

# 基于后悔理论的具有期望水平的直觉语言多准则决策方法

汪新凡<sup>1</sup>, 王坚强<sup>2</sup>

(1. 湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007; 2. 中南大学 商学院, 长沙 410083)

**摘要:** 针对准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题, 考虑决策者后悔规避的心理行为特征, 提出一种基于后悔理论的决策方法. 该方法利用期望效用函数构建各准则值的效用值矩阵; 利用后悔-欣喜函数构建各准则值相对于准则期望水平的后悔-欣喜值矩阵; 在此基础上, 依据后悔理论构建各准则值相对于准则期望水平的感知价值矩阵; 进一步, 利用线性加权法计算各方案的综合感知价值, 并确定方案排序. 最后通过实例分析表明了所提出方法的可行性和有效性.

**关键词:** 多准则决策; 直觉语言数; 期望水平; 后悔理论

**中图分类号:** C934

**文献标志码:** A

## Approach to intuitionistic linguistic multi-criteria decision making with aspiration levels on criteria based on regret theory

WANG Xin-fan<sup>1</sup>, WANG Jian-qiang<sup>2</sup>

(1. School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China; 2. School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: WANG Jian-qiang, E-mail: jqwang@csu.edu.cn)

**Abstract:** For intuitionistic linguistic multi-criteria decision making problems with aspiration levels on criteria, a decision making method based on the regret theory is presented considering the psychological behavior of regret aversion of decision makers. The utility value matrix of all criterion values is constructed by using the expected utility function. Then, the regret-rejoice value matrix of all criterion values relative to the aspiration levels on criteria is built by using the regret-rejoice function. On the basis of these, the perceived value matrix of all criterion values relative to the aspiration levels on criteria is set up according to the regret theory. Furthermore, the comprehensive perceived values of alternatives are calculated by using the linear weighted method, and the ranking of alternatives is determined. Finally, a numerical example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** multi-criteria decision making; intuitionistic linguistic number; aspiration level; regret theory

## 0 引言

近年来, 语言多准则决策引起了人们的广泛关注, 并取得了众多研究成果<sup>[1-3]</sup>. 然而, 在用语言短语表达决策信息时隐含了一个这样的假设, 即论域中元素隶属于该语言短语的程度等于1, 没有反映出决策者对其给出的语言评价的信心程度. 直觉模糊集<sup>[4]</sup>是传统模糊集<sup>[5]</sup>的拓展, 其核心概念是直觉模糊数, 能更加细腻地描述和刻画客观事物的模糊性本质, 其相关理论及应用近年来也受到了高度关注, 并取得了丰硕的研究成果<sup>[6]</sup>. 然而, 直觉模糊数虽包含隶属度、非隶属度和犹豫度3个参数, 但论域中元素所隶属、非

隶属的对象却不清楚和具体, 使得直觉模糊集的发展和应用存在局限. 考虑到语言短语和直觉模糊数均存在局限, 王坚强等<sup>[7]</sup>将二者融合, 定义了直觉语言数的概念. 直觉语言数用语言短语和论域中元素对该语言短语的隶属度与非隶属度进行表示, 能够同时刻画和描述备选方案在相关准则下的语言评价及决策者对该语言评价的信心水平和犹豫程度, 在表达实际决策问题中的不确定性时更加细致和合适.

目前, 基于直觉语言数的多准则决策问题已引起人们的关注. 王坚强等<sup>[7]</sup>定义了直觉语言数的加权算术平均算子和加权几何平均算子, 并提出了一种基

收稿日期: 2015-07-03; 修回日期: 2015-12-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271218, 71401185, 61174075, 71571193); 教育部人文社科基金项目(13YJC630200); 湖南省自然科学基金项目(2015JJ2047, 14JJ4050); 湖南省高等学校科学研究重点项目(15A055).

作者简介: 汪新凡(1966-), 男, 教授, 博士, 从事不确定决策和信息集结算子等研究; 王坚强(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究.

于直觉语言数的多准则决策方法; Liu<sup>[8]</sup>提出了一些广义的直觉语言数集结算子, 并提出了一种准则值为直觉语言数的群决策方法; 王坚强等<sup>[9]</sup>定义了直觉模糊熵, 并给出了一种基于直觉模糊熵和直觉语言数的多准则决策方法; Wang等<sup>[10]</sup>定义了直觉语言数的有序加权平均算子和混合集结算子, 并提出了一种基于这些算子的直觉语言群决策方法; Wang等<sup>[11]</sup>定义了直觉语言数的有序加权几何算子和混合几何算子, 并提出了一种基于这些算子的直觉语言群决策方法. 值得注意的是, 在上述直觉语言多准则决策方法中, 均没有考虑决策者对各准则具有一定期望要求的情形<sup>[12]</sup>. 事实上, 这类情形很多, 如人们选购房子时, 可能期望面积不超过 140 m<sup>2</sup> 或距离工作地点半径不超过 3 km 等. 因此, 对准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题进行研究很有现实意义.

