

一种自适应吸引律离散时间控制方法

邬玲伟^{1,2}, 孙明轩¹

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023; 2. 台州学院 物理与电子工程学院, 浙江 台州 317000)

摘要: 针对一类输入输出描述的离散时间系统, 提出一种基于自适应切换增益的吸引律. 该方法能够根据不确定干扰变化率对闭环系统影响的强弱自动调整切换增益大小, 且可直接反映误差动态特性. 同时, 给出了闭环系统跟踪误差首次穿越原点所需的最多步数, 并推导出系统绝对吸引层和稳态误差带边界的具体表达式, 用于表征闭环系统跟踪误差的收敛性能和稳态性能. 数值仿真和电机伺服系统上的实验结果均验证了所提出方法的有效性.

关键词: 离散时间系统; 吸引律; 抖振; 自适应切换增益

中图分类号: TP273

文献标志码: A

A discrete-time control method based on adaptive attracting law

WU Ling-wei^{1,2}, SUN Ming-xuan¹

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China; 2. College of Physics and Electronic Engineering, Taizhou University, Taizhou 317000, China. Correspondent: SUN Ming-xuan, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn)

Abstract: This paper presents an attracting law approach based on the adaptive switching gain for discrete-time systems with input/output description. This method can automatically tune the switching gain according to the vary speed of closed-loop system uncertainties, and directly presents properties of the error-dynamics. In order to characterize both the convergence performance and steady-state performance, the steps for tracking error to converge to the origin, and the expressions for the range of the steady-state error and the absolute attractive layer are derived. Both numerical simulation and experiment results show the effectiveness of the proposed control method.

Keywords: discrete-time systems; attracting law; chattering; adaptive switching gain

0 引言

变结构控制因其滑动模态对系统在受到参数摄动及外界扰动时所具有的强鲁棒性而引起人们极大兴趣^[1]. 在变结构控制中, 首先需考虑到达条件. 到达条件不同, 设计出的变结构控制器也不同. 早期文献中的到达条件具有不等式形式^[2-4]. 我国学者高为炳^[5-6]提出了等式形式表示到达条件的趋近律. 与不等式形式的到达条件相比, 趋近律可以更好地描述系统状态趋近滑模面的运动过程, 而且可直接推导出控制器. 目前, 趋近律方法已成为离散变结构控制器设计的主要方法.

现有的研究已给出了多种不同的准滑动模态定义, 如何刻画准滑动模态引起了国内外学者极大的兴趣, 特别是准滑模带的不变性及准滑模带外区域的收敛性问题. 文献[6]给出了准滑动模态的定义, 并提

出了准滑模带宽的概念; 文献[7]对文献[6]提出的趋近律方法进行了较为深入的研究, 检验了关于准滑模带宽度的估计. 进一步, 文献[8]给出了新的准滑动模态定义, 所提出的趋近律放宽了高氏趋近律步步穿越滑模面的要求; 文献[6-18]分别针对确定性系统和不确定性系统, 推导出了准滑模带宽的表达式; 文献[8-9,12-18]对准滑模带外区域切换函数的收敛过程进行了刻画; 文献[9]给出了系统切换函数的绝对吸引层边界和准滑模带边界的估计值, 用于刻画趋近过程和准滑动模态; 文献[13]对这两个边界给出了更具体的分析, 并阐明吸引层边界和准滑模带边界是可以不同的; 文献[16-17]给出了切换函数首次穿越滑模面所需的步数.

对于不确定性系统, 采用离散趋近律进行控制器设计, 所导出的控制器依赖于不确定性项, 因而在实

收稿日期: 2015-07-01; 修回日期: 2015-12-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174034, 61374103, 61573320).

作者简介: 邬玲伟(1985-), 男, 博士生, 从事重复控制的研究; 孙明轩(1961-), 男, 教授, 博士生导师, 从事学习控制、非线性控制等研究.

实际中无法实现. 因此, 需采用理想切换动态方法, 对原趋近律进行修正. 首先将干扰补偿措施“嵌入”趋近律, 获得理想的切换动态; 然后, 设计控制器以实现理想切换动态. 这是一种考虑了干扰抑制目的用于处理不确定系统的趋近律方法^[8-9,13,17]. 文献[19-21]提出了一种与趋近律具有相同形式、能够使跟踪误差本身趋近原点的吸引律. 该方法无需定义切换函数, 控制器设计变得更为直接、简洁. 趋近律方法能够保证滑动模态的不变性, 而吸引律方法可以实现原点(即稳态点)的相同特性. 趋近律方法导致的动态过程是由趋近律和滑动模态确定的, 而吸引律方法导致的动态过程只是由吸引律确定的.

本文推广文献[19-21]的结果, 引入自适应切换增益, 构造自适应吸引律, 用其设计控制器. 该方法直接反映了系统误差动态特性, 且可使切换增益根据不确定性干扰变化率对闭环系统影响的强弱自动调整其大小. 文中给出了跟踪误差首次穿越原点所需的最多步数, 并推导出系统绝对吸引层和稳态误差带边界的具体表达式, 用于表征系统跟踪误差的收敛性能和稳态性能. 给出的数值仿真以及在电机伺服系统上的实验均表明了所提出控制方法的有效性.

