

自适应 EWMA 控制图统计经济设计

常志远, 孙金生

(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 针对自适应指数加权移动平均(AEWMA)控制图统计经济设计问题, 给出 AEWMA 控制图统计经济设计模型, 提出一种在偏移区间上对 AEWMA 控制图进行设计的多目标优化方法. 针对不同的偏移区间优化了 AEWMA 控制图, 并将 AEWMA 控制图统计经济性能与指数加权移动平均(EWMA)控制图相比较. 结果表明, 所提出方法优化设计的 AEWMA 控制图仍具有克服 EWMA 控制图的惯性问题的统计特性, AEWMA 控制图的经济性能也优于 EWMA 控制图.

关键词: 自适应 EWMA 控制图; 经济设计; 统计设计; 多目标优化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Economic-statistical design of AEWMA control chart

CHANG Zhi-yuan, SUN Jin-sheng

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: SUN Jin-sheng, E-mail: jsun67@163.com)

Abstract: To solve the economic-statistical design problem of the adaptive smoothing parameter exponentially weighted moving average(AEWMA) control chart, an economic-statistical design method based on the range of shift is proposed. An optimization algorithm is designed based on the hierarchical optimization and penalty function for the AEWMA control chart. The effectiveness of the economic-statistical design method is proved by the comparison between the AEWMA control chart optimized on a shift range and the exponentially weighted moving average(EWMA) chart optimized at a single constant shift. The simulation results show that the economic-statistical performances of the AEWMA control chart outperform the EWMA control chart.

Keywords: adaptive EWMA control chart; economic design; statistical design; multi-objective optimization

0 引言

作为一种有效的统计质量控制方法, 控制图在科学研究和工业生产中得到了广泛的应用. 控制图的设计方法主要有统计设计和经济设计, 不同的设计方法直接影响到生产过程中质量控制的效率和成本.

控制图经济设计最早是由 Duncan^[1]针对均值控制图提出的. 随后, Lorenzen 等^[2]提出了一个适用于控制图经济设计的统一方法, 该方法极大地影响了后续研究. 由于 Shewhart 型控制图对小偏移不敏感, Roberts^[3]提出了指数加权移动平均(EWMA)控制图, 该控制图通过对历史数据指数加权, 增加了控制图对小偏移的敏感性. EWMA 控制图的经济设计最早由 Torng 等^[4]提出, 经过长期研究, EWMA 控制图的经济设计已经取得了丰富的成果. Woodall^[5]指出单纯的

经济设计会使控制图统计性能下降, 为此, Saniga^[6]提出一种针对 \bar{X} 和 R 控制图的带有统计约束的经济设计模型. 这种统计约束下的经济设计方法很快在 EWMA 控制图设计中得到了应用与发展^[7-9].

EWMA 控制图虽然可以快速地检测过程中出现的小偏移, 但是过程中突然出现大偏移时, 小的平滑系数会导致 EWMA 控制图报警滞后. 针对该问题, Capizzi^[10]将自适应 EWMA 滤波方法应用于 EWMA 控制图, 提出了自适应指数加权移动平均(AEWMA)控制图, 该控制图方法可以克服常规 EWMA 控制图只对固定偏移敏感的问题. Woodall^[11]指出 AEWMA 控制图实质上是将 Shewhart 控制图与 EWMA 控制图更平滑地结合在一起, 这种方法优于常规的 Shewhart-EWMA 控制图. AEWMA 控制图的统计特性研究可参见文献 [12-14].

收稿日期: 2015-07-09; 修回日期: 2015-10-26.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(70931002).

作者简介: 常志远(1987-), 男, 博士生, 从事质量控制的研究; 孙金生(1967-), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络拥塞、质量控制等研究.