针对准则具有期望水平的多准则决策情形, Lotfi等<sup>[12]</sup>和 Wang等<sup>[13]</sup>提出了逼近准则期望水平的交互式多准则决策方法; Yun等<sup>[14]</sup>将 DEA 方法与遗传算法相结合提出了一种决策分析方法; Nowak<sup>[15]</sup>利用随机占优思想提出了一种交互式多准则决策方法. 但是, 这些方法均是基于期望效用理论的<sup>[16]</sup>, 即基于决策者是“完全理性”的假设, 没有考虑到决策者心理因素的影响. Kahneman等<sup>[17]</sup>和 Tversky等<sup>[18]</sup>提出的前景理论是考虑决策者心理行为特征的重要理论, 其基础是 Simon<sup>[19]</sup>提出的“有限理性”思想, 即认为人们在决策过程中并不总是追求期望效用最大, 而是表现为对参照点有一定的依赖和对损失有一定的规避. 为此, 有些研究者基于前景理论对准则具有期望水平的多准则决策情形进行了研究, 例如, 樊治平等<sup>[20]</sup>和 Fan等<sup>[21]</sup>针对不同类型的准则具有期望水平的混合型多准则决策问题, 分别提出了一种基于前景理论的决策方法. 然而, 基于前景理论的决策方法需要决策者给出参照点的信息, 而且计算公式中的参数较多, 计算相对较复杂. 因此, 在考虑决策者心理行为特征的情境下, 需要新的理论进行指导. 近年来, 由 Bell<sup>[22]</sup>和 Loomes等<sup>[23]</sup>分别独立提出的后悔理论也考虑了决策者的心理行为特征, 受到了研究者的高度关注, 并已被实际应用于投资<sup>[24]</sup>、决策<sup>[25]</sup>和交通<sup>[26]</sup>等领域. 由于后悔理论在应用中不需要决策者给出参照点的信息, 且计算公式中的参数相对较少, 计算相对较简单, 实际应用中后悔理论比前景理论具有优势<sup>[26-27]</sup>. 综上所述, 后悔理论能够为研究准则具有期望水平的多准则决策问题提供新的途径.

基于以上分析, 本文对准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题进行探究, 将决策者的后悔心理行为特征加以考虑, 提出一种基于后悔理论的决策分

析方法. 详细给出了该方法的思路和步骤, 并在此基础上进行实例分析.

## 1 预备知识

### 1.1 直觉语言数

**定义 1**<sup>[1]</sup> 设  $S = \{s_\theta | \theta = 0, 1, \dots, 2l\}$ . 其中:  $l$  是正整数,  $s_\theta$  表示一个语言变量的可能取值(语言短语). 且满足下列条件: 1) 若  $a > b$ , 则  $s_a > s_b$ ; 2) 存在负算子  $\text{neg}(s_a) = s_b$ , 使得  $a + b = 2l$ . 则称  $S$  为一个离散的语言短语集. 例如, 当  $l = 4$  时, 可定义  $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\} = \{\text{极差, 很差, 差, 略差, 一般, 略好, 好, 很好, 极好}\}$ .

为避免丢失决策信息及方便计算, Xu<sup>[3]</sup>将语言短语集  $S$  从离散拓展到连续  $\bar{S} = \{s_\theta | \theta \in [0, q]\}$ , 其中  $q (q > 2l)$  是一个充分大的正整数, 且  $s_\theta$  仍满足上述条件 1) 和条件 2).

**定义 2**<sup>[7]</sup> 设  $X$  为一个论域,  $s_{\theta(x)} \in \bar{S}$ , 则  $X$  上的一个直觉语言数集  $A$  定义为

$$A = \{(x, \langle s_{\theta(x)}, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle) | x \in X\}. \quad (1)$$

其中:  $s_{\theta(x)}$  为决策者给出的关于元素  $x$  的语言评价价值, 函数  $\mu_A(x)$  和  $\nu_A(x)$  分别表示元素  $x$  隶属于语言评价价值  $s_{\theta(x)}$  的隶属度和非隶属度, 且对于所有元素  $x \in X$  均满足条件  $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ .

为了方便, 王坚强等<sup>[7]</sup>称  $\beta = \langle s_{\theta(\beta)}, \mu(\beta), \nu(\beta) \rangle$  为一个直觉语言数. 其中:  $s_{\theta(\beta)} \in \bar{S}$ ,  $\mu(\beta) \in [0, 1]$ ,  $\nu(\beta) \in [0, 1]$ ,  $\mu(\beta) + \nu(\beta) \leq 1$ .