1 问题描述

考虑如下输入输出描述的离散时间系统:

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + w_k. \quad (1)$$

其中: u_k 和 y_k 分别为系统 k 时刻的输入和输出; w_k 为 k 时刻的系统干扰; $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 为延迟算子 q^{-1} 的多项式, 即

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \quad b_0 \neq 0. \quad (3)$$

n 为 $A(q^{-1})$ 的阶数; m 为 $B(q^{-1})$ 的阶数; $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ 为系统参数, 且 $1 \leq m \leq n$.

定义跟踪误差

$$e_k = r_k - y_k, \quad (4)$$

其中 r_k 为参考信号.

本文的控制目的在于寻找合适的控制序列 u_k , 在保证闭环系统稳定的同时, 能够使得输出信号 y_k 尽可能地跟踪上参考信号 r_k .

为了表征系统跟踪误差的收敛性能和稳态性能, 引入下述定义:

1) 绝对吸引层边界 $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 满足

$$|e_{k+1}| < |e_k|, \text{ if } |e_k| > \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}; \quad (5)$$

2) 稳态误差带边界 $\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)}$ 满足

$$|e_{k+1}| \leq \Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)}, \text{ if } |e_k| \leq \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}, \quad k > k^*. \quad (6)$$

其中: k^* 为正整数, $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 为第 k 时刻的绝对吸引层

边界, $\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)}$ 为第 $k+1$ 时刻的稳态误差带边界.

注1 容易看出, 系统跟踪误差收敛进入稳态误差带内的充分必要条件为

$$|e_{k+1}| < |e_k|, \quad (7)$$

与准滑模存在条件相似.

注2 文献[19-20]给出了跟踪误差的绝对吸引层边界和稳态误差带边界的定义以及相应的表达式, 用来描述收敛性能和稳态性能. 当控制器参数设定时, 这两个边界值是不变的. 本文给出的两个边界的定义有别于文献[19-20], 且这两个边界会随着控制器中的自适应参数(第2节给出)而变化. 此外, $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} \leq \Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)}$.

2 自适应吸引律

考虑下述离散吸引律:

$$e_{k+1} = \rho e_k - \varepsilon_k \text{sgn}(e_k) + w_k - w_{k+1}. \quad (8)$$

其中: $0 < \rho < 1$ 为可调参数; w_{k+1} 为第 $k+1$ 时刻的系统干扰; w_k 用于补偿 w_{k+1} , 尽可能地降低干扰对系统控制性能的影响. 符号函数 $\text{sgn}(e_k)$ 定义如下:

$$\text{sgn}(e_k) = \begin{cases} 1, & e_k \geq 0; \\ -1, & e_k < 0. \end{cases} \quad (9)$$

假设系统干扰的变化率有界, 即

$$\delta_{k+1} = w_{k+1} - w_k, \quad |\delta_{k+1}| \leq \Delta. \quad (10)$$

具有自适应功能的切换增益变量为

$$\varepsilon_k = [1 + \lambda \text{sgn}(e_k) \text{sgn}(e_{k-1})] \varepsilon_{k-1}, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \eta; \quad (11a)$$

$$\varepsilon_k = \eta, \quad \varepsilon_k \geq \eta \geq \Delta. \quad (11b)$$

其中 $0 \leq \lambda < 1$.

注3 式(8)中 w_k 的作用是利用历史数据计算出第 k 时刻的系统干扰, 用于补偿第 $k+1$ 时刻的系统干扰. 本文提出的补偿方法适用于不确定性干扰的动态变化较慢的情况, 而对于干扰信号有较高动态情形, 则可通过调整采样周期来降低干扰信号的影响.

注4 本文引入的自适应思想源于文献[12]的自适应切换增益设计方法. 两者区别在于: 本文提出的方法能够根据不确定干扰变化率对闭环系统影响的强弱自动调整切换增益大小, 而文献[12]所提出的方法使切换增益根据不确定因素的强弱自动调整其大小; 文献[12]中的式(8b)要求切换增益的上界等于不确定因素的上界, 而本文给出的式(11b)要求切换增益的上界大于等于系统不确定干扰变化率的上界, 即 $\eta \geq \Delta$. 若系统干扰变化率的上界 Δ 无法获知, 则式(11b)可不予考虑, 其存在与否并不影响闭环系统的鲁棒稳定性, 只对由式(11a)决定的自适应过程的动态性能产生部分影响.

注 5 当 $\lambda = 0$ 时, 自适应切换增益退化为固定切换增益. 由此可知, 文献 [19] 中的指数吸引律实际上是自适应吸引律 (8) 置 $\lambda = 0$ 时的特例.

结合式 (1) 与 (10), 可得

$$\delta_{k+1} = A(q^{-1})(y_{k+1} - y_k) - B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k).$$

由跟踪误差的定义 (4) 知

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= r_{k+1} - e_{k+1} - (r_k - e_k) + \\ &\quad (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) - \\ &\quad B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned} \quad (12)$$

将式 (12) 代入 (8), 得

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \rho e_k - \varepsilon_k \operatorname{sgn}(e_k) - r_{k+1} + e_{k+1} + r_k - \\ &\quad e_k - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) + \\ &\quad B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned} \quad (13)$$

从而可得到控制器为

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + \frac{1}{b_1} [-\rho e_k - \varepsilon_k \operatorname{sgn}(e_k) + r_k - \\ &\quad r_{k+1} - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) + \\ &\quad (B(q^{-1}) - b_1 q^{-1})(u_{k+1} - u_k)]. \end{aligned} \quad (14)$$

3 收敛性能和稳态性能分析

本节将给出跟踪误差从任意初始误差开始首次穿越原点所需的最多步数, 并推导出系统绝对吸引层边界和稳态误差带边界的具体表达式, 用于表征系统跟踪误差的收敛性能和稳态性能.

