 和标量 $\rho_1, \rho_2, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \vartheta > 0$ 是常数, 使矩阵不等式 $\Omega < 0, \Upsilon < 0$ 成立. 其中对称矩阵元素如下:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \hat{S} + \rho_2 \hat{W} + \rho_2 \hat{W}^T, \quad \Omega_{13} = -\varepsilon_1 \rho_2 B \beta_0, \\ \Omega_{12} &= -\rho_2 A \hat{W} - \rho_2 B \beta X_1 - \rho_1 \hat{W}^T, \\ \Omega_{14} &= \Omega_{34} = 0, \\ \Omega_{22} &= -\hat{S} + \text{sym}\{\rho_1 A \hat{W} + \rho_1 B \beta X_1\}, \\ \Omega_{23} &= \varepsilon_1 \rho_1 B \beta_0, \quad \Omega_{24} = \beta X_1^T, \\ \Omega_{33} &= \Omega_{44} = -\varepsilon_1 I, \quad \Upsilon_{11} = -\hat{Q}_i, \\ \Upsilon_{12} &= \Psi_{12} \hat{P}_{1i} - \hat{W}^T, \quad \Upsilon_{23} = B \beta X_2, \quad \Upsilon_{33} = -\vartheta I, \\ \Upsilon_{22} &= \hat{Q}_i + \Psi_{22} \hat{P}_{1i} + \text{sym}\{A \hat{W} + B \beta X_1\}, \\ \Upsilon_{24} &= -\hat{W}^T A^T C^T - X_1^T \beta^T B^T C^T, \\ \Upsilon_{25} &= \varepsilon_2 B \beta_0, \quad \Upsilon_{26} = X_1^T \beta, \\ \Upsilon_{34} &= (I - CB \beta X_2)^T, \quad \Upsilon_{36} = X_2^T \beta, \\ \Upsilon_{44} &= -\vartheta I, \quad \Upsilon_{45} = -\varepsilon_2 (CB)^T \beta_0, \\ \Upsilon_{55} &= \Upsilon_{66} = -\varepsilon_2 I, \quad \Upsilon_{13} = \Upsilon_{14} = \Upsilon_{15} = \Upsilon_{16} = 0, \\ \Upsilon_{35} &= \Upsilon_{46} = \Upsilon_{56} = 0, \end{aligned}$$

其他上三角矩阵位置未提及的均为 0, ρ_1, ρ_2 满足 $\rho_1^2 - \rho_2^2 < 0$, 系统的输出在各个频率区间能渐近跟踪期望输出, 容错控制更新律 (9) 的增益 $K_1 = X_1 \hat{W}^{-1}, K_2 = X_2$.

证明 定理 1 的式 (16) 等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} \\ I \end{bmatrix} = \hat{A}^T S \hat{A} - S < 0, \quad (26)$$

其中 $S > 0$. 取 $A^\perp = [\hat{A}^T \ I]^T, A = [-I \ \hat{A}]$, 根据

引理 3 取 $\Sigma^\perp = [\rho_1 I \ \rho_2 I]^T$, 因此 $\Sigma = [-\rho_2 I \ \rho_1 I]$, 则

$$[\rho_1 I \ \rho_2 I] \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 I \\ \rho_2 I \end{bmatrix} = (\rho_1^2 - \rho_2^2) S < 0.$$

运用引理 3, 可以得到如下结果:

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} -I \\ \hat{A}^T \end{bmatrix} W_1 [-\rho_2 I \ \rho_1 I] \right\} < 0, \quad (27)$$

其中 W_1 是可解的. 如果 $\hat{S} + \rho_2 \hat{W} + \rho_2 \hat{W}^T < 0$ 且 $S > 0$, 则 W_1 可逆. 式 (27) 分别右乘和左乘 $\text{diag}\{W_1^{-1}, W_1^{-1}\}$ 及其转置矩阵, 并设 $\hat{W} = W_1^{-1}, \hat{S} = \hat{W}^T \hat{S} W_1$, 最后可得下式:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{S} + \rho_2 \hat{W} + \rho_2 \hat{W}^T & \\ & * \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} -\rho_2 A \hat{W} - \rho_2 B \alpha X_1 - \rho_1 \hat{W}^T \\ -\hat{S} + \text{sym}\{\rho_1 A \hat{W} + \rho_1 B \alpha X_1\} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