在多准则决策过程中, 假设决策者应用语言短语集  $S$  对各方案进行评价, 方案  $X_i (i = 1, 2, \dots, m)$  在准则  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$  下的准则值信息用直觉语言数  $\beta_{ij} = \langle s_{\theta(\beta_{ij})}, \mu(\beta_{ij}), \nu(\beta_{ij}) \rangle$  表示. 其中:  $s_{\theta(\beta_{ij})} \in S$  为方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下的语言评价价值,  $\mu(\beta_{ij})$  和  $\nu(\beta_{ij})$  分别表示方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下属于语言评价价值  $s_{\theta(\beta_{ij})}$  的隶属度和非隶属度. 又假设准则值  $\beta_{ij} = \langle s_{\theta(\beta_{ij})}, \mu(\beta_{ij}), \nu(\beta_{ij}) \rangle$  经规范化后变为  $\bar{\beta}_{ij} = \langle s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})}, \mu(\bar{\beta}_{ij}), \nu(\bar{\beta}_{ij}) \rangle$ . 由直觉语言数的定义可知, 决策者对语言评价价值  $s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})}$  完全有把握的程度为  $\mu(\bar{\beta}_{ij})$ , 完全没有把握的程度为  $\nu(\bar{\beta}_{ij})$ , 犹豫的程度为  $1 - \mu(\bar{\beta}_{ij}) - \nu(\bar{\beta}_{ij})$ , 即决策者对语言评价价值  $s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})}$  的信心度为区间数  $[\mu(\bar{\beta}_{ij}), 1 - \nu(\bar{\beta}_{ij})]$ <sup>[7]</sup>. 因此, 实际的准则值  $r_{ij}$  在  $s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij})}$  和  $s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})(1-\nu(\bar{\beta}_{ij}))}$  之间波动, 即属于区间语言数  $[s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij})}, s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})(1-\nu(\bar{\beta}_{ij}))}]$ <sup>[28]</sup>. 然而, 在准则值为区间语言数的多准则决策问题中, 一般将准则值视为一个随机变量, 认为其落在某个区间语言数内, 但目前尚没有研究者说明准则值落在区间语言数内的概率分布情况. 与之相类似的是区间数, 一般认为, 准则值在区间数内服从均匀分布、正态分布<sup>[29]</sup>或对数

正态分布<sup>[30]</sup>, 具体服从何种分布, 需根据具体的评价对象来确定. 综上可知, 针对不同类型的评价对象, 准则值在直觉语言数内服从均匀分布、正态分布和对数正态分布 3 种情形都是大量存在的, 因而本文为适应不同类型评价对象的直觉语言多准则决策问题, 分别考虑实际准则值  $r_{ij}$  在直觉语言数  $\bar{\beta}_{ij}$  内服从均匀分布、正态分布和对数正态分布 3 种情形.

若实际准则值  $r_{ij}$  在直觉语言数  $\bar{\beta}_{ij}$  内服从均匀分布, 则其概率密度函数为

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta(\bar{\beta}_{ij})(1 - \mu(\bar{\beta}_{ij}) - \nu(\bar{\beta}_{ij}))}, & \theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij}) \leq r_{ij} \leq \theta(\bar{\beta}_{ij})(1 - \nu(\bar{\beta}_{ij})); \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2)$$

若实际准则值  $r_{ij}$  在直觉语言数  $\bar{\beta}_{ij}$  内服从正态分布, 不妨设为  $r_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ , 由正态分布的  $3\sigma$  原则, 即  $p(r_{ij} \in [\mu_{ij} - 3\sigma_{ij}, \mu_{ij} + 3\sigma_{ij}]) = 0.9974$  和  $p(r_{ij} \in [\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij}), \theta(\bar{\beta}_{ij})(1 - \nu(\bar{\beta}_{ij}))]) = 0.9974$  同时成立, 则均值  $\mu_{ij}$  和均方差  $\sigma_{ij}$  可由下式<sup>[29]</sup>计算:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}\theta(\bar{\beta}_{ij})(1 + \mu(\bar{\beta}_{ij}) - \nu(\bar{\beta}_{ij})), \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{6}\theta(\bar{\beta}_{ij})(1 - \mu(\bar{\beta}_{ij}) - \nu(\bar{\beta}_{ij})), \quad (4)$$

且其概率密度函数为

$$f_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} e^{-(x - \mu_{ij})^2 / (2\sigma_{ij}^2)}. \quad (5)$$

若实际准则值  $r_{ij}$  在直觉语言数  $\bar{\beta}_{ij}$  内服从对数正态分布, 不妨设  $r_{ij} \sim \log-N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ , 由对数正态分布的  $3\sigma$  原则<sup>[30]</sup>, 即  $p(r_{ij} \in [\mu_{ij}/\sigma_{ij}^3, \mu_{ij}\sigma_{ij}^3]) = 0.9974$  和  $p(r_{ij} \in [\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij}), \theta(\bar{\beta}_{ij})(1 - \nu(\bar{\beta}_{ij}))]) = 0.9974$  同时成立, 则参数  $\mu_{ij}$  和  $\sigma_{ij}$  可由下式计算:

$$\mu_{ij} = \theta(\bar{\beta}_{ij})\sqrt{\mu_{ij}(\bar{\beta}_{ij})(1 - \nu(\bar{\beta}_{ij}))}, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt[6]{\frac{1 - \nu(\bar{\beta}_{ij})}{\mu(\bar{\beta}_{ij})}}, \quad (7)$$

且其概率密度函数<sup>[30]</sup>为

$$f_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma_{ij}} e^{-(\ln x - \mu_{ij})^2 / (2\sigma_{ij}^2)}, \quad x > 0. \quad (8)$$

## 1.2 后悔理论

后悔理论<sup>[22-23]</sup>将后悔和欣喜两种心理感觉纳入决策过程, 认为决策者在实际决策过程中会对决策结果可能产生的后悔或欣喜有所考虑, 并试图尽量避免选择可能会使自己感到后悔的方案, 即决策者的心理行为特点是后悔规避的. 根据后悔理论<sup>[22-23]</sup>, 决策者对所选择方案能带来的结果的感知价值由两部分组成, 即关于当前结果的效用值和后悔-欣喜值. 令  $x$  和  $y$  分别表示选择方案 A 和 B 所能带来的结果, 则决策者对方案 A 的感知价值为

$$V(x) = U(x) + R(\Delta U). \quad (9)$$

其中:  $\Delta U = U(x) - U(y)$ ,  $U(x)$  和  $U(y)$  分别表示决策者能够从方案 A 和方案 B 的结果中获得的效用值;  $R(\Delta U)$  表示后悔-欣喜值. 当  $R(\Delta U) > 0$  时,  $R(\Delta U)$  为欣喜值, 表示决策者对选择方案 A 而放弃选择方案 B 感到欣喜的值; 当  $R(\Delta U) < 0$  时,  $R(\Delta U)$  为后悔值, 表示决策者对选择方案 A 而放弃选择方案 B 感到后悔的值.