迄今为止,针对 AEWMA 控制图的统计特性的研究已取得丰富的成果,但是 AEWMA 控制图的经济特性从未被研究过. 针对 AEWMA 控制图的特点,本文提出一种在偏移区间上对 AEWMA 控制图进行统计经济设计的模型,通过比较该方法优化设计的 AEWMA 控制图与针对固定偏移优化设计的 EWMA 控制图的性能,表明所提出的设计方法优化设计的 AEWMA 控制图不仅可以保持其原有的统计特性,并且 AEWMA 控制图的经济特性也优于常规 EWMA 控制图.

1 AEWMA 控制图

假设第 i 时刻采集来自同一正态分布总体的样本大小为 n 的样本 $X_i = \{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$, 即 $X_{ij} \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_0^2)$. 其中: μ_0, σ_0 分别为正态分布的均值和标准差, δ 为均值偏移系数. 当 $\delta = 0$ 时,过程处于受控状态,其他情况表明过程出现了异常. 第 i 个采样时刻的样本均值 \bar{X}_i 和标准差 S_i 为

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad (1)$$

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad (2)$$

则 Capizzi^[10] 所提出的 AEWMA 控制图可按照如下方式进行构造:

$$Y_i = Y_{i-1} + \phi(e_i). \quad (3)$$

其中: Y_i 是第 i 时刻的 AEWMA 统计量, $\phi(e_i)$ 是估计问题中的误差项, $e_i = \bar{X}_i - Y_{i-1}$. 本文中取 $\phi(e_i)$ 为如下形式:

$$\phi(e_i) = \begin{cases} e_i + (1-\lambda)\gamma, & e_i < -\gamma; \\ \lambda e_i, & |e_i| \leq \gamma; \\ e_i - (1-\lambda)\gamma, & e_i > \gamma. \end{cases} \quad (4)$$

$\lambda \in (0, 1], \gamma > 0$ 为 AEWMA 控制图的两个决策变量,当控制图设计完成后, λ, γ 为常数. 设 $\omega(e_i) = \phi(e_i)/e_i$ 为等效平滑系数,则式 (3) 可以改写为

$$Y_i = \omega(e_i)X_i + (1 - \omega(e_i))Y_{i-1}. \quad (5)$$

显然, $\omega(e_i)$ 随着误差 e_i 的变化而变化. 当 e_i 绝对值较大时, $\omega(e_i)$ 也会随之增加,反之 $\omega(e_i) = \lambda$.

设 UCL、LCL 分别为 AEWMA 控制图上下控制限,可将控制限写为样本标准差的函数 $UCL = \mu_0 + L \cdot S_i, LCL = \mu_0 - L \cdot S_i$.

2 统计经济设计模型

过程的一个质量周期是从控制图开始监控生产过程开始到排除异常原因为止,主要包括受控、失控、检测和修复过程 3 个阶段. 衡量一个周期费用大小的有效方式是单位时间内产生的费用,即周期总费用与周期时间长度的比值. 通常情况下,假设异常的

发生服从均值为 $1/\theta$ 的指数分布. Lorenzen 等^[2] 通过一个质量周期的期望成本和期望时间,建立了如下损失函数模型:

$$C = [C_0/\theta + C_1(-\tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + \gamma_1 \cdot T_1 + \gamma_2 \cdot T_2) + s \cdot F/ARL_0 + W]/[1/\theta + (1 - \gamma_1) \cdot s \cdot T_0/ARL_0 - \tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + T_1 + T_2] + [((a + b \cdot n)/h) \cdot (1/\theta - \tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + \gamma_1 \cdot T_1 + \gamma_2 \cdot T_2)]/[1/\theta + (1 - \gamma_1) \cdot s \cdot T_0/ARL_0 - \tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + T_1 + T_2]. \quad (6)$$

