

多图通信拓扑下一致性系统的鲁棒性度量

刘建刚^{1,2}, 黄志武¹

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410075; 2. 湖南商学院 数学与统计学院, 长沙 410205)

摘要: 研究在外界扰动影响下的通信拓扑为多图的一阶多智能体系统的协同一致性控制鲁棒性问题. 采用闭环系统的 H_2 范数来度量系统的鲁棒性; 借助代数图论、控制论和矩阵论, 建立通信拓扑在有若无自环时多智能体系统鲁棒性、系统 H_2 范数、系统通信拓扑之间的直接联系, 并进行严格的证明; 给出通信拓扑为完备图、星图、路图、环图时多智能体系统之间的收敛速度、鲁棒性分析与比较. 仿真实例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 多图; 鲁棒性度量; 一致性系统; 协同一致性控制; H_2 范数

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Robustness measurement for consensus systems with multi-graph communication

LIU Jian-gang^{1,2}, HUANG Zhi-wu¹

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Hu'nan University of Commerce, Changsha 410205, China. Correspondent: HUANG Zhi-wu, E-mail: hzw@csu.edu.cn)

Abstract: This paper investigates the robustness problem for consensus and cooperative control of the first order multi-agent systems with multi-graph communication affected by external disturbance. Robustness is quantified as the H_2 norm of the closed-loop system. The direct relationship among robustness of consensus, system H_2 norm, system communication topology for the oriented multi-agent systems are constructed when there exists self-loops or not in the communication topology in this note, which is based on the graph theory, the control theory and the matrix theory, and the rigorous proof is given in details. When the communication topology is complete graph, star graph, path graph and cycle graph, the convergence speed and robustness are analyzed and compared among them. Simulation examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: multi-graph; robustness measurement; consensus systems; consensus and cooperative control; H_2 norm

0 引言

近年来, 针对多智能体互联系统一致性和协同控制理论的相关研究受到了国内外学者的广泛关注^[1-2]. 智能电网中网络的负载均衡, 智能交通系统中无人车辆的自动驾驶, 无人机的编队飞行, 卫星系统中航天器与飞行器的姿态调整与同步等, 都蕴含着多智能体互联系统的一致性和协同控制问题^[3-4].

一致性和分布式协同控制问题的相关研究主要与通信拓扑结构和系统模型特征密切相关, 其中文献[5-7]主要针对网络连通条件和时延来分析系统的稳定性, 而没有考虑模型的不确定性和外界扰动给系统性能造成的影响. 现实中系统会受到测量噪声、扰

动、模型不确定性以及通信不确定性等因素的影响^[8].

目前, 处理不确定性和扰动的方法主要集中在以下两个方面:

1) 利用 H_∞ 滤波、Kalman 滤波、粒子滤波等方法滤除扰动的影响, 这种滤波方法结合一致性协同控制策略形成新的一致性滤波算法, 通过设计权值更新律, 使各节点的估计值尽可能地逼近真实值^[9-10];

2) 在系统存在不确定性和扰动的情况下, 推导出一些实现一致性协同目标的条件^[11-14].

当系统中存在扰动时, 文献[12-14]则在有向通信拓扑条件下, 针对一阶积分器多智能体系统, 在经

收稿日期: 2015-07-02; 修回日期: 2015-10-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61379111, 61202342, 61402538, 61403424).

作者简介: 刘建刚(1984—), 男, 博士, 从事协同控制理论及其应用的研究; 黄志武(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事协同控制、故障诊断等研究.

典的控制结构之上,通过将原系统模型降阶,利用线性矩阵不等式推导出了满足系统鲁棒性的条件。

文献[11-14]主要是借助 H_∞ 范数来刻画外界扰动对系统输出的影响,若要刻画系统对不确定性和噪声的鲁棒性能,则需要借助 H_2 范数^[15-17]和 L_2 增益^[18-19]。Xiao等^[20]、Bamieh等^[21]在通信拓扑为无向图时利用 H_2 范数来描述系统的鲁棒性,然而其研究是在通信拓扑为简单图的条件下去进行的探讨,况且协同目标是初始状态的平均值^[15-17,20-21]。与简单图不同,含有自环的多图在描述飞行航线、异步状态机等方面发挥着重要的作用^[22-24]。

本文在假定通信拓扑为多图的前提下,研究一阶多智能体系统在外界扰动影响下协同一致性控制鲁棒性问题。首先给出系统鲁棒性的定义,利用闭环系统的 H_2 范数来度量系统的鲁棒性;然后借助代数图论、控制论、矩阵论,通过求解Lyapunov方程,结合拉普拉斯矩阵特征值分析,建立通信拓扑有无自环时多智能体系统鲁棒性、系统 H_2 范数、系统通信拓扑之间的直接联系,并给出了严格的证明;最后,针对几类特殊的通信拓扑完备图、星图、环图、路图,分析并比较了当系统采用其中的通信拓扑时的收敛速度和鲁棒性。