由于式 (28) 可以写成

$$Z + X \Xi Y + Y^T \Xi X^T < 0. \quad (29)$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} \hat{S} + \rho_2 \hat{W} + \rho_2 \hat{W}^T & -\rho_2 A \hat{W} - \rho_2 B \beta X_1 - \rho_1 \hat{W}^T \\ * & -\hat{S} + \text{sym}\{\rho_1 A \hat{W} + \rho_1 B \beta X_1\} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} -\rho_2 B \\ \rho_1 B \end{bmatrix}, \quad \Xi = \alpha_0, \quad Y = [0 \ \beta X_1],$$

当且仅当存在标量 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$Z + \varepsilon_1 \beta_0^2 X X^T + \varepsilon_1^{-1} Y^T Y < 0, \quad (30)$$

即

$$Z + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{1/2} \beta_0 X & \varepsilon_1^{-1/2} Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{1/2} \beta_0 X^T \\ \varepsilon_1^{-1/2} Y \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

运用 Schur 补引理, 式 (31) 可直接写成

$$\begin{bmatrix} Z & [\varepsilon_1^{1/2} \beta_0 X \ \varepsilon_1^{-1/2} Y^T] \\ * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

式 (32) 分别左乘右乘 $\text{diag}\{I, I, \varepsilon_1^{1/2} I, \varepsilon_1^{1/2} I\}$, 便可证明 $\Omega < 0$.

定理 2 中的 $\Upsilon < 0$ 可直接写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} -Q_i & \chi_1 & 0 & 0 \\ * & \chi_2 & W_1^T B \alpha K_2 & -(A + B \alpha K_1)^T C^T \\ * & * & -\vartheta I & (I - CB \alpha K_2)^T \\ * & * & * & -\vartheta I \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

其中: 矩阵元素 $\chi_1 = \Psi_{12} P_{1i} - W_1, \chi_2 = Q_i + \Psi_{22} P_{1i} + \text{sym}\{W_1^T (A + B \alpha K_1)\}$. 对式 (33) 分别右乘和左乘 $\text{diag}\{W_1^{-1}, W_1^{-1}, I, I\}$ 及其转置矩阵, 可以得到如下

不等式:

$$\begin{bmatrix} -\hat{Q}_i & \bar{\chi}_1 & 0 & 0 \\ * & \bar{\chi}_2 & B\alpha X_2 & \bar{\chi}_3 \\ * & * & -\vartheta I & (I - CB\alpha X_2)^T \\ * & * & * & -\vartheta I \end{bmatrix} < 0. \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i &= \hat{W}^T Q_i \hat{W}, \hat{P}_{1i} = \hat{W}^T P_{1i} \hat{W}, \\ X_1 &= K_1 \hat{W}, X_2 = K_2, \\ \bar{\chi}_1 &= \Psi_{12} \hat{P}_{1i} - \hat{W}^T, \\ \bar{\chi}_2 &= \hat{Q}_i + \Psi_{22} \hat{P}_{1i} + \text{sym}\{A\hat{W} + B\alpha X_1\}, \\ \bar{\chi}_3 &= -\hat{W}^T A^T C^T - X_1^T \alpha^T B^T C^T. \end{aligned}$$

同上证明, 便可以得到 $\gamma < 0$ 成立. \square

定理3 针对不确定性故障重复系统 (10), 若存在矩阵 $X_1, X_2, \hat{W}, \hat{S} > 0, \hat{Q}_i > 0, \hat{P}_{1i} > 0, \hat{P}_{2i} > 0$ 和标量 $\rho_1, \rho_2, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 使得矩阵不等式 $\psi < 0, \Theta < 0$ 成立, ϑ 是正常数, 则系统在整个频率区间稳定. ψ, Θ 为对称元素, 即