其中: h 为相邻两个样本之间的采样间隔; C_0 为受控状态下单位时间内不合格产品的质量损失; C_1 为失控状态下单位时间内不合格产品的质量损失; $\tau = (1 - (1 + \theta \cdot h) \exp(-\theta \cdot h))/(\theta(1 - \exp(-\theta \cdot h)))$ 为异常发生到上一采样时刻之间的平均时间; E 为每次作图和抽样的时间; ARL_0 为受控状态下的平均链长 (ARL); ARL_1 为失控状态下的平均链长; T_0 为寻找错误报警的平均时间; T_1 为发现异常原因的平均时间; T_2 为纠正过程的平均时间; γ_1 可取的值为 0 或 1, 代表寻找异常原因时生产过程停止或继续; γ_2 可取的值为 0 或 1, 代表纠正异常原因时生产过程停止或继续; $s = \exp(-\theta \cdot h)/(1 - \exp(-\theta \cdot h))$ 为受控状态下抽取样本的期望值; F 为每次误报警的费用; W 为每次定位和修复异常的费用; a 为每次抽样的固定费用; b 为样本中每单位产品的费用.

单纯的经济设计会使得控制图统计性能下降,为了保证 AEWMA 控制图的统计特性,应在对 AEWMA 控制图经济设计的同时考虑其统计特性. AEWMA 控制图的统计经济设计可以在保证其平均链长符合特定要求的基础上寻找最优的决策变量组合 $\Omega = (h, n, UCL, \lambda, \gamma)$, 以使单位时间损失函数 C 最小化. 具体方法可通过求解如下优化问题实现:

$$\begin{aligned} & \min_{\Omega} C, \\ & \min_{\Omega} ARL_1. \\ & \text{s.t. } h > 0, n \in N, ARL_0 = B; \\ & \quad UCL > 0, \lambda \in (0, 1], \gamma > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

其中: N 为自然数集, $n \in N$ 为对样本大小 n 的整数约束, B 为 AEWMA 控制图所要求的受控状态下的平均链长. AEWMA 控制图的平均链长 ARL 可以通过 Markov 链方法求取.

3 ARL 求取

将控制限区间 $[UCL, LCL]$ 等分为 $2m + 1$ 个小区间,每个小区间的宽度为

$$D = \frac{UCL - LCL}{2m + 1}. \quad (8)$$

第 u 个小区间的中心为

$$S_u = LCL + (u - 0.5)D, \quad u = 1, 2, \dots, 2m + 1. \quad (9)$$

当统计量 Y_i 落入第 u 小区间内时, 认为 $Y_i = S_u$. 状态之间的一步转移概率矩阵为

$$\Pr = \begin{bmatrix} R & (I - R)U \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

其中: R 为一个 $(2m + 1) \times (2m + 1)$ 的实值矩阵, U 为一个 $2m + 1$ 维全 1 列向量, 0 为 $2m + 1$ 维全 0 行向量, I 为单位阵. R 中每一个元 r_{uv} 代表状态 u 到状态 v 的一步转移概率, 由式 (3) 可得

$$\begin{aligned} r_{uv} &= \Pr(Y_i = S_v | Y_{i-1} = S_u) = \\ &\Pr(S_v - D/2 < Y_{i-1} + \phi(T_i - \\ &Y_{i-1}) \leq S_v + D/2 | Y_{i-1} = S_u) = \\ &\Pr(S_v - S_u - D/2 < \phi(T_i - \\ &S_u) \leq S_v - S_u + D/2). \end{aligned} \quad (11)$$

由式 (4) 可知 $\phi(e)$ 是可逆的, 其逆函数为

$$\phi^{-1}(z) = \begin{cases} z - (1 - \lambda) \cdot \gamma, & z < -\lambda\gamma; \\ z/\lambda, & |z| \leq \lambda\gamma; \\ z + (1 - \lambda) \cdot \gamma, & z > \lambda\gamma. \end{cases} \quad (12)$$

将式 (12) 代入 (11), 则 AEWMA 控制图 ARL 可以通过下式求取:

$$ARL = P_m \cdot (I - R)^{-1} \cdot U, \quad (13)$$

其中 P_m 为一个 $2m + 1$ 的行向量, 除了第 $m + 1$ 个元为 1 外, 其他均为零.