1 问题描述

考虑如下—阶线性不确定多智能体系统:

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = u_i(t) + \omega_i(t). \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$; $\hat{x}_i(t) \in R$ 是智能体(i)的状态; $u_i(t) \in R$ 是控制输入; $\omega_i(t)$ 是相同强度的白噪声。

注1 为了便于分析,本文考虑一维空间上的多智能体系统(1)。然而,所提出的设计及分析方法可以借助Kronecker积拓展到高维空间上的多智能体系统中。

在本文中, n 个智能体之间的通信拓扑利用图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 来描述^[25]。其中: $\nu = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是节点集; $\varepsilon \subseteq \nu \times \nu$ 是边集; $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是非负邻接矩阵,其元素 a_{ij} 为1或0(本文中未给图的边赋权值,得到的理论成果可以推广至加权图)。

定义1 如果图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 没有自环,则其是简单图^[5,25],即其邻接矩阵对角线元素 $a_{ii} = 0$ 且其拉普拉斯矩阵为 $L_s = [l_{ij}]_{n \times n}$, 其中

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik}, & j = i; \\ -a_{ij}, & j \neq i. \end{cases} \quad (2)$$

注2 由定义1可以看出,拉普拉斯矩阵 L_s 每一行,行和为0,即 $L_s \cdot \mathbf{1}_n = 0 \cdot \mathbf{1}_n$, 意味着 L_s 有一个特征值为0,即 L_s 是奇异矩阵^[5]。

定义2 如果图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 至少含有一个自环,则其是多图^[22,25],即其邻接矩阵对角线元素至少有一个 $a_{ii} \neq 0$ 且其拉普拉斯矩阵为 $L_m = L_s + \text{diag}\{a_{ii}\}$ 。

1.1 通信拓扑为简单图时多智能体系统动力学描述

当通信拓扑为简单图时,本节提出如下分布式协同控制律:

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(\hat{x}_j - \hat{x}_i). \quad (3)$$

其中: $N_i = \{v_j \in \nu : (v_j, v_i) \in \varepsilon\}$ 是节点 v_i 的邻居集, $a_{ij} > 0$ 表示第 i 个智能体知道第 j 个智能体的信息。控制律(3)是典型的协同控制律。

将控制律(3)代入(1),得到整个闭环系统状态方程为

$$\dot{\hat{x}}(t) = -L_s \hat{x}(t) + \omega(t). \quad (4)$$

其中: $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$, $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$, L_s 是对应图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 的拉普拉斯矩阵。 $E[\omega(t)] = 0$, $E[\omega(t)\omega^T(\rho)] = \frac{\alpha}{2} I \delta(t - \rho)$ 。 $\delta(t)$ 是Dirac Delta函数, $\alpha > 0$ 为扰动信号的强度。

由于 L_s 是奇异矩阵,系统(4)在 $\omega(t) \equiv 0$ 时是边界稳定的,只需考虑 R^n 子空间(正交于由 n 维单位列向量 $\mathbf{1}_n$ 张成的子空间)上的系统。令矩阵 $Q \in R^{(n-1) \times n}$, 其每一行组成这一子空间的正交基,即

$$\begin{aligned} Q\mathbf{1}_n &= 0, \\ QQ^T &= I_{n-1}, \\ Q^T Q &= I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T = \Pi. \end{aligned} \quad (5)$$

注意到,因 $L_s \mathbf{1}_n = 0$, 故

$$L_s Q^T Q = L_s \left(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \right) = L_s,$$

定义 $\xi := Q\hat{x}$, 则 $\xi = 0$ 当且仅当 $\hat{x} = c\mathbf{1}_n$, $c \in R$ 。因此, $\|\xi(t)\| = (\xi(t)^T \xi(t))^{\frac{1}{2}}$ 可以用来度量与协同目标之间的距离。

对 ξ 微分,得

$$\dot{\xi}(t) = -\bar{L}_s \xi(t) + Q\omega(t), \quad (6)$$

其中 $\bar{L}_s = QL_s Q^T$ 是降阶的拉普拉斯矩阵。

引理1 除了特征值0外, \bar{L}_s 与 L_s 具有相同的特征值^[12]。

1.2 通信拓扑为有自环的多图时多智能体系统动力学描述

引理2 若有向多图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 是平衡图,且至少有一个节点含有自环,即对于所有的 i , 至少有一个 $a_{ii} \neq 0$, 则矩阵 $L_m = L_s + \text{diag}\{a_{ii}\}$ 是正定的^[22]。