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \hat{S} + \rho_2 \hat{W} + \rho_2 \hat{W}^T, \\ \psi_{12} &= -\rho_2 A \hat{W} - \rho_2 B \beta X_1 - \rho_1 \hat{W}^T, \\ \psi_{13} &= -\varepsilon_1 \rho_2 B \beta_0, \psi_{14} = \psi_{16} = 0, \\ \psi_{15} &= -\lambda_1 \rho_2 H_1, \\ \psi_{22} &= -\hat{S} + \text{sym}\{\rho_1 A \hat{W} + \rho_1 B \beta X_1\}, \\ \psi_{23} &= \varepsilon_1 \rho_1 B \beta_0, \psi_{24} = \beta X_1^T, \psi_{25} = \lambda_1 \rho_1 H_1, \\ \psi_{26} &= \hat{W}^T F_1^T + \beta X_1^T F_2^T, \psi_{33} = \psi_{44} = -\varepsilon_1 I, \\ \psi_{34} &= \psi_{35} = 0, \psi_{36} = \beta_0 \varepsilon_1 F_2^T, \psi_{45} = \psi_{46} = 0, \\ \psi_{55} &= \psi_{66} = -\lambda_1 I, \psi_{56} = 0; \\ \Theta_{11} &= -\hat{Q}_i, \Theta_{12} = \Psi_{12} \hat{P}_{1i} - \hat{W}^T, \\ \Theta_{13} &= 0, \Theta_{14} = -W_{12} C^T, \\ \Theta_{16} &= \Theta_{17} = \Theta_{18} = \Theta_{19} = 0, \\ \Theta_{15} &= -W_{12}, \Theta_{1,13} = W_{12} F_1^T, \\ \Theta_{1,10} &= \Theta_{1,11} = \Theta_{1,12} = 0, \\ \Theta_{22} &= \hat{Q}_i + \Psi_{22} \hat{P}_{1i} + \text{sym}\{A\hat{W} + B\beta X_1\}, \\ \Theta_{23} &= B\beta X_2, \Theta_{24} = -W_{22} C^T, \\ \Theta_{26} &= \Theta_{2,10} = 0, \\ \Theta_{25} &= \hat{W}^T A^T + X_1^T \beta B^T - W_{22}, \\ \Theta_{27} &= \varepsilon_2 \beta_0 B, \Theta_{28} = \beta X_1^T, \Theta_{29} = \beta X_1^T, \\ \Theta_{2,12} &= \hat{W}^T F_1^T + \beta X_1^T F_2^T, \Theta_{2,11} = \lambda_2 H_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2,13} &= W_{22} F_1^T, \Theta_{33} = -\vartheta I, \Theta_{34} = I - W_{32} C^T, \\ \Theta_{35} &= \beta X_2^T B^T - W_{32}, \Theta_{36} = \Theta_{37} = 0, \\ \Theta_{38} &= \beta X_2^T, \Theta_{39} = \beta X_2^T, \Theta_{3,10} = \Theta_{3,11} = 0, \\ \Theta_{3,12} &= \beta X_2^T F_2^T, \Theta_{3,13} = W_{32} F_1^T, \\ \Theta_{44} &= -\vartheta I - \text{sym}\{W_{42} C^T\}, \\ \Theta_{45} &= -W_{42} - C W_3^T, \\ \Theta_{46} &= \Theta_{47} = \Theta_{48} = \Theta_{49} = \Theta_{4,11} = \Theta_{4,12} = 0, \\ \Theta_{4,10} &= -\lambda_2 H_2, \Theta_{4,13} = W_{42} F_1^T, \\ \Theta_{55} &= -W_3 - W_3^T, \Theta_{56} = \varepsilon_2 \beta_0 B, \\ \Theta_{5,11} &= \lambda_2 H_1, \Theta_{5,13} = W_3 F_1^T, \\ \Theta_{57} &= \Theta_{58} = \Theta_{59} = \Theta_{5,10} = \Theta_{5,12} = 0, \\ \Theta_{66} &= -\varepsilon_2 I, \Theta_{77} = \Theta_{88} = \Theta_{99} = -\varepsilon_2 I, \\ \Theta_{6,12} &= \varepsilon_2 \beta_0 F_2^T, \\ \Theta_{10,10} &= \Theta_{11,11} = \Theta_{12,12} = \Theta_{13,13} = -\lambda_2 I. \end{aligned}$$