定理 1 针对利用满足式 (11) 要求的吸引律 (8) 设计的控制系统, 对于任意初始误差值 e_0 , 跟踪误差最多经过 $[k^*] + 1$ 步后首次穿越原点. 其 k^* 的具体取值会因 ε_0 、 η 、 λ 取值的不同而出现下列 3 种情况:

1) 当 $\varepsilon_0 \geq \eta$ 或 $\lambda = 0$, $\varepsilon_0 = \eta$ 时, k^* 的具体表达式为

$$k^* = \log_{\rho} \left(\frac{\eta - \Delta}{\eta - \Delta + (1 - \rho)|e_0|} \right); \quad (15)$$

2) 当 $\varepsilon_0 < \eta$, $[k^*] \leq \beta$ 或不考虑式 (11b) 时, k^* 满足

$$\rho^{k^*} |e_0| - \frac{(1 + \lambda)^{k^*} - \rho^{k^*}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \frac{1 - \rho^{k^*}}{1 - \rho} \Delta = 0; \quad (16)$$

3) 当 $\varepsilon_0 < \eta$, $[k^*] > \beta$ 且考虑式 (11b) 时, k^* 满足

$$\begin{aligned} \rho^{k^*} |e_0| - \frac{(1 + \lambda)^{\beta} \rho^{k^* - \beta} - \rho^{k^*}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \\ \frac{1 - \rho^{k^*}}{1 - \rho} \Delta - \frac{1 - \rho^{k^* - \beta}}{1 - \rho} \eta = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $\beta = \lceil \log_{(1+\lambda)}(\eta/\varepsilon_0) \rceil$, $\lceil \bullet \rceil$ 表示小于或等于 \bullet 的最大整数.

证明 k^* 具体取值的 3 种情况的证明过程类似, 下面只证明第 3 种情况.

当 $\varepsilon_0 < \eta$, $k \leq \beta$ 时, 系统的切换增益 ε_k 以递增

形式向原点方向运动, 即

$$\varepsilon_k = (1 + \lambda)^k \varepsilon_0 \leq \eta, \quad k = 1, 2, \dots, \beta. \quad (18)$$

当 $k > \beta$ 时, 有 $\varepsilon_k > \eta$. 结合式 (11b) 可知, 切换增益变为 $\varepsilon_k = \eta$. 假设从任意初始误差值 e_0 开始 $e_0, e_1, \dots, e_{[k^*]}$ 符号相同. 对于所有 $m \leq [k^*]$, 有 $\operatorname{sgn}(e_{m-1}) = \operatorname{sgn}(e_m)$, 则

$$\begin{aligned} |e_m| &= e_m \operatorname{sgn}(e_m) = e_m \operatorname{sgn}(e_{m-1}) = \\ &\quad [\rho e_{m-1} - \varepsilon_{m-1} \operatorname{sgn}(e_{m-1}) - \delta_m] \operatorname{sgn}(e_{m-1}) = \\ &\quad \rho |e_{m-1}| - \varepsilon_{m-1} - \delta_m \operatorname{sgn}(e_{m-1}). \end{aligned} \quad (19)$$

由式 (10) 和 (19) 可得

$$\begin{aligned} |e_1| &= e_1 \operatorname{sgn}(e_0) = \rho |e_0| - \varepsilon_0 - \delta_1 \operatorname{sgn}(e_0), \\ |e_2| &= e_2 \operatorname{sgn}(e_1) = \rho |e_1| - \varepsilon_1 - \delta_2 \operatorname{sgn}(e_1) = \\ &\quad \rho^2 e_0 - \rho(\varepsilon_0 + \delta_1 \operatorname{sgn}(e_0)) - \\ &\quad (1 + \lambda)\varepsilon_0 - \delta_2 \operatorname{sgn}(e_1), \\ &\quad \vdots \\ |e_{\beta}| &= e_{\beta} \operatorname{sgn}(e_{\beta-1}) = \rho^{\beta} |e_0| - \rho^{\beta-1} \varepsilon_0 - \dots - \\ &\quad \rho^{\beta-2} (1 + \lambda)\varepsilon_0 - (1 + \lambda)^{\beta-1} \varepsilon_0 - \\ &\quad \rho^{\beta-1} \delta_1 \operatorname{sgn}(e_0) - \dots - \delta_{\beta} \operatorname{sgn}(e_{\beta-1}) = \\ &\quad \rho^{\beta} |e_0| - \sum_{i=1}^{\beta} \rho^{\beta-i} \delta_i \operatorname{sgn}(e_{i-1}) - \\ &\quad \sum_{i=0}^{\beta-1} (1 + \lambda)^{\beta-1} \varepsilon_0 \left(\frac{\rho}{1 + \lambda} \right)^{\beta-1-i} \leq \\ &\quad \rho^{\beta} |e_0| - \frac{(1 + \lambda)^{\beta} - \rho^{\beta}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \frac{1 - \rho^{\beta}}{\rho} \Delta, \\ |e_{\beta+1}| &= e_{\beta+1} \operatorname{sgn}(e_{\beta}) \leq \rho \left[-\frac{(1 + \lambda)^{\beta} - \rho^{\beta}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \right. \\ &\quad \left. \rho^{\beta} |e_0| \frac{1 - \rho^{\beta}}{\rho} \Delta \right] - \varepsilon_{\beta} - \delta_{\beta+1}, \\ &\quad \vdots \\ |e_m| &= e_m \operatorname{sgn}(e_{m-1}) \leq \rho^{m-\beta} \left[\rho^{\beta} |e_0| \frac{1 - \rho^{\beta}}{1 - \rho} \Delta - \right. \\ &\quad \left. \frac{(1 + \lambda)^{\beta} - \rho^{\beta}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 \right] + (\Delta - \eta) \sum_{i=0}^{m-\beta-1} \rho^i = \\ &\quad \rho^m |e_0| - \frac{\rho^{m-\beta} (1 + \lambda)^{\beta} - \rho^m}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \\ &\quad \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \Delta - \frac{1 - \rho^{m-\beta}}{1 - \rho} \eta. \end{aligned} \quad (20)$$