当通信拓扑为有自环的多图时,本节提出如下分布式协同控制律:

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(\hat{x}_j - \hat{x}_i) - a_{ii}(\hat{x}_i - \hat{r}_0). \quad (7)$$

其中: $N_i = \{v_j \in \nu : (v_j, v_i) \in \varepsilon\}$ 是节点 v_i 的邻居集; $a_{ij} > 0$ 表示第 i 个智能体知道第 j 个智能体的信息; $a_{ii} = 1$ 意味着第 i 个节点含有自环, 且第 i 个智能体知道虚拟领导者 $\hat{r}_0 \in R$ 的信息, 否则 $a_{ii} = 0$.

令 $\hat{x}_i - \hat{r}_0 = x_i$, 则分布式控制律 (7) 可以写成

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) - a_{ii}x_i, \quad (8)$$

并且系统 (1) 转变为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + \omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

至此, 将控制律 (8) 代入 (9), 得到整个闭环系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = -L_m x(t) + \omega(t). \quad (10)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T, L_m = L_s + \text{diag}\{a_{ii}\}$ 是对应含有自环的多图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 变形后的拉普拉斯矩阵. $E[\omega(t)] = 0, E[\omega(t)\omega^T(\rho)] = \frac{\alpha}{2}I\delta(t - \rho)$. $\delta(t)$ 是 Dirac Delta 函数, $\alpha > 0$ 为扰动信号的强度.

2 主要结论

2.1 通信拓扑为有自环的多图时多智能体系统鲁棒性与 H_2 范数

定义 3 当通信拓扑为有自环的多图时, 闭环系统 (10) 的鲁棒性可以用

$$H := \lim_{t \rightarrow \infty} E[\|x(t)\|] \quad (11)$$

来度量. 其中: $\|x(t)\| = (x(t)^T x(t))^{\frac{1}{2}}$ 用来表示与虚拟领导者的距离, $x(t) = 0$ 当且仅当 $\hat{x}_i = \hat{r}_0$.

由于 $x(t)^T x(t)$ 是个标量, 有

$$x(t)^T x(t) = \text{tr}(x(t)^T x(t)) = \text{tr}(x(t)x(t)^T),$$

令 $J(t) = E[x(t)^T x(t)]$, 则有

$$H = \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{tr}(J(t))]^{\frac{1}{2}} = [\text{tr}(\lim_{t \rightarrow \infty} J(t))]^{\frac{1}{2}} =: [\text{tr}(J_{ss})]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

定义 4 对于线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ z = Cx, \end{cases} \quad (13)$$

系统矩阵 A 是 Hurwitz 矩阵, 对应于系统 (13) 的 H_2 范数为 $[\text{tr}(CXC^T)]^{\frac{1}{2}}$, 其中 X 为 Lyapunov 方程

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \quad (14)$$

的解, 该范数可以理解为系统状态相对于稳态的均方偏移量.

定理 1 对于多智能体系统 (10), 当通信拓扑满足连通条件时, 闭环系统是稳定的. $\omega(t)$ 是单位强度的白噪声, J_{ss} 是 Lyapunov 方程 $-L_m J_{ss} - J_{ss} L_m^T =$

$-I$ 的解, 则定义 3 中的 H 等价于系统 (10) 在输出方程为 $z(t) = Cx(t), C = I$ 时的 H_2 范数.

证明 对 $J(t)$ 关于时间 t 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= E[\dot{x}(t)x^T(t) + x(t)\dot{x}^T(t)] = \\ &E[-L_m x(t)x^T(t) + \omega(t)x^T(t)] + \\ &E[-x(t)x^T(t)L_m^T + x(t)\omega^T(t)] = \\ &-L_m J(t) - J(t)L_m^T + E[\omega(t)x^T(t)] + \\ &E[x(t)\omega^T(t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

注意到通过求解微分方程 (10), 可得其解为

$$x(t) = e^{-L_m t} x(0) + \int_0^t e^{-L_m(t-s)} \omega(s) ds, \quad (16)$$

则有

$$\begin{aligned} E[x(t)\omega^T(t)] &= \\ &e^{-L_m t} E[x(0)\omega^T(t)] + \\ &\int_0^t e^{-L_m(t-s)} E[\omega(s)\omega^T(t)] ds = \\ &0 + \int_0^t \frac{1}{2} e^{-L_m(t-s)} \delta(t-s) ds = \frac{1}{2} I. \end{aligned} \quad (17)$$

因为 $x(0)$ 与 $\omega(t)$ 不相关, 所以 $E[x(0)\omega^T(t)] = 0$.