其他上三角矩阵位置未提及的都为0.

证明 为证明 $\psi < 0$, 定理3的第1个不等式为

$$Y_1 + M \bar{\Xi} N + N^T \bar{\Xi} M^T < 0. \quad (35)$$

其中

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \hat{S} + \rho_2 \hat{W} + \rho_2 \hat{W}^T & v_1 & -\varepsilon_1 \rho_2 B \beta_0 & 0 \\ * & v_2 & \varepsilon_1 \rho_1 B \beta_0 & \beta X_1^T \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix},$$

$$v_1 = -\rho_2 A \hat{W} - \rho_2 B \beta X_1 - \rho_1 \hat{W}^T,$$

$$v_2 = -\hat{S} + \text{sym}\{\rho_1 A \hat{W} + \rho_1 B \beta X_1\},$$

$$M = [-\rho_2 H_1^T \quad \rho_1 H_1^T \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$N = [0 \quad F_1 \hat{W} + \beta F_2 X_1 \quad \beta_0 \varepsilon_1 F_2 \quad 0],$$

当且仅当存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$Y_1 + \lambda_1 M M^T + \lambda_1^{-1} N^T N < 0 \quad (36)$$

成立. 而式 (36) 可以写成

$$Y_1 + [\lambda_1^{1/2} M \quad \lambda_1^{-1/2} N^T] \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} M^T \\ \lambda_1^{-1/2} N \end{bmatrix} < 0. \quad (37)$$

运用 Schur 补引理, 式 (37) 可写成

$$\begin{bmatrix} Y_1 & [\lambda_1^{1/2} M \quad \lambda_1^{-1/2} N^T] \\ * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (38)$$

对式 (38) 左乘和右乘 $\text{diag}\{I, I, I, I, \lambda_1^{1/2} I, \lambda_1^{1/2} I\}$, 可得 $\psi < 0$ 成立, 同理可证 $\Theta < 0$ 结论成立. \square

值得指出的是, 引理1和引理2是根据 KYP 引理

得到的全频、分频重复系统稳定的充要条件,目的是将时域转换到频域. 本文的定理和 LMI 条件是根据这些引理得出的, 由于 Schur 补与矩阵变换的不唯一性, 本文定理给出的仅是系统稳定的充分条件, 而非充要条件.

3 仿真实例

为了验证本文算法的有效性, 以重复注塑过程的注射速度控制过程为研究对象^[16]:

$$\begin{cases} x(t+1, k) = \\ (A + \Delta A)x(t, k) + (B + \Delta B)\alpha u(t, k), \\ y(t, k) = (C + \Delta C)x(t, k). \end{cases}$$

其中: 系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1.582 & -0.5916 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [1 \ 0]^T, \quad C = [1.69 \ 1.419];$$

期望轨迹定义为

$$y_r(t) = \begin{cases} \sin(0.01\pi t), & 1 \leq t < 200; \\ 1, & 200 \leq t < 300; \\ 4 - 0.01t, & 300 \leq t \leq 400. \end{cases}$$

时间 $t \in [0, 400]$, 各批次的初始状态为 0, $\forall k \geq 1$.