## 2 问题描述

考虑某一准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题, 设  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  为方案集,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  为准则集,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  为准则  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$  的权重向量, 其中  $w_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . 假设决策者应用语言短语集  $S$  对各方案进行评价, 方案  $X_i (i = 1, 2, \dots, m)$  在准则  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$  下的准则值信息用直觉语言数  $\beta_{ij} = \langle s_{\theta(\beta_{ij})}, \mu(\beta_{ij}), \nu(\beta_{ij}) \rangle$  表示. 其中:  $s_{\theta(\beta_{ij})} \in S$  为方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下的语言评价价值,  $\mu(\beta_{ij})$  表示方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下属于语言评价价值  $s_{\theta(\beta_{ij})}$  的程度,  $\nu(\beta_{ij})$  表示方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下不属于语言评价价值  $s_{\theta(\beta_{ij})}$  的程度, 满足  $0 \leq \mu(\beta_{ij}) + \nu(\beta_{ij}) \leq 1$ , 决策矩阵为  $P = (\beta_{ij})_{m \times n}$ . 设  $Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$  表示决策者根据已有的决策信息和对未来的预期等各种因素给出的关于准则的期望水平向量, 其中  $\beta_j = \langle s_{\theta_{\beta_j}}, \mu(\beta_j), \nu(\beta_j) \rangle$  表示决策者针对准则  $C_j$  给出的期望水平 ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). 本文要解决的问题是: 在决策者对准则具有期望要求  $Q$  的情形下, 根据决策矩阵  $P = (\beta_{ij})_{m \times n}$  和准则权重向量  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  提出有效的决策方法, 以对各备选方案进行排序, 并确定最优方案.

## 3 基于后悔理论的决策方法

### 3.1 方法思路

针对准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题, 下面利用后悔理论提出一种决策方法, 其思路如下.

首先, 将决策矩阵  $P = (\beta_{ij})_{m \times n}$  和准则期望水平  $Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$  进行规范化处理, 得到规范化的决策矩阵  $\bar{P} = (\bar{\beta}_{ij})_{m \times n}$  和期望水平  $\bar{Q} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$ . 其中: 对于效益型准则, 不需要处理; 对于成本型准则, 可采用下式进行规范化:

$$s_{\theta(\bar{\beta}_{ij})} = \text{neg}(s_{\theta(\beta_{ij})}) = s_{2l - \theta(\beta_{ij})}. \quad (10)$$

其次, 计算方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下的准则值  $\bar{\beta}_{ij}$  的效用值  $U_{ij} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ , 并构建效用值矩阵  $U = (U_{ij})_{m \times n}$ . 这里首先需要构造效用函数  $u(x)$ , 由于决策者通常都是稳妥行事, 对利益的反应比较迟缓, 而对损失的反应比较敏感, 小心谨慎,

不求大利, 但要规避风险, 故决策者大多都是风险规避的, 因而要求  $u(x)$  是一个单调递增的凹函数<sup>[22-23]</sup>, 满足  $u'(x) > 0$  和  $u''(x) < 0$ . 本文采用幂函数作为准则值的效用函数<sup>[18]</sup>, 即

$$u(x) = x^\alpha. \quad (11)$$

其中:  $\alpha$  为决策者的风险规避系数,  $0 < \alpha < 1$ , 且  $\alpha$  越小, 决策者的风险规避程度越高. 于是, 准则值  $\bar{\beta}_{ij}$  的效用值  $U_{ij}(i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$  可利用下式计算:

$$U_{ij} = \int_{\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij})}^{\theta(\bar{\beta}_{ij})(1-\nu(\bar{\beta}_{ij}))} u(x)f_{ij}(x)dx = \int_{\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij})}^{\theta(\bar{\beta}_{ij})(1-\nu(\bar{\beta}_{ij}))} x^\alpha f_{ij}(x)dx. \quad (12)$$

其中:  $f_{ij}(x)$  为  $\bar{\beta}_{ij}$  的概率密度函数, 可根据不同的评价对象选择式(2)、(5)或(8). 进一步, 根据式(12)可构建各准则值的效用值矩阵  $U = (U_{ij})_{m \times n}$ .