假设在 $[k^*] + 1$ 时刻跟踪误差首次穿越原点, 且 k^* 满足

$$\begin{aligned} \rho^{k^*} |e_0| - \frac{(1 + \lambda)^{\beta} \rho^{k^* - \beta} - \rho^{k^*}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \\ \frac{1 - \rho^{k^*}}{1 - \rho} \Delta - \frac{1 - \rho^{k^* - \beta}}{1 - \rho} \eta = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(20)和(21)可得

$$\begin{aligned} & e_{\lceil k^* \rceil + 1} \operatorname{sgn}(e_{\lceil k^* \rceil}) \leq \\ & \rho^{\lceil k^* \rceil + 1} |e_0| - \frac{(1 + \lambda)^\beta \rho^{\lceil k^* \rceil + 1 - \beta} - \rho^{\lceil k^* \rceil + 1}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \\ & \frac{1 - \rho^{\lceil k^* \rceil + 1}}{1 - \rho} \Delta - \frac{1 - \rho^{\lceil k^* \rceil + 1 - \beta}}{1 - \rho} \eta < \\ & \rho^{k^*} |e_0| - \frac{(1 + \lambda)^\beta \rho^{k^* - \beta} - \rho^{k^*}}{1 - \rho + \lambda} \varepsilon_0 + \\ & \frac{1 - \rho^{k^*}}{1 - \rho} \Delta - \frac{1 - \rho^{k^* - \beta}}{1 - \rho} \eta = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

由式(22)可知 $\operatorname{sgn}(e_{\lceil k^* \rceil} + 1) = -\operatorname{sgn}(e_{\lceil k^* \rceil})$. 这与假设 $e_0, e_1, \dots, e_{\lceil k^* \rceil}$ 符号相同相矛盾. \square

注6 当 $\Delta = 0$ 时, 由式(16)可得

$$k^* = \log_{\left(\frac{\rho}{1+\lambda}\right)} \left(\frac{\varepsilon_0}{(1 - \rho + \lambda)|e_0| + \varepsilon_0} \right). \quad (23)$$

定理2 对于不确定系统(1), 采用控制器(14), 闭环系统跟踪误差的绝对吸引层和稳态误差带边界分别为

$$\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, & 0 < \varepsilon_k \leq \rho\Delta; \\ \frac{\varepsilon_k + \Delta}{1 + \rho}, & \rho\Delta < \varepsilon_k \leq \eta; \\ \frac{\eta + \Delta}{1 + \rho}, & \varepsilon_k > \eta. \end{cases} \quad (24)$$

$$\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, & 0 < \varepsilon_k \leq \frac{\rho\Delta}{2 - \rho}; \\ \Delta + \varepsilon_k, & \frac{\rho\Delta}{2 - \rho} < \varepsilon_k \leq \eta; \\ \Delta + \eta, & \varepsilon_k > \eta. \end{cases} \quad (25)$$

证明 为了证明上述绝对吸引层边界, 首先考虑吸引律(8). 当 $e_k > 0$ 时, 由式(8)和(11b)可得

$$e_{k+1} = \rho e_k - \min\{\varepsilon_k, \eta\} - \delta_{k+1}.$$

利用 $|\delta_{k+1}| \leq \Delta$, 有

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq \rho e_k - \min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta, \\ e_{k+1} \geq \rho e_k - \min\{\varepsilon_k, \eta\} - \Delta. \end{cases}$$

要使 $|e_k|$ 满足单调递减, 即 $-e_k < e_{k+1} < e_k$, 则需同时满足

$$\rho e_k - \min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta < e_k, \quad (26)$$

和

$$\rho e_k - \min\{\varepsilon_k, \eta\} - \Delta > -e_k. \quad (27)$$

解不等式方程(26)和(27), 得

$$e_k > \max\left\{ \frac{\Delta - \min\{\varepsilon_k, \eta\}}{1 - \rho}, \frac{\min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta}{1 + \rho} \right\}.$$