4 AEWMA 控制图统计经济设计方法

常规 EWMA 控制图统计经济设计是针对固定偏移进行的, 而 Capizzi^[10] 提出的 AEWMA 控制图是在一个偏移区间上设计的, 因此常规 EWMA 控制图统计经济设计方法不再适用于 AEWMA 控制图. 本文提出了一种针对 AEWMA 控制图统计经济设计的方法, 具体如下:

1) 选定所要优化的均值偏移区间的两个端点 δ_1 、 δ_2 ($\delta_1 < \delta_2$), 以及受控状态下的平均链长 B ;

2) 计算偏移为 δ_2 时的决策变量 Ω_1 , 使 $ARL(\delta_2, \Omega_1)$ 最小, 同时保证 $ARL(0, \Omega_1) = B$, 即

$$\begin{aligned} &\min_{\Omega} ARL(\delta_2, \Omega); \\ &\text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B. \end{aligned} \quad (14)$$

3) 选取一个接近于 0 的正数 α_1 , 计算偏移 δ_2 时的决策变量 Ω_2 , 使得损失函数 $C(\delta_2, \Omega_2)$ 最小, 同时保证 $ARL(0, \Omega_2) = B$, $ARL(\delta_2, \Omega_2) \leq (1 + \alpha_1)ARL(\delta_2, \Omega_1)$, 即

$$\begin{aligned} &\min_{\Omega} ARL(\delta_2, \Omega); \\ &\text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B, \\ &ARL(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_1)ARL(\delta_2, \Omega_1). \end{aligned} \quad (15)$$

4) 选取一个接近于 0 的正数 α_2 , 计算偏移为 δ_1 时的决策变量 Ω_3 , 使得 $ARL(\delta_1, \Omega_3)$ 最小, 同时保证 $ARL(0, \Omega_3) = B$, $ARL(\delta_2, \Omega_3) \leq (1 + \alpha_2)ARL(\delta_2, \Omega_2)$, $C(\delta_2, \Omega_3) \leq (1 + \alpha_2)C(\delta_2, \Omega_2)$, 即

$$\begin{aligned} &\min_{\Omega} ARL(\delta_1, \Omega); \\ &\text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B, \\ &ARL(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_2)ARL(\delta_2, \Omega_2), \\ &C(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_2)C(\delta_2, \Omega_2). \end{aligned} \quad (16)$$

5) 选择一个接近于 0 的正数 α_3 , 计算偏移 δ_1 时的决策变量 Ω^* , 使得损失函数 $C(\delta_1, \Omega^*)$ 最小, 同时保证 $ARL(0, \Omega^*) = B$, $ARL(\delta_1, \Omega^*) \leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_1, \Omega_3)$, $ARL(\delta_2, \Omega^*) \leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_2, \Omega_3)$, $C(\delta_2, \Omega^*) \leq (1 + \alpha_3)C(\delta_2, \Omega_3)$, 即

$$\begin{aligned} &\min_{\Omega} C(\delta_1, \Omega); \\ &\text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B, \\ &ARL(\delta_1, \Omega) \leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_1, \Omega_3), \\ &ARL(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_2, \Omega_3), \\ &C(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_3)C(\delta_2, \Omega_3). \end{aligned} \quad (17)$$

该方法使用了分层优化的思想, 能够同时保证 AEWMA 控制图在偏移区间上的统计性能和经济性能. 式 (14)~(17) 的优化可以通过罚函数法将约束条件转化成目标函数的一部分. 以式 (15) 为例, 式 (15) 的优化问题可以等价为优化下式:

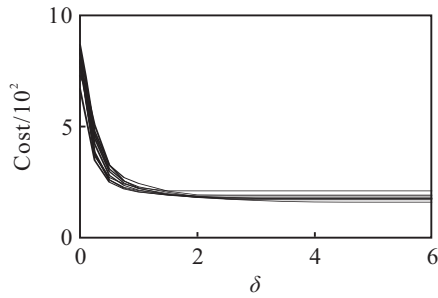
$$C(\delta_2, \Omega) + \varsigma \cdot \left(\left(\frac{ARL(0, \Omega) - B}{B} \right)^2 + \eta \cdot \left(\frac{ARL(\delta_2, \Omega) - (1 + \alpha_1) \cdot ARL(\delta_2, \Omega_1)}{(1 + \alpha_1) \cdot ARL(\delta_2, \Omega_1)} \right)^2 \right). \quad (18)$$