再次, 计算方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下相对于该准则期望水平  $\bar{\beta}_j$  的后悔-欣喜值  $R_{ij}(i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ , 并构建后悔-欣喜值矩阵  $R = (R_{ij})_{m \times n}$ . 考虑到决策者对准则有期望水平的要求, 决策者不仅希望准则的效用值越大越好, 而且希望准则值尽可能地满足自己的期望水平要求. 如果准则值低于期望水平, 则决策者会觉得后悔; 如果准则值高于期望水平, 则决策者会觉得欣喜. 根据后悔理论, 决策者对于后悔和欣喜通常都是风险规避的, 选择的后悔-欣喜函数  $r(\Delta U)$  也要求是一个单调递增的凹函数<sup>[22-23,27]</sup>, 满足  $r'(\Delta U) > 0, r''(\Delta U) < 0$ , 且  $r(0) = 0$ . 依据文献[22, 26], 本文选择如下函数作为后悔-欣喜函数:

$$r(\Delta U) = 1 - e^{-\delta \Delta U}. \quad (13)$$

其中:  $\Delta U$  表示准则值的效用值与该准则的期望水平的效用值之差的变量;  $\delta$  为决策者的后悔规避系数<sup>[26-27]</sup>,  $\delta > 0$ , 且  $\delta$  越大, 决策者的后悔规避程度越高. 于是, 根据式(13), 后悔-欣喜值  $R_{ij}$  可利用下式计算:

$$R_{ij} = 1 - e^{-\delta(U_{ij}-U_j)}, \quad (14)$$

其中

$$U_j = \int_{\theta(\bar{\beta}_j)\mu(\bar{\beta}_j)}^{\theta(\bar{\beta}_j)(1-\nu(\bar{\beta}_j))} x^\alpha f_j(x)dx. \quad (15)$$

从而根据式(14)和(15), 可构建各准则值相对于期望水平的后悔-欣喜值矩阵  $R = (R_{ij})_{m \times n}$ .

在上述基础上, 根据式(9)构建决策者对每个方案关于各准则值相对于期望水平的感知价值矩阵  $V = (V_{ij})_{m \times n}$ , 其中  $V_{ij}$  表示决策者对方案  $X_i$  在准则  $C_j$  下相对于该准则期望水平  $\bar{\beta}_j$  的感知价值, 其计算公式为

$$V_{ij} = U_{ij} + R_{ij}. \quad (16)$$

于是, 根据感知价值矩阵  $V = (V_{ij})_{m \times n}$ , 可利用简单

线性加权方法计算决策者对于方案  $X_i$  的综合感知价值  $V_i(i = 1, 2, \dots, m)$ , 其计算公式为

$$V_i = \sum_{j=1}^n w_j V_{ij}. \quad (17)$$

最后, 根据  $V_i(i = 1, 2, \dots, m)$  的大小对所有方案  $X_i(i = 1, 2, \dots, m)$  进行排序,  $V_i$  的值越大, 所对应的方案  $X_i$  越好.

### 3.2 方法步骤

综上, 针对准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题, 基于后悔理论的决策方法的步骤如下.

Step 1: 利用式(10)将决策矩阵  $P = (\bar{\beta}_{ij})_{m \times n}$  和准则期望水平  $Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$  规范化为  $\bar{P} = (\bar{\beta}_{ij})_{m \times n}$  和  $\bar{Q} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n)^T$ ;

Step 2: 利用式(12)构建各准则值的效用值矩阵  $U = (U_{ij})_{m \times n}$ ;

Step 3: 利用式(14)构建各准则值相对于准则期望水平的后悔-欣喜值矩阵  $R = (R_{ij})_{m \times n}$ ;

Step 4: 利用式(16)构建各准则值相对于准则期望水平的感知价值矩阵  $V = (V_{ij})_{m \times n}$ ;

Step 5: 利用式(17)计算决策者对于方案  $X_i$  的综合感知价值  $V_i(i = 1, 2, \dots, m)$ ;

Step 6: 根据  $V_i(i = 1, 2, \dots, m)$  的大小对所有方案  $X_i(i = 1, 2, \dots, m)$  进行排序, 并确定最优方案.

## 4 算例

考虑一个房地产开发公司拟进驻某大城市投资的决策问题(改编自文献[31]). 由于需要考察的因素众多, 如政治、经济、市场、技术等各方面的因素, 加上所需资料缺乏, 决策过程中包含很多模糊性和不确定性. 相关的评价指标(准则)主要有: 政治环境  $C_1$ , 经济环境  $C_2$ , 财务环境  $C_3$ , 行政环境  $C_4$ , 市场环境  $C_5$ , 技术条件  $C_6$ , 物质基础  $C_7$ , 法律环境  $C_8$ , 自然环境  $C_9$ . 准则  $C_j(j = 1, 2, \dots, 9)$  的权重向量为  $w = (0.08, 0.18, 0.11, 0.06, 0.12, 0.16, 0.12, 0.07, 0.10)^T$ . 该公司决策者通过初步的比较分析后确定从5个城市(方案)  $X_i(i = 1, 2, \dots, 5)$  中进行选择, 并应用语言短语集  $S$  对5个城市进行评价, 得到城市  $X_i(i = 1, 2, \dots, 5)$  在准则  $C_j(j = 1, 2, \dots, 9)$  下的直觉语言特征信息, 其决策矩阵  $P = (\bar{\beta}_{ij})_{5 \times 9}$  如表1所示. 另外, 公司期望选出的城市在9个方面都要达到一定的要求, 即给出准则期望水平  $Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9)^T$ . 其中:  $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_7 = \beta_8 = \langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle, \beta_2 = \beta_6 = \langle s_7, 0.8, 0.1 \rangle, \beta_9 = \langle s_5, 0.8, 0.1 \rangle$ . 这里假设准则值在直觉语言数内服从均匀分布. 在上述条件下, 试确定最佳投资的城市.