将式 (17) 代入 (15), 得

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= -L_m J(t) - J(t)L_m^T + \frac{1}{2} I^T + \frac{1}{2} I = \\ &-L_m J(t) - J(t)L_m^T + I. \end{aligned} \quad (18)$$

则稳态时 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{J}(t) = 0$, 有

$$L_m J_{ss} + J_{ss} L_m^T = I. \quad (19)$$

因此, 结合定义 4 和式 (19) 可知, $[\text{tr}(J_{ss})]^{\frac{1}{2}}$ 为系统 (10) 在输出方程为 $z(t) = Cx(t), C = I$ 时的 H_2 范数.

又由定义 3 和式 (12) 可知, $H = [\text{tr}(J_{ss})]^{\frac{1}{2}}$ 等价于系统 (10) 在输出方程为 $z(t) = Cx(t), C = I$ 时的 H_2 范数. \square

定理 2 矩阵 $L_m = L_s + \text{diag}\{a_{ii}\}$ 是当通信拓扑为含有自环的有向平衡多图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 的变形后的拉普拉斯矩阵, 并且至少有一个智能体知道虚拟领导者的信息, 即对于所有的 i , 至少有一个 $a_{ii} \neq 0$; 矩阵 L_m 的特征值

$$0 < \text{Re}\{\lambda_1\} < \text{Re}\{\lambda_2\} < \dots < \text{Re}\{\lambda_n\},$$

设 L_m 可对角化, 则系统 (10) 的 H_2 范数为

$$H = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\text{Re}\{\lambda_i\}}}. \quad (20)$$

证明 设矩阵 L_m 的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 由 Spectral 定理可知, 可以找到一个 Unitary 矩阵 U (i.e. $UU^* = U^*U = I, *$ 为 Hermitian 算子), 使得

$$L_m = UAU^*, \tag{21}$$

其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 注意到 L_m 是实矩阵, 则 $L_m^T = L_m^*$. 若要计算 H_2 范数, 则需求解 Lyapunov 方程

$$L_m J + J L_m^T = I. \tag{22}$$

将 $L_m = UAU^*$ 代入式 (22), 得

$$UAU^* J + J U A^* U^* = I. \tag{23}$$

在式 (23) 左端乘以 U^* , 右端乘以 U , 得

$$U^* U A U^* J U + U^* J U A^* U^* U = U^* U = I. \tag{24}$$

由于 $U U^* = U^* U = I$, 将式 (24) 整理后可得

$$A U^* J U + U^* J U A^* = I. \tag{25}$$

令 $\Gamma = U^* J U$, 注意到

$$\text{tr}(J) = \text{tr}(U U^* J U U^*) = \text{tr}(U \Gamma U^*) =$$

$$\text{tr}(U^* U \Gamma) = \text{tr}(\Gamma),$$

于是 $H = [\text{tr}(\Gamma)]^{\frac{1}{2}}$, 则式 (25) 变为

$$\Lambda \Gamma + \Gamma \Lambda^* = I. \tag{26}$$

因 Λ 和 I 都是对角矩阵, 故由式 (26) 可知 Γ 也应为对角矩阵. 于是在式 (26) 中交换 Λ 与 Γ , 式 (26) 可改写成

$$\Gamma \Lambda + \Gamma \Lambda^* = \Gamma(2\text{Re}\{\Lambda\}) = I. \tag{27}$$

式 (27) 意味着

$$\Gamma = (2\text{Re}\{\Lambda\})^{-1}, \tag{28}$$

因此, Γ 是对角阵, 即

$$\Gamma = \text{diag}\left(\frac{1}{2\text{Re}\{\lambda_1\}}, \frac{1}{2\text{Re}\{\lambda_2\}}, \dots, \frac{1}{2\text{Re}\{\lambda_n\}}\right).$$

由于 $H = [\text{tr}(\Gamma)]^{\frac{1}{2}}$, 可得

$$H = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\text{Re}\{\lambda_i\}}}. \tag{29}$$

于是定理得证. \square

2.2 通信拓扑为简单图时多智能体系统鲁棒性与 H_2 范数

定义 5 当通信拓扑为简单图且不存在虚拟领导者时, 闭环系统 (4) 的鲁棒性可以用

$$\bar{H} := \lim_{t \rightarrow \infty} E[\|\xi(t)\|] \tag{30}$$

来度量. 其中: $\|\xi(t)\| = (\xi(t)^T \xi(t))^{\frac{1}{2}}$ 用来表示与协同目标的距离, $\xi(t) = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\hat{x} = c \mathbf{1}_n$.