同理, 当 $e_k < 0$ 时, 要使 $|e_k|$ 满足单调递减, 则 e_k 需满足

$$e_k < \min\left\{ -\frac{\Delta - \min\{\varepsilon_k, \eta\}}{1 - \rho}, -\frac{\min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta}{1 + \rho} \right\}.$$

因此, 系统绝对吸引层边界为

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{AAL}}^{(k)} &= \max\{(\Delta - \min\{\varepsilon_k, \eta\})/(1 - \rho), \\ & (\min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta)/(1 + \rho)\}. \end{aligned} \quad (28)$$

下面给出跟踪误差绝对吸引层边界 $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 与控制器参数 ε_k 之间的关系. 当 $\varepsilon_k \leq \eta$ 时, 由式(28)可得

$$\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \max\left\{ \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, \frac{\varepsilon_k + \Delta}{1 + \rho} \right\}. \quad (29)$$

当 $\varepsilon_k = \rho\Delta < \eta$ 时, 有

$$\frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho} = \frac{\varepsilon_k + \Delta}{1 + \rho} = \Delta; \quad (30)$$

当 $\varepsilon_k > \eta$ 时, 由式(28)知

$$\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \frac{\eta + \Delta}{1 + \rho}. \quad (31)$$

这样, 结合式(29)~(31)可得(24).

可以看出, 系统跟踪误差的绝对吸引层边界大于等于系统干扰变化率的上界值, 即 $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} \geq \Delta$. 当 $0 < \varepsilon_k \leq \rho\Delta$ 时, $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 随着 ε_k 的增大而减小; 当 $\rho\Delta < \varepsilon_k \leq \eta$ 时, $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 随着 ε_k 的增大而增大; 当 $\varepsilon_k > \eta$ 时, $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \frac{\eta + \Delta}{1 + \rho}$. 因此, 当 $\varepsilon_k = \rho\Delta$ 时, 系统跟踪误差的绝对吸引层边界最小, 这时 $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \Delta$. 此外, 绝对吸引层边界的最大值在 $\varepsilon_k = 0$ 或 $\varepsilon_k \geq \eta$ 时取得, 有

$$\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} \leq \max\left\{ \frac{\Delta}{1 - \rho}, \frac{\eta + \Delta}{1 + \rho} \right\}.$$

下面证明稳态误差带边界 Δ_{SSE} .

为了给出系统稳态误差带边界, 考虑吸引律(8), 当 $|e_k| > \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 时, $|e_k|$ 是单调递减的, 即 $|e_{k+1}| < |e_k|$. 当 $|e_k| \leq \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 时, 下一时刻的跟踪误差 e_{k+1} 有可能越出系统的绝对吸引层边界 $\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$, 即 $|e_{k+1}| > \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$. 所以系统稳态误差带边界的求解可以转换为 e_k 在区间 $[-\Delta_{\text{AAL}}^{(k)}, \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}]$ 求极值.

当 $0 \leq e_k \leq \Delta_{\text{AAL}}^{(k)}$ 时, 由式(10)、(11b)和吸引律(8)得

$$\begin{aligned} & -\min\{\varepsilon_k, \eta\} - \Delta \leq \\ & \rho e_k - \min\{\varepsilon_k, \eta\} \operatorname{sgn}(e_k) - \delta_{k+1} \leq \\ & \rho \Delta_{\text{AAL}}^{(k)} - \min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta. \end{aligned} \quad (32)$$

由式(32)知

$$\begin{aligned} |e_{k+1}|_{\max} &= \max\{\min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta, \\ & |\rho \Delta_{\text{AAL}}^{(k)} - \min\{\varepsilon_k, \eta\} + \Delta|\}, \end{aligned} \quad (33)$$

结合式(24)可得

$$|e_{k+1}|_{\max} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, & 0 < \varepsilon_k \leq \frac{\rho\Delta}{2 - \rho}; \\ \Delta + \varepsilon_k, & \frac{\rho\Delta}{2 - \rho} < \varepsilon_k \leq \eta; \\ \Delta + \eta, & \varepsilon_k > \eta. \end{cases} \quad (34)$$

同理, 当 $-\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} \leq e_k \leq 0$ 时, 可得到相同的结果. 因此, 系统稳态误差带边界 $\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)}$ 为

$$\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, & 0 < \varepsilon_k \leq \frac{\rho\Delta}{2 - \rho}; \\ \Delta + \varepsilon_k, & \frac{\rho\Delta}{2 - \rho} < \varepsilon_k \leq \eta; \\ \Delta + \eta, & \varepsilon_k > \eta. \end{cases} \quad (35)$$

由此定理得证. \square

注7 当不考虑式(11b)时,跟踪误差的绝对吸引层和稳态误差带边界分别变为

$$\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, & \varepsilon_k \leq \rho\Delta; \\ \varepsilon_k + \Delta, & \varepsilon_k > \rho\Delta. \end{cases} \quad (36)$$

$$\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon_k}{1 - \rho}, & \varepsilon_k \leq \frac{\rho\Delta}{2 - \rho}; \\ \varepsilon_k + \Delta, & \varepsilon_k > \frac{\rho\Delta}{2 - \rho}. \end{cases} \quad (37)$$