其中: ς 为一个很大的正数, 例如 $\varsigma = 10^{10}$; η 的取值为 0 或 1, 当 $ARL(\delta_2, \Omega) \geq (1 + \alpha_1) \cdot ARL(\delta_2, \Omega_1)$ 时 $\eta = 1$, 否则 $\eta = 0$.

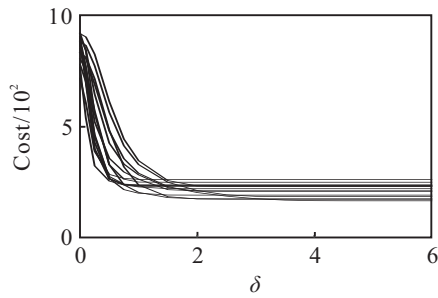
5 算例分析

为了更好地说明 AEWMA 控制图的统计经济特性, 本文针对不同的 B 和不同的偏移优化了 AEWMA 控制图. 引用 Lorenzen^[2] 算例中的数据, 不失一般性, 假设 $\mu_0 = 0$ 、 $\sigma_0 = 1$. 按照本文提出的优化方法, 通过 Zheng^[15] 提出的差分进化式烟花算法 (FWA-DE) 对式 (7) 进行寻优, 得到 AEWMA 控制图的最优决策变量组合 Ω . 限于篇幅, 具体结果不再罗列, 读者可以联系作者获取.

根据所得结果, 本文计算了 AEWMA 控制图与 EWMA 控制图在不同偏移下所产生的损失大小, 结果如图 1 和图 2 所示. 同时, 本文计算了每个偏移大小下控制图损失的均值 M 、极差 R 及其标准差 Std , 结果如图 3 和图 4 所示.

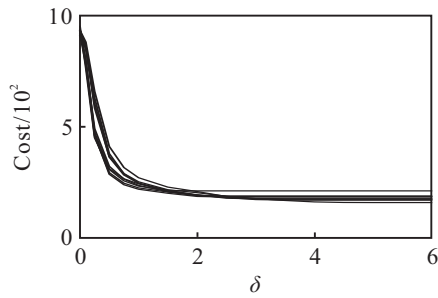


(a) Cost of AEWMA chart

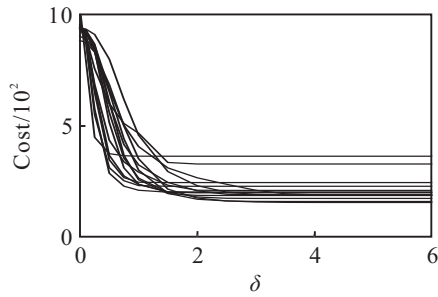


(b) Cost of EWMA chart

图 1 $B = 100$ 时, AEWMA 控制图与 EWMA 控制图的损失



(a) Cost of AEWMA chart



(b) Cost of EWMA chart

图 2 $B = 500$ 时, AEWMA 控制图与 EWMA 控制图的损失

图 1 和图 2 中的每条曲线代表针对不同偏移区间优化的 AEWMA 控制图与针对不同固定偏移优化的 EWMA 控制图的损失 C 随着偏移 δ 的变化. 由图 1 和图 2 中 (a)、(b) 的对比可知, AEWMA 控制图的损失更为集中, 无论受控状态下 ARL 取多大, 针对不同偏移优化的 EWMA 控制图的损失都更为分散. 这种现象说明针对固定偏移优化的 EWMA 控制图只对单一偏移敏感, 这也正是 EWMA 控制图的惯性问题的一种表现. 显然, 针对偏移区间优化的 AEWMA 几乎不存在这种惯性问题.