假设系统工作频率范围 $[0, \infty]$ 被分成 $[0, \infty] = [0, 6] \cup [6, 25] \cup [25, \infty]$ 共 3 段, 第 20 次迭代过程后突然出现执行器故障, 且故障系数 $\alpha = 0.7 + 0.3 \times \sin(0.5t)$. 评价性能, 引入性能指标

$$\text{RMS}(e(t, k)) = \sqrt{\frac{1}{400} \sum_{t=1}^{400} e^2(t, k)}.$$

若系统的不确定性矩阵 $H_1 = \text{diag}\{-0.05, 0.1\}$, $H_2 = [-0.12, 0.15]$, $F_1 = I$, $F_2 = [1 \ 1]^T$, $\Xi = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2\}$, σ_1 和 σ_2 是 $-1 \sim 1$ 之间的任意数值, 则分别根据定理 2 和定理 3 可求得系统的全频和分频的容错控制器增益矩阵, 具体如表 2 所示.

表 2 全频和分频的容错控制器增益矩阵

	K_1	K_2
不确定性全频	$[-1.5749 \ 0.7293]$	0.129 1
无不确定性全频	$[-1.8751 \ 0.7575]$	0.591 2
不确定性低频	$[-1.8631 \ 0.7289]$	0.294 2
无不确定性低频	$[-2.0580 \ 0.7790]$	0.356 2
不确定性中频	$[-1.8186 \ 0.7164]$	0.329 5
无不确定性中频	$[-1.9986 \ 0.7807]$	0.315 8
不确定性高频	$[-1.8319 \ 0.7199]$	0.304 3
无不确定性高频	$[-2.0173 \ 0.7768]$	0.354 5

结合式 (10) 绘制闭环故障系统 $G(z)$ 在对数频率范围内的模值情况 (如图 1 所示), 其模值严格小于 1, 结合引理 2 可知, 故障系统在低、中、高频段都稳定. 假设注塑过程工作在中频段, 此时系统均方根误差和迭代次数的仿真曲线如图 2、图 3 所示. 通过比较分频和全频的迭代容错控制效果可知, 分频控制结果在系统特定的频域范围内设计容错控制器, 在一定程度上可以加快收敛速度, 而且能更好地抑制执行器故障的影响. 低频段和高频段的结果与此类似, 限于篇幅, 不再赘述.

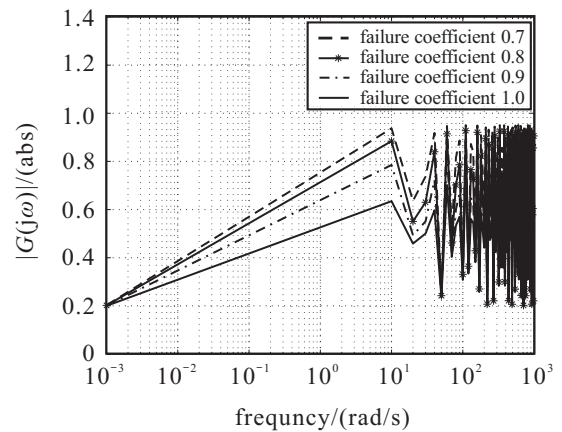


图 1 离散重复过程函数 $G(z)$ 的幅值特性

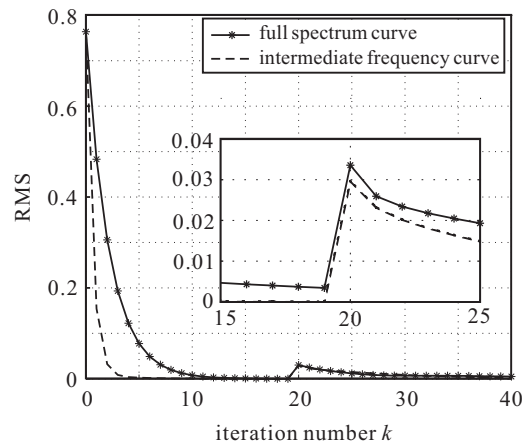


图 2 中频与全频均方根误差曲线 (无不确定性)