注8 当 $\lambda = 0$ 时,自适应切换增益 ε_k 退化为固定切换增益 ε_0 .系统跟踪误差的绝对吸引层边界变为

$$\Delta_{\text{AAL}}^{(k)} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon_0}{1 - \rho}, \frac{\varepsilon_0 + \Delta}{1 + \rho}\right\},$$

稳态误差带边界变为

$$\Delta_{\text{SSE}}^{(k+1)} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon_0}{1 - \rho}, \varepsilon_0 + \Delta\right\}.$$

4 数值仿真与实验结果

以电机为被控对象,验证上述理论结果.将电机动态特性表达为二阶离散时间动态系统,其输入输出特性可写成

$$y_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} + b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + w_{k+1}. \quad (38)$$

其中: u_k 和 y_k 分别为第 k 时刻的系统控制输入和输出, w_{k+1} 为第 $k+1$ 时刻的系统干扰项(包括参数扰动、外部干扰及各种未建模动态特性等).模型参数为

$$a_1 = -1.5001, a_2 = 0.4989,$$

$$b_1 = 2.8786, b_2 = -0.4113.$$

对于由式(38)表示的受控对象,控制器(14)变成

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{b_1} [b_2(u_{k-2} - u_{k-1}) + r_{k+1} - r_k + (1 - \rho)e_k + \varepsilon_k \text{sgn}(e_k) + a_1 \times (y_k - y_{k-1}) + a_2(y_{k-1} - y_{k-2})]. \quad (39)$$

4.1 数值仿真

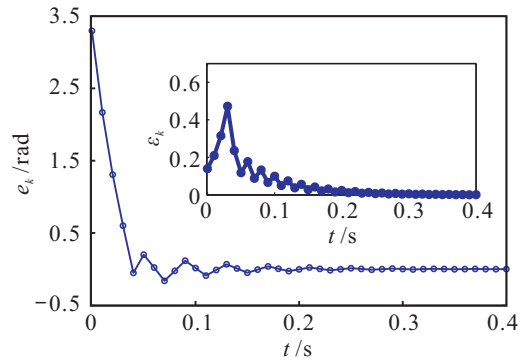
仿真中,选取参考正弦信号 $5\pi \times \sin(2\pi f T_s k)$ rad,采样时间 $T_s = 0.01$ s,频率 $f = 0.5$ Hz.系统干扰由两个三角波组成,具体形式如下:

$$w_{k+1} = m \times [0.12 \times |\text{mod}(k, 20) - 10| + 0.18 \times |\text{mod}(k + 7, 20) - 10|]. \quad (40)$$

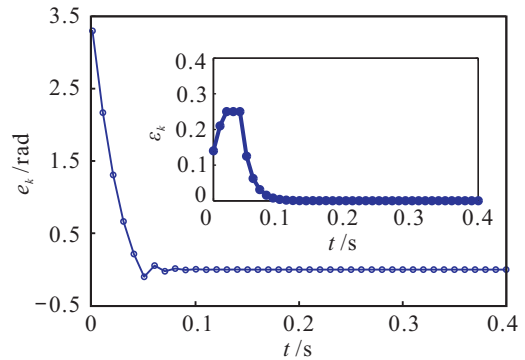
此时,吸引律中不确定项的界 $\Delta = 0.3m$,初始跟踪误差值 $e_0 = 3.3$ rad.

本文针对无干扰和存在干扰两种情形进行仿真.

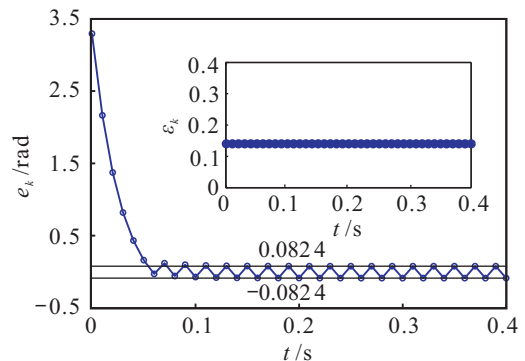
情形1 可调参数 $m = 0$,即 $\Delta = 0$.当不考虑式(11b)(未限幅自适应切换增益)时,控制器参数设置为 $\lambda = 0.5$, $\rho = 0.7$, $\varepsilon_0 = 0.14$.仿真曲线如图1(a)所示.由式(23)可知 $k^* = 3.92$,则 $[k^*] + 1 = 4$.这与图1(a)跟踪误差首次穿越原点的步数(4步)一致.当考虑式(11b)(限幅自适应切换增益)且 $\eta = 0.25$ 时,其他参数同上,仿真曲线如图1(b)所示.由于 $\beta = \lceil \log_{(1+\lambda)}(\eta/\varepsilon_0) \rceil = \lceil 2.26 \rceil = 2$,由定理1中的式(17)可得 $k^* = 4.69$,则 $[k^*] + 1 = 5$,这与图1(b)跟踪误差首次穿越原点的步数(5步)一致.从图1(a)和图1(b)可以看出,式(11b)考虑与否并不影响闭环系统的稳定性,只对收敛过程产生部分影响.当 $\lambda = 0$ 时,自适应切换增益退化为固定切换增益.控制器参数分别置为 $\rho = 0.7$, $\varepsilon_0 = \eta = 0.14$,仿真曲线如图1(c)所示.跟踪误差在 $[k^*] + 1 = 6$ 步首次穿越原点,并收敛