由于 $\xi(t)^T \xi(t)$ 是个标量, 有

$$\xi(t)^T \xi(t) = \text{tr}(\xi(t)^T \xi(t)) = \text{tr}(\xi(t) \xi(t)^T),$$

因此, 令 $\bar{J}(t) = E(\xi(t)^T \xi(t))$, 有

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{tr}(\bar{J}(t))]^{\frac{1}{2}} = \\ &[\text{tr}(\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{J}(t))]^{\frac{1}{2}} =: [\text{tr}(\bar{J}_{ss})]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{31}$$

定义 5 对应于稳态均方偏移^[20].

定理 3 对于多智能体系统 (4), 当通信拓扑满足连通条件时, 闭环系统是稳定的. $\omega(t)$ 是单位强度的白噪声, \bar{J}_{ss} 是 Lyapunov 方程 $-\bar{L}_s \bar{J}_{ss} - \bar{J}_{ss} \bar{L}_s^T = -I$ 的解, 则定义 5 中的 \bar{H} 等价于系统 (4) 在输出方程为 $z(t) = C \xi(t)$, $C = I$ 时的 H_2 范数.

类似于定理 1, 用降阶后的拉普拉斯矩阵 \bar{L}_s 替换 L_m 即可证明定理 3, 在此不再赘述.

定理 4 矩阵 L_s 是系统 (4) 通信拓扑为有向平衡图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 时的拉普拉斯矩阵, 矩阵 L_s 的特征值

$$\text{Re}\{\bar{\lambda}_1\} \equiv 0 < \text{Re}\{\bar{\lambda}_2\} < \dots < \text{Re}\{\bar{\lambda}_n\},$$

\bar{L}_s 可对角化, 则系统 (4) 的 H_2 范数为

$$\bar{H} = \sqrt{\sum_{i=2}^n \frac{1}{2\text{Re}\{\bar{\lambda}_i\}}}. \tag{32}$$

类似于定理 2, 用降阶后的拉普拉斯矩阵 \bar{L}_s 替换 L_m 即可证明定理 4, 在此不再赘述.

2.3 几类图在有无自环时的收敛性与鲁棒性分析

引理 3 多智能体系统 (4) 具有有向平衡通信拓扑 G , 则当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 多智能体系统 (4) 以速度 $\bar{\lambda}_2$ 指数稳定^[5].

若一个图的每一对不同节点恰有一条边相连, 则称为完备图. 在图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 中从起点 v_i 到终点 v_j 存在一条路由是由其中间涉及的边所构成的一个序列, 即

$$\{(v_i, v_k), (v_k, v_l), \dots, (v_m, v_j)\},$$

则称图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 为路图. 若这条路绕一圈后, 终点与起点重合, 则称图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 为环图. 在图中若存在一个中央节点, 每个节点都与其相连, 则称其为星图.

根据定理 4 和引理 3, 表 1 给出了没有虚拟领导者时, 几类简单图所对应的多智能体系统 (4) 的收敛速度和 H_2 范数.

表 1 收敛速度和 H_2 范数 (简单图)

图类	收敛速度	H_2 范数
完备图	$\frac{n}{n-1}$	$\frac{n-1}{\sqrt{2n}}$
环图	$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
有向路图	1	$\sqrt{\frac{n^2-1}{6}}$
无向路图	$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{6}}$
有向星图	1	$\sqrt{\frac{n-1}{2}}$
无向星图	$\frac{1}{2}$	$\frac{n-1}{\sqrt{n}}$

注 3 有向路图不是平衡图, 因此 L_s 不平衡, 进而 \bar{L}_s 不能对角化, 按照定理 4 公式得到 H_2 范数为

$\sqrt{(n-1)/2}$. 然而, 数值计算得到的 H_2 范数^[17]为 $\sqrt{(n^2-1)/6}$, 至少 $n \leq 50$.

注 4 对于系统 (4), 若期望有较好的收敛速度, 则希望拉普拉斯矩阵 L_s 第二小特征值越大越好. 然而, 若要获得较好的鲁棒性, 则希望 H_2 范数尽可能小, 这就在收敛速度与鲁棒性之间产生了一个折衷问题.

定理 5 当通信拓扑为有自环的多图时, 多智能体系统 (10) 具有有向平衡通信拓扑 G , 则当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 多智能体系统 (10) 以速度 λ_1 指数稳定.