表 1 决策矩阵  $P = (\beta_{ij})_{5 \times 9}$ 

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
$X_1$	$\langle s_5, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_6, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_6, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_4, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_5, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.6, 0.1 \rangle$
$X_2$	$\langle s_7, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_5, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_5, 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle s_7, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.1 \rangle$
$X_3$	$\langle s_6, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_8, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_5, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_5, 0.8, 0.1 \rangle$
$X_4$	$\langle s_3, 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_5, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle s_6, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.8, 0.0 \rangle$	$\langle s_4, 0.7, 0.2 \rangle$
$X_5$	$\langle s_4, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.8, 0.0 \rangle$	$\langle s_8, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_7, 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle s_8, 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle s_8, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_6, 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle s_4, 0.8, 0.1 \rangle$

表 2 效用值矩阵  $U = (U_{ij})_{5 \times 9}$ 

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
$X_1$	3.199 7	4.302 4	3.756 6	3.975 3	2.935 5	3.199 7	4.302 4	4.194 1	3.754 2
$X_2$	4.803 4	4.194 1	3.572 4	4.552 9	2.821 1	4.803 4	4.194 1	4.302 4	4.552 9
$X_3$	3.975 3	5.120 6	4.194 1	3.756 6	3.572 4	3.975 3	4.552 9	4.194 1	3.572 4
$X_4$	1.920 4	4.194 1	4.302 4	3.572 4	3.975 3	4.047 8	3.975 3	5.050 4	2.692 3
$X_5$	2.782 4	5.050 4	5.120 6	4.302 4	4.302 4	5.120 6	5.402 3	4.194 1	2.935 5

表 3 后悔-欣喜值矩阵  $R = (R_{ij})_{5 \times 9}$ 

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
$X_1$	-0.347 6	-0.162 2	-0.140 2	-0.067 8	-0.458 8	-0.617 9	0.032 0	0.000 0	0.053 1
$X_2$	0.167 1	-0.200 6	-0.205 0	0.102 1	-0.509 7	0.000 0	0.000 0	0.032 0	0.254 8
$X_3$	-0.067 8	0.090 8	0.000 0	-0.140 2	-0.205 0	-0.282 0	0.102 1	0.000 0	0.000 0
$X_4$	-0.978 0	-0.200 6	0.032 0	-0.205 0	-0.067 8	-0.254 4	-0.067 8	0.226 6	-0.327 0
$X_5$	-0.527 3	0.071 4	0.272 7	0.032 0	0.032 0	0.090 8	0.304 1	0.000 0	-0.210 5

表 4 感知价值矩阵  $V = (V_{ij})_{5 \times 9}$ 

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
$X_1$	2.852 2	4.140 2	3.616 3	3.907 5	2.476 7	2.581 9	4.334 3	4.194 1	3.807 3
$X_2$	4.970 5	3.993 5	3.367 3	4.654 9	3.311 4	4.803 4	4.194 1	4.334 3	4.807 7
$X_3$	3.907 5	5.211 3	4.194 1	3.616 3	3.367 3	3.693 3	4.694 9	4.194 1	3.572 4
$X_4$	0.942 4	3.993 5	4.334 3	3.367 3	3.907 5	3.793 3	3.907 5	5.276 9	2.302 2
$X_5$	2.255 0	5.121 8	6.363 2	4.334 3	4.334 3	5.211 3	5.706 4	4.194 1	2.724 9

为了确定最佳投资的城市,下面利用本文提出的决策方法对该实例进行求解。

Step 1: 由于各准则均为效益型,决策矩阵不需要规范化,故

$$\bar{P} = P = (\beta_{ij})_{5 \times 9}, \bar{Q} = Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9)^T.$$

Step 2: 利用式(12)和(2)构建准则效用值矩阵  $U = (U_{ij})_{5 \times 9}$ ,如表2所示,其中参数  $\alpha$  的值取文献[18]中经过实验得到的数据,即取  $\alpha = 0.88$ 。

Step 3: 利用式(14)构建各准则值相对于准则期望水平的后悔-欣喜值矩阵  $R = (R_{ij})_{5 \times 9}$ ,如表3所示,其中  $\delta$  值取 0.3。

Step 4: 利用式(16)构建各准则值相对于准则期望水平的感知价值矩阵  $V = (V_{ij})_{5 \times 9}$ ,如表4所示。

Step 5: 利用式(17)计算得到决策者对于方案  $X_i$  的综合感知价值  $V_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  如下:

$$V_1 = 3.510 4, V_2 = 4.099 5, V_3 = 4.133 4,$$

$$V_4 = 3.617 4, V_5 = 4.557 1,$$

因此,  $V_5 > V_3 > V_2 > V_4 > V_1$ 。

Step 6: 根据  $V_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  的大小得到所有方案  $X_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  的排序

$$X_5 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1,$$

故最优方案(最佳投资城市)为  $X_5$ 。

## 5 比较和讨论

1) 为了进行比较,应用文献[20]提出的基于前景理论的决策方法求解本文实例,得到的结果如表5所示。其中直觉语言数  $\bar{\beta}_{ij}$  与  $\bar{\beta}_j$  之间的 Euclidean 距离公式定义为

$$d_{ij} = ((\theta(\bar{\beta}_{ij})\mu(\bar{\beta}_{ij}) - \theta(\bar{\beta}_j)\mu(\bar{\beta}_j))^2 + (\theta(\bar{\beta}_{ij})(1 - \nu(\bar{\beta}_{ij})) - \theta(\bar{\beta}_j)(1 - \nu(\bar{\beta}_j)))^2)^{1/2}, \quad (18)$$