(a) 未限幅自适应切换增益



(b) 限幅自适应切换增益



(c) 固定切换增益

图1 $\Delta = 0$ 时的跟踪误差

于对称的2-周期点 $\{-0.0824, 0.0824\}$. 其中

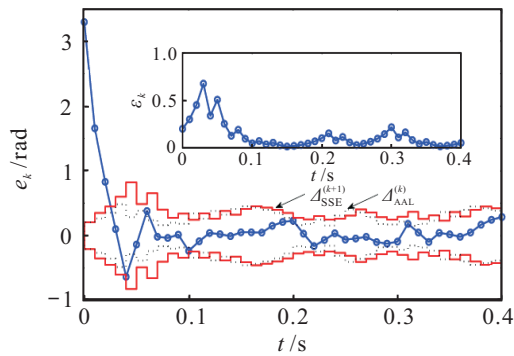
$$k^* = \log_{\rho} \left(\frac{\eta}{\eta + (1 - \rho)|e_0|} \right) = 5.86, \frac{\varepsilon_0}{1 + \rho} = 0.0824.$$

情形2 可调参数 $m = 0.5$, 即 $\Delta = 0.15$. 控制器参数设置为 $\lambda = 0.5, \rho = 0.7, \varepsilon_0 = 0.2$. 不考虑式(11)情况下的仿真曲线如图2(a)所示, 考虑式(11)且 $\eta = 0.25$ 情况下的仿真曲线如图2(b)所示. 由图2(a)和图2(b)可知, 式(11b)只对自适应过程的动态性能产生部分影响. 当 $\lambda = 0$ 时, 自适应切换增益退化为固定切换增益, 其他参数同上, 仿真曲线见图2(c). 系统绝对吸引层和稳态误差带边界分别为

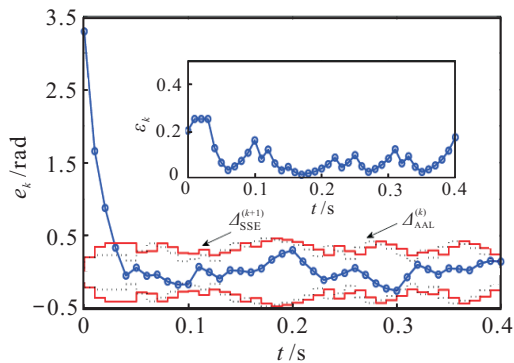
$$\Delta_{AAL}^{(k)} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon_0}{1 - \rho}, \frac{\varepsilon_0 + \Delta}{1 + \rho} \right\} = 0.2059,$$

$$\Delta_{SSE}^{(k+1)} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon_0}{1 - \rho}, \varepsilon_0 + \Delta \right\} = 0.35.$$

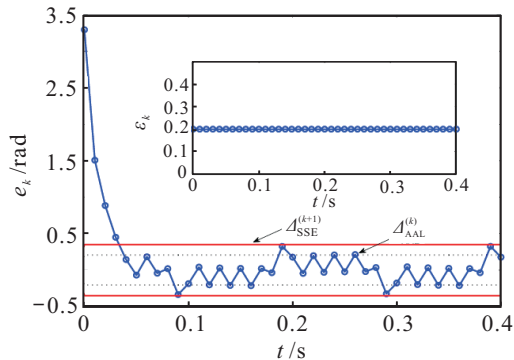
由图2可知, $\Delta_{AAL}^{(k)}$ 和 $\Delta_{SSE}^{(k+1)}$ 始终满足 $\Delta_{AAL}^{(k)} \leq \Delta_{SSE}^{(k+1)}$.



(a) 无限幅自适应切换增益



(b) 限幅自适应切换增益



(c) 固定切换增益

图2 $\Delta = 0.15$ 时的跟踪误差

4.2 实验结果

实验在一伺服电机控制系统上进行. 其中: TM-S320F2812DSP 开放板实现电机三环控制系统中的位置环控制算法; ELMO 驱动器除了实现电机驱动外, 其内部还承担电流环、速度环控制(均采用PI控制算法), 能有效减少DSP开发板作为位置环控制器的在线计算负担.

在实验中, 电机的位置参考信号设置为

$$r_k = \frac{\pi}{4} \times \sin(2\pi f T_s k) \text{ rad}. \quad (41)$$

其中: 频率 $f = 0.25 \text{ Hz}$, 采样周期 $T_s = 5 \text{ ms}$. 采用控制器(39), 实验结果见图3. 其第1、第2周期的控制器参数选为 $\rho = 0.3, \varepsilon_0 = \eta = 3.14 \times 10^{-4}, \lambda = 0$, 跟踪误差收敛进入 $|e_k| \leq 1.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 邻域内; 第3~第6周期的控制器参数分别置为 $\rho = 0.3, \varepsilon_0 = \eta = 3.14 \times 10^{-4}, \lambda = 0.5$, 且第3、第4周期不考虑式(11b)而第5、第6周期考虑式(11b), 跟踪误差约为 $8 \times 10^{-4} \text{ rad}$.