证明 多智能体系统 (10) 具有有向平衡通信拓扑 G , 候选 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \|x\|^2. \quad (33)$$

当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 沿系统 (10) 对 $V(t)$ 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T \dot{x} = -x^T L_m x \leq \\ &-x^T L_m x \leq -\lambda_1(L_m) \|x\|^2 = -2\lambda_1 V(t) < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

进而, 得

$$V(t) \leq V(0)e^{-2\lambda_1 t} \Rightarrow \|x(t)\| \leq \|x(0)\|e^{-\lambda_1 t}. \quad (35)$$

因此, 当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 多智能体系统 (10) 以速度 λ_1 指数稳定. \square

注 5 在本文中, 之所以对比讨论通信拓扑为完备图、环图、路图、星图时多智能体系统之间的收敛速度与 H_2 范数, 是因为完备图对应着计算机网络中的全互连网络, 环图对应着令牌环网, 路图对应着总线型网络, 星图对应着星型网络.

根据定理 2 和定理 5, 表 2 给出了当存在虚拟领导者时, 各类含有自环的多图所对应的多智能体系统 (10) 的收敛速度和 H_2 范数.

表 2 收敛速度和 H_2 范数 (含有自环的多图)

图类	收敛速度	H_2 范数
完备图	1	$\frac{n}{4n-2}$
环图	1	$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} + 2 \right)}}$
有向路图	1	$\sqrt{\frac{n+1}{2}}$
无向路图	1	$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} + 2 \right)}}$
有向星图	1	$\sqrt{\frac{n+1}{2}}$
无向星图	1	$\sqrt{\frac{2n+1}{6}}$

假设 1 对于多智能体系统 (10), 假设每个智能体都知道虚拟领导者的信息, 计算出的 H_2 范数如

表 2 所示; 对于部分智能体知道虚拟领导者的信息的情形, 同样可以利用定理 2 中的式 (20) 计算出来.

3 仿真研究

下面通过仿真来验证本文的理论结果.

图 1 为无自环时有向图与无向图对应的多智能体系统 (4) 收敛速度和 H_2 范数. 其中: CG 代表完备图, DC 代表有向环图, UC 代表无向环图, DP 代表有向路图, UP 代表无向路图, DS 代表有向星图, US 代表无向星图 (图 2~图 5 亦一样). 由图 1 可以看出, 完备图性能最好. 然而, 随着节点数的增加, 有向路图、有向星图对应的多智能体系统收敛速度逼近完备图, 有向星图对应的多智能体系统鲁棒性逼近完备图. 有向路图与无向路图对应的多智能体系统具有相同的 H_2 范数; 然而, 在收敛速度方面, 有向路图比无向路图出色. 无论在收敛性方面, 还是在鲁棒性方面, 有向星图对应的多智能体系统要比无向星图对应的多智能体系统表现卓越.

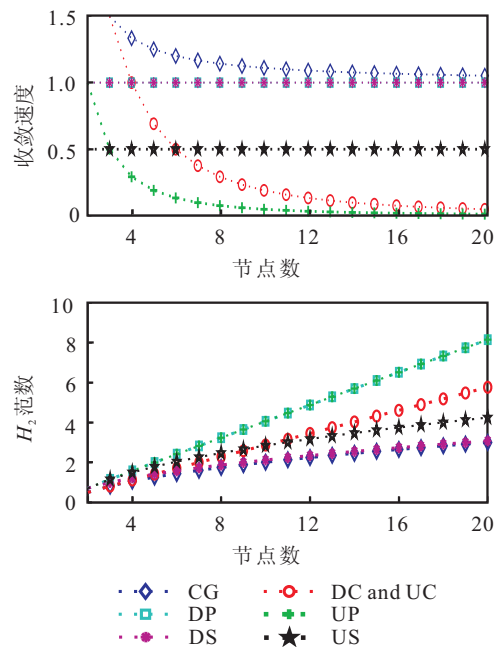


图 1 无自环时有向图与无向图对应的多智能体系统 (4) 收敛速度和 H_2 范数

图 2 给出了含有自环的多图对应的多智能体系统 (10) 收敛速度与 H_2 范数. 由图 2 可以看出, 几类含有自环的多图所对应的多智能体系统具有相同的收敛速度, 同时, 完备图性能最好, 其性能几乎可以用更少的边的连通图来匹配.

图 3~图 5 分析了在不同通信拓扑图时多智能体系统 (10) 和 (4) 的收敛速度和 H_2 范数. 由图 3~图 5 可以看出, 当通信拓扑为含有自环的多图时, 随着节点数的增加, 收敛性、鲁棒性要比通信拓扑为简单图且没有虚拟领导者时优越.