且这里取  $\alpha = \tau = 0.88, \theta = 2.25^{[17]}$ 。由表5可知,利用两种方法得到了相同的方案排序结果。

2) 两种方法均涉及到相关参数的取值,这依赖于决策者的心理行为特征,也需要进行实证研究。其中:  $0 < \alpha < 1, 0 < \tau < 1, \alpha$  和  $\tau$  均为决策者的风险规避系数,反映了决策者对待收益和损失的风险态度,  $\alpha$ 、

$\tau$  越小, 决策者的风险规避程度越高,  $\alpha$ 、 $\tau$  越大, 表明决策者越倾向于冒险;  $\delta > 0$ ,  $\delta$  为决策者的后悔规避系数,  $\delta$  越大, 表明决策者的后悔规避程度越高;  $\theta > 1$ ,  $\theta$  表示决策者的损失规避程度,  $\theta$  越大, 表明决策者的损失规避程度越高. Kahneman 等<sup>[17]</sup>建议取  $\alpha = \tau = 0.88$ ,  $\theta = 2.25$ , 所得到的结果与经验数据较为一致; Abdellaoui<sup>[32]</sup>通过实证分析, 建议取  $\alpha = 0.89$ ,  $\tau = 0.92$ ;

Tversky 等<sup>[18]</sup>建议  $\theta$  的取值在 2.0~2.5 之间; 文献 [33] 建议在国内情境下取  $\alpha = 1.21$ ,  $\tau = 1.02$ ,  $\theta = 2.25$ . 对于本实例, 本文对这些参数各再取两组不同的值, 得到的方案排序结果与前面完全相同(见表 5, 其中方法 1 为基于后悔理论的决策方法, 方法 2 为基于前景理论的决策方法), 进一步表明了本文方法的有效性.

表 5 方案排序结果

方法	参数值	综合感知价值和方案排序
方法 1	$\alpha = 0.89, \delta = 0.35$	$V_1 = 3.5123, V_2 = 4.1483, V_3 = 4.1892, V_4 = 3.3629, V_5 = 4.6380$ $X_5 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1$
	$\alpha = 1.21, \delta = 0.4$	$V_1 = 5.0895, V_2 = 6.8728, V_3 = 6.9527, V_4 = 5.4447, V_5 = 8.0348$ $X_5 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1$
方法 2	$\alpha = 0.88, \tau = 0.88, \theta = 2.25$	$Z_1 = -2.4526, Z_2 = -1.0450, Z_3 = -0.8392, Z_4 = -2.3820, Z_5 = 0.0903$ $X_5 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1$
	$\alpha = 0.89, \tau = 0.92, \theta = 2.25$	$Z_1 = -2.4642, Z_2 = -0.9571, Z_3 = -0.8778, Z_4 = -2.4628, Z_5 = -0.1090$ $X_5 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1$
	$\alpha = 1.21, \tau = 1.02, \theta = 2.25$	$Z_1 = -2.7297, Z_2 = -1.1111, Z_3 = -0.8878, Z_4 = -2.5712, Z_5 = 0.1186$ $X_5 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1$

3) 后悔理论与前景理论一样, 都是具有重要影响的行为决策理论, 都可用来解决现实中需考虑决策者心理行为特征的多准则决策问题, 但二者的侧重点不一样: 后悔理论侧重于考虑决策者在决策过程中后悔规避的心理行为特征, 而前景理论则侧重于考虑决策者在决策过程中损失规避的心理行为特征.

4) 实际应用中, 基于后悔理论的决策方法比基于前景理论的决策方法更具优势. 例如, 后悔理论应用中不需要决策者给出参照点的信息, 比前景理论少一个参数, 计算相对较简单等. 特别地, 在本文中, 当准则值在直觉语言数内服从正态分布或对数正态分布时, 很难给出直觉语言数的距离测度的定义, 故基于前景理论的决策方法不能处理这两种情形. 而基于后悔理论的决策方法则能够处理准则值在直觉语言数内服从均匀分布、正态分布和对数正态分布等各种情形.

## 6 结 论

本文对准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题进行了研究, 给出了一种基于后悔理论的决策方法. 该方法思路清晰, 具有较强的可操作性和实用性, 能有效解决准则具有期望水平的直觉语言多准则决策问题, 具有广泛的实际应用价值. 与基于期望效用理论的决策方法相比, 本文方法考虑了决策者的认知局限、主观心理以及日益复杂的环境对决策者的心理影响等诸多因素, 使得在其基础上进行的决策更符合客观实际, 得到的模型和方法更具有普适性和实用

性; 与基于前景理论的决策方法相比, 本文方法不需要决策者给出参照点的信息, 计算公式中涉及的参数较少, 计算也相对简单, 具有一定优势.