由图 3 和图 4 可知, AEWMA 控制图的均值小于 EWMA 控制图, 这说明在对偏移平均的意义下,

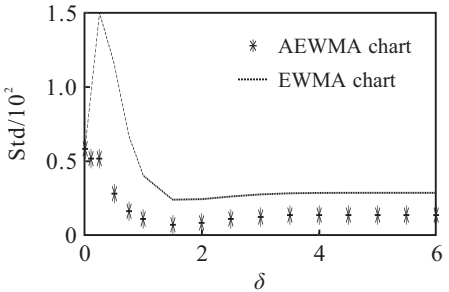
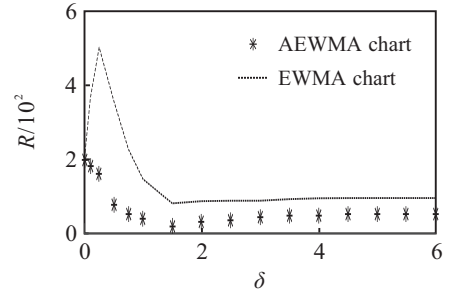
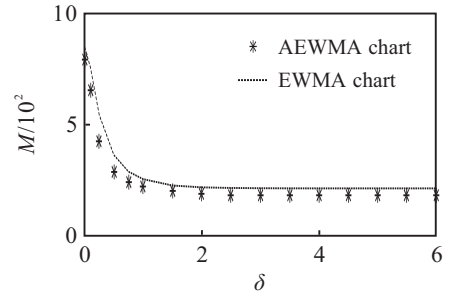


图 3 $B = 100$ 时, 在不同偏移下 AEWMA 控制图与 EWMA 控制图的经济特性

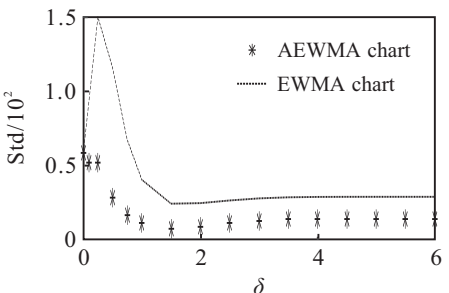
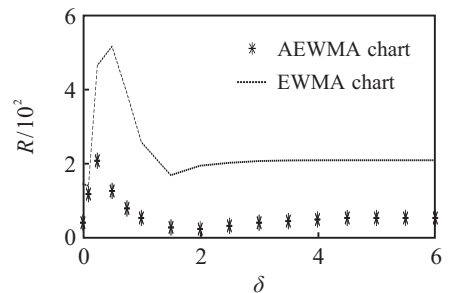
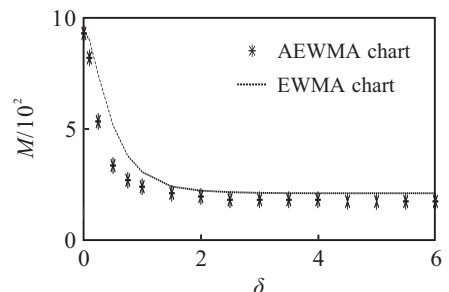


图 4 $B = 500$ 时, 在不同偏移下 AEWMA 控制图与 EWMA 控制图的经济特性

AEWMA控制图的损失小于EWMA控制图. 实际生产过程中的偏移大小往往是无法提前获知的, 以上结论表明AEWMA控制图更适用于实际中的应用. 并且, 无论受控状态下ARL取多大, AEWMA控制图的极差 R 及其标准差Std都明显小于EWMA控制图, 这种现象也说明了在不同的偏移下, AEWMA控制图比EWMA控制图的表现更加稳定.

当 $B = 100$ 时, AEWMA控制图的最优ARL在针对偏移区间 $[0.25, 4]$ 优化的AEWMA控制图处取到; 当 $B = 500$ 时, AEWMA控制图的最优ARL在针对偏移区间 $[0.5, 4]$