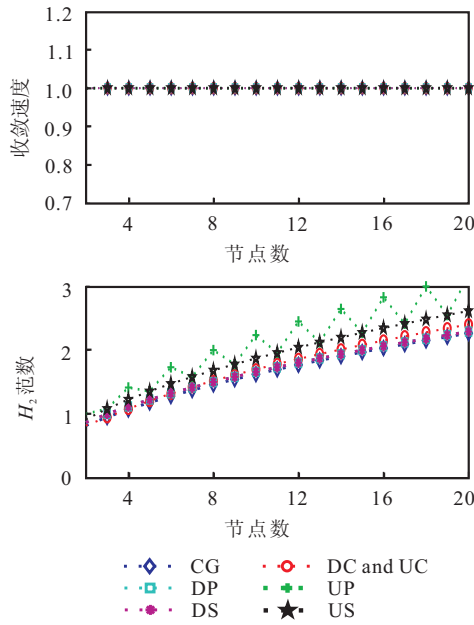


图 2 含有自环的多图对应的多智能体系统 (10) 收敛速度和 H_2 范数

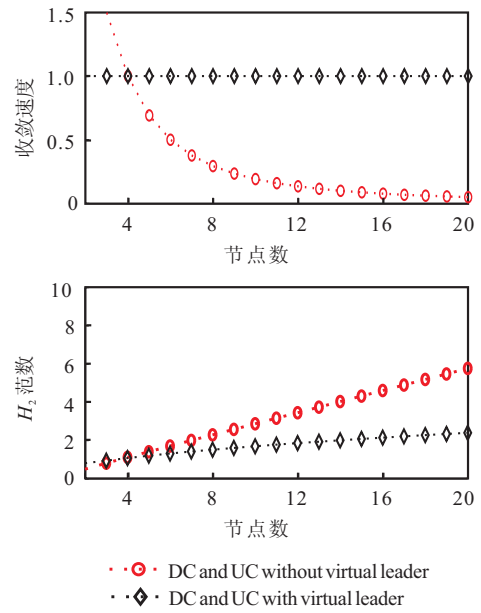


图 3 通信拓扑为环图时多智能体系统 (10) 和 (4) 的收敛速度和 H_2 范数

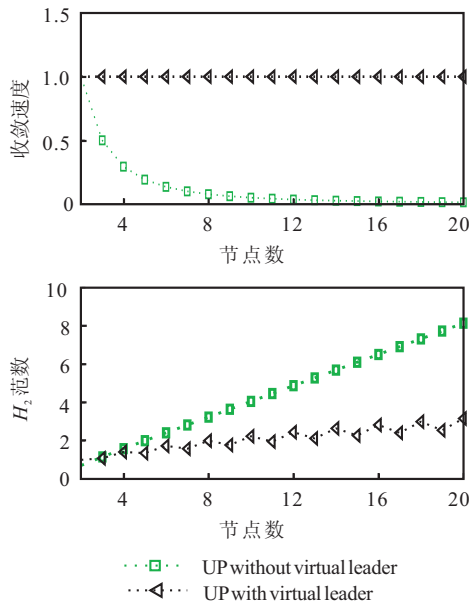


图 4 通信拓扑为无向路图时多智能体系统 (10) 和 (4) 的收敛速度和 H_2 范数

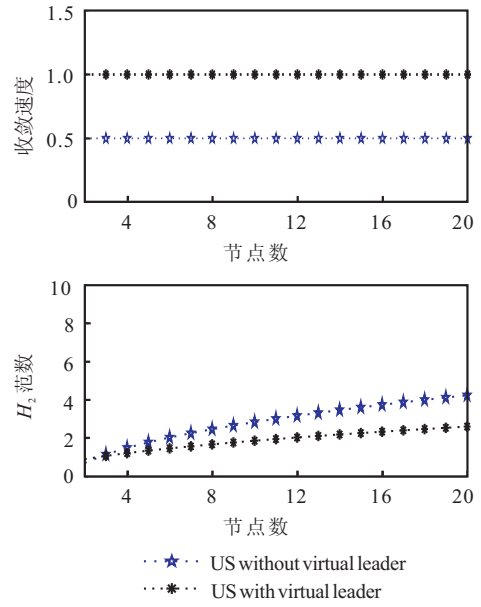


图 5 通信拓扑为无向星图时多智能体系统 (10) 和 (4) 的收敛速度和 H_2 范数

4 结 论

本文探讨了多智能体系统在外界扰动的影响下协同一致性控制鲁棒性问题. 采用闭环系统的 H_2 范数来度量系统的鲁棒性, 通过求解 Lyapunov 方程并结合拉普拉斯矩阵特征值分析得知, 不仅系统的收敛速度与拉普拉斯矩阵特征值相关, 而且系统的鲁棒性也与拉普拉斯矩阵特征值密切相关. 通过比较几类通信拓扑图, 对有无自环情况下的收敛性与鲁棒性进行了比较, 发现在存在自环情况下具有相同的收敛速度, 并且完备图性能最好. 随着节点数目的增加, 其性能可以借助含更少的边的有向星图、有向路图来匹

配. 当通信拓扑中为含有自环的多图时, 收敛性和鲁棒性要优于没有虚拟领导者的简单图情形. 仿真结果表明了本文结论的有效性.