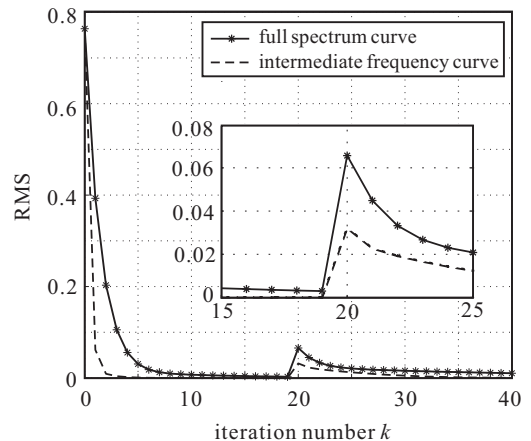


图 3 中频与全频均方根误差曲线 (不确定性)

4 结 论

本文研究了不确定性线性离散重复系统的迭代学习容错控制方法, 通过KYP引理在有限频率范围内建立线性矩阵不等式得到二维系统低中高频稳定的充分条件, 并通过仿真实验验证了所提出算法的可行性. 本文控制方法可以进一步推广应用于机械臂、化工过程、生物发酵等重复操作过程.

参考文献(References)

- [1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operating operation of robots by learning[J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(1): 123-140.
- [2] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 135-191.
(Xie S L, Tian S P, Xie Z D. Theory and application of iterative learning control[M]. Beijing: Publishing House of Science, 2005: 135-191.)
- [3] 李致富, 胡跃明, 郭琪伟, 等. 不确定性离散系统的鲁棒单调反馈-前馈迭代学习控制[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 485-492.
(Li Z F, Hu Y M, Guo Q W, et al. Robust monotone feedback feedforward iterative learning control for uncertain discrete-time systems[J]. *Control Theory & Application*, 2014, 31(4): 485-492.)
- [4] Hladowski L, Galkowski K, Rogers E, et al. Repetitive process based iterative learning control for a two motors system[C]. *IEEE Int Conf on Control Applications*. Croatia: IEEE, 2012: 154-159.
- [5] Wang L M, Mo S H, Zhou D H, et al. Delay-range-dependent robust 2D iterative learning control for batch processes with state delay and uncertainties[J]. *J of Process Control*, 2013, 23(5): 715-730.
- [6] Liu T, Gao F R. Robust two-dimensional iterative learning control for batch processes with state delay and time-varying uncertainties[J]. *Chemical Engineering Science*, 2010, 65(23): 6134-6144.
- [7] Wang Y Q, Shi J, Zhou D H, et al. Iterative learning fault-tolerant control for batch processes[J]. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2006, 45(26): 9050-9060.
- [8] Wang L M, Chen X, Gao F R. An LMI method to robust iterative learning fault-tolerant guaranteed cost control for batch processes[J]. *Chinese J of Chemical Engineering*, 2013, 21(4): 401-411.
- [9] Paszke W, Rogers E, Galkowski K. KYP lemma based stability and control law design for differential linear repetitive processes with applications[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(7): 560-566.
- [10] Paszke W, Rogers E, Galkowski K, et al. Robust finite frequency range iterative learning control design and experimental verification[J]. *Control Engineering Practice*, 2013, 21(10): 1310-1320.
- [11] Ding J, Yang H Z. Robust monotonically convergent iterative learning control for discrete-time systems via generalized KYP lemma[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID: 450241.
- [12] Rogers E, Galkowski K, Owens D H. Control systems theory and applications for linear repetitive processes[C]. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 62-65.
- [13] Rantzer A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma[J]. *Systems and Control Letters*, 1996, 28(1): 7-10.
- [14] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41-59.
- [15] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to control[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421-448.
- [16] Shi J, Gao F R, Wu T J. Robust design of integrated feedback and iterative learning control of a batch process based on a 2D Roesser system[J]. *J of Process Control*, 2005, 15(8): 907-924.

(责任编辑: 李君玲)