## 参考文献(References)

- [1] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78(1): 73-87.
- [2] Xu Z S. Linguistic decision making: Theories and methods[M]. Beijing: Science Press, 2012: 177-225.
- [3] Xu Z S. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations[J]. Information Sciences, 2004, 166(1/2/3/4): 19-30.
- [4] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [5] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-356.
- [6] Xu Z S, Cai X Q. Intuitionistic fuzzy information aggregation: Theory and applications[M]. New York: Springer-Verlag, 2012: 1-102.
- [7] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574. (Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)

- [8] Liu P. Some generalized dependent aggregation operators with intuitionistic linguistic numbers and their application to group decision making[J]. *J of Computer and System Sciences*, 2013, 79(1): 131-143.
- [9] 王坚强, 王佩. 基于直觉模糊熵的直觉语言多准则决策方法[J]. *控制与决策*, 2012, 27(11): 1694-1698.  
(Wang J Q, Wang P. Intuitionistic linguistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on intuitionistic fuzzy entropy[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(11): 1694-1698.)
- [10] Wang X F, Wang J Q, Yang W E. Multi-criteria group decision making method based on intuitionistic linguistic aggregation operators[J]. *J of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2014, 26(1): 115-125.
- [11] Wang X, Wang J, Deng S. Some geometric operators for aggregating intuitionistic linguistic information[J]. *Int J of Fuzzy Systems*, 2015, 17(2): 268-278.
- [12] Lotfi V, Stewart T J, Zionts S. An aspiration-level interactive model for multiple criteria decision making[J]. *Computers & Operations Research*, 1992, 19(7): 671-681.
- [13] Wang J, Zionts S. The aspiration level interactive method(AIM) reconsidered: Robustness of solutions[J]. *European J of Operational Research*, 2006, 175(2): 948-958.
- [14] Yun Y B, Nakayama H, Arakawa M. Multiple criteria decision making with generalized DEA and an aspiration level method[J]. *European J of Operational Research*, 2004, 158(3): 697-706.
- [15] Nowak M. Aspiration level approach in stochastic MCDM problems[J]. *European J of Operational Research*, 2007, 177(3): 1626-1640.
- [16] Von Neumann J, Morgenstern O, Kuhn H W. *The theory of games and economic behavior*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1944: 130-168.
- [17] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. *Econometrica*, 1979, 47(2): 263-291.
- [18] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. *J of Risk and Uncertainty*, 1992, 5(4): 297-323.
- [19] Simon H A. A behavioral model of rational choice[J]. *J of Economics*, 1955, 69(1): 99-118.
- [20] 樊治平, 陈发动, 张晓. 基于累积前景理论的混合型多属性决策方法[J]. *系统工程学报*, 2012, 27(3): 295-301.  
(Fan Z P, Chen F D, Zhang X. Method for hybrid multiple attribute decision making based on cumulative prospect theory[J]. *J of Systems Engineering*, 2012, 27(3): 295-301.)
- [21] Fan Z P, Zhang X, Chen F D. Multiple attribute decision making considering aspiration-levels: A method based on prospect theory[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 65(2): 341-350.
- [22] Bell D E. Regret in decision making under uncertainty[J]. *Operations Research*, 1982, 30(5): 961-981.
- [23] Loomes G, Sugden R. Regret theory: An alternative theory of rational choice under uncertainty[J]. *J of Economic*, 1982, 92(368): 805-824.
- [24] Li X, Shou B, Qin Z. An expected regret minimization portfolio selection model[J]. *European J of Operational Research*, 2012, 218(2): 484-492.
- [25] Connolly T, Zeelenberg M. Regret in decision making[J]. *Current Directions in Psychological Science*, 2002, 11(6): 212-216.
- [26] Chorus C G. Regret theory-based route choices and traffic equilibria[J]. *Transportmetrica*, 2012, 8(4): 291-305.
- [27] Laciara C E, Weber E U. Correcting expected utility for comparisons between alternative outcomes: A unified parameterization of regret and disappointment[J]. *J of Risk and Uncertainty*, 2008, 36(1): 1-17.
- [28] Alcalde C, Burusco A, Fuentes-González R. Interval-valued linguistic variables: An application to the *L*-fuzzy contexts with absent values[J]. *Int J of General Systems*, 2010, 39(3): 255-270.
- [29] 汪新凡, 肖满生. 基于正态分布区间数的信息不完全的群决策方法[J]. *控制与决策*, 2010, 25(10): 1494-1498.  
(Wang X F, Xiao M S. Approach to group decision making based on normal distribution interval number with incomplete information[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(10): 1494-1498.)
- [30] Limpert E, Stahel W, Abbt M. Log-normal distributions across the sciences: Keys and clues[J]. *BioScience*, 2001, 51(5): 341-352.
- [31] 郝晶晶, 朱建军, 刘思峰. 基于 Orness 测度的多阶段不确定语言信息优化集结[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(11): 2866-2873.  
(Hao J J, Zhu J J, Liu S F. Aggregation of multi-stage uncertain linguistic evaluation information based on Orness[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2013, 33(11): 2866-2873.)
- [32] Abdellaoui M. Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions[J]. *Management Science*, 2000, 46(11): 1497-1512.
- [33] 曾建敏. 实验检验累积前景理论[J]. *暨南大学学报: 自然科学版*, 2007, 28(1): 44-47.  
(Zeng J M. An experimental test on cumulative prospect theory[J]. *J of Ji'nan University: Natural Science*, 2007, 28(1): 44-47.)