参考文献(References)

[1] Antonelli G. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control[J]. IEEE Control System Magazine, 2013, 33(1): 76-88.
 [2] Cao Y, Yu W, Ren W, et al. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination[J]. IEEE Trans on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 427-438.

- [3] Murray R. Recent research in cooperative control of multivehicle systems[J]. J Dynamical System Measurement Control, 2007, 129(5): 571-583.
- [4] Nasirian V, Moayedi S, Davoudi A, et al. Distributed cooperative control of dc microgrids[J]. IEEE Trans on Power Electronics, 2015, 30(4): 2288-2303.
- [5] Olfati-Saber R, Alex Faxand J, Murray R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [6] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control System Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [7] Qu Z, Wang J, Chunyu J. Lyapunov design of cooperative control and its application to the consensus problem[C]. Proc of IEEE Conf on Systems and Control. Singapore, 2007: 100-107.
- [8] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 584-592.
(Zhang Q J, Shen L C, Zhu H Y. Delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 584-592.)
- [9] Ugrinovskii V. Distributed robust filtering with H_∞ consensus of estimates[J]. Automatica, 2011, 47(1): 1-13.
- [10] Nelson T R, Freeman R A. Decentralized H_∞ filtering in a multi-agent system[C]. American Control Conf. Saint Louis, 2009: 5755-5760.
- [11] 刘学良, 胥布工. 具有多个通信时延的多智能体系统分布式 H_∞ 一致性控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 494-500.
(Liu X L, Xu B G. Distributed H_∞ consensus control for multiple-agent systems with communication delays[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 494-500.)
- [12] Lin P, Jia Y. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(8): 643-653.
- [13] Lin P, Jia Y. Robust H_∞ consensus analysis of a class of second-order multi-agent systems with uncertainty[J]. IET Control Theory Applcation, 2010, 4(3): 487-498.
- [14] Liu Y, Jia Y. H_∞ consensus control of multi-agent systems with switching topology: A dynamic output feedback protocol[J]. Int J of Control, 2010, 83(3): 527-537.
- [15] Menon P, Edwards C. Decentralised static output feedback stabilisation of networks with H_2 performance[C]. American Control Conf. Saint Louis, 2009: 3537-3542.
- [16] Zelazo D, Mesbahi M. H_2 performance of agreement protocol with noise: An edge based approach[C]. IEEE Conf on Decision and Control. Shanghai, 2009: 4747-4752.
- [17] Young G F, Scardovi L, Leonard N. Robustness of noisy consensus dynamics with directed communication[C]. American Control Conf. Maryland, 2010: 6312-6317.
- [18] Scardovi L, Leonard N. Robustness of aggregation in networked dynamical systems[C]. Proc of the 2nd Int Conf on Robot Communication and Coordination. Odense, 2009: 1-6.
- [19] Wang J, Tan Y, Mareels I. Robustness analysis of leader follower consensus[J]. J of Systems Science Complexity, 2009, 22(2): 186-206.
- [20] Xiao L, Boyd S, Kim S. Distributed average consensus with least-mean-square deviation[J]. J of Parallel and Distributed Computing, 2007, 67(1): 33-46.
- [21] Bamieh B, Jovanovic M, Mitra P, et al. Effect of topological dimension on rigidity of vehicle formations: Fundamental limitations of local feedback[C]. IEEE Conf on Decision and Control. Cancun, 2008: 369-374.
- [22] Li Z, Duan Z, Chen G. On H_∞ and H_2 performance regions of multi-agent systems[J]. Automatica, 2011, 47(4): 797-803.
- [23] Zhang D, Ou L, Meng L, et al. LQR control for homogeneous agents with multi-graph topology[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(6): 913-919.
- [24] Li Z, Duan Z, Huang L. H_∞ control of networked multi-agent systems[J]. J of Systems Science Complexity, 2009, 22(1): 35-48.
- [25] Diestel R. Graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1997: 1-451.

(责任编辑: 李君玲)