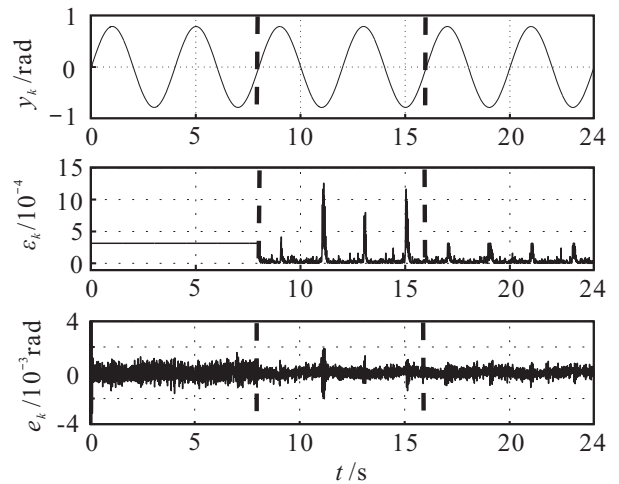


图3 采用控制器(39)时的跟踪性能

实验结果表明, 与采用固定切换增益相比, 利用基于自适应切换增益设计的控制器能够有效减弱抖振, 且进一步改善控制系统中的动态品质. 另外, 式(11b)考虑与否并不影响闭环系统的稳定性, 只对系统动态性能产生部分影响.

5 结论

本文提出了一种引入自适应思想的离散时间系统控制器设计方法, 能够根据不确定性干扰的变化率对闭环系统影响的强弱自动调整切换增益大小, 可有效削弱抖振并较好地克服不确定性干扰的影响. 本文给出了跟踪误差首次穿越原点所需的最多步数, 并详细推导了系统绝对吸引层和稳态误差带边界的表达式, 用于表征跟踪误差的收敛性能和稳态性能. 所完成的数值仿真及在电机伺服系统上的实验结果均表明了所提出控制方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1977, 22(2): 212-222.
- [2] Dote Y, Holf R G. Microprocessor based sliding mode controller for DC motor drivers[C]. Proc of Industrial Application Society Annual Meeting. Cincinnati, 1980: 154-161.
- [3] Sarpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(10): 930-932.
- [4] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system[J]. Systems and Control Letters, 1990, 14(2): 145-152.
- [5] 高为炳. 变结构控制系统的品质控制[J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 1-6.
(Gao W B. Quality control of variable structure control system[J]. Control and Decision, 1989, 4(4): 1-6.)
- [6] Gao W B, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(1): 117-122.
- [7] Bartoszewicz A. Remarks on "discrete-time variable structure control systems"[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1996, 43(1): 235-238.
- [8] Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding mode control strategies[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1998, 45(3): 633-637.
- [9] Eun Y, Kim J, Kim K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1997, 7(4): 414-423.
- [10] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计[J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 184-191.
(Zhai C L, Wu Z M. Variable structure control design for uncertain discrete time systems[J]. Aata Automatic Sinica, 2000, 26(2): 184-191.)
- [11] 米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 643-646.
(Mi Y, Li W L, Jing Y W. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law[J]. Control and Design, 2008, 23(6): 643-646.)
- [12] 宋立忠, 鄢圣茂, 杨立秋. 不确定系统鲁棒自适应离散变结构控制[J]. 自动化学报, 2010, 8(37): 1024-1028.
(Song L Z, Yan S M, Yang L Q. Robust adaptive discrete-time variable structure control of uncertain systems[J]. Aata Automatic Sinica, 2010, 8(37): 1024-1028.)
- [13] Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control[J]. Int J of Control, 2011, 84(7): 1196-1208.
- [14] Tang C Y, Misawa E A. Discrete variable structure control for linear multivariable systems[J]. ASME of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2000, 122(4): 783-792.
- [15] Sun M X, Wang Y Y, Wang D W. Variable-structure repetitive control: A discrete-time strategy[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2005, 52(2): 610-616.
- [16] Qu S C, Xia X H, Zhang J F. Dynamical behaviors of an euler discretized sliding mode control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 59(9): 2525-2529.
- [17] Qu S C, Xia X H, Zhang J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2014, 61(7): 3502-3510.
- [18] Chakraborty S, Bandyopadhyay B. A generalized reaching law for discrete time sliding mode control[J]. Automatica, 2015, 52(2): 83-86.
- [19] 孙明轩, 邬玲伟. 离散时间重复控制的理想误差动态设计方法[C]. 第24届中国控制与决策会议. 太原, 2012: 1734-1739.
(Sun M X, Wu L W. Ideal error dynamics based design of discrete-time repetitive controllers[C]. The 24th Chinese Control and Decision Conf. Taiyuan, 2012: 1734-1739.)
- [20] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1771-1778.
(Sun M X, Xu L D, Wu L W. Ideal-error-dynamics approach for repetitive control of discrete-time systems[J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1771-1778.)
- [21] 邬玲伟, 孙明轩. 无抖振离散重复控制器的设计与实现[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(4): 554-560.
(Wu L W, Sun M X. Design and implementation of a chattering-free discrete-time repetitive controller[J]. Control Theory & Application, 2015, 32(4): 554-560.)

(责任编辑: 李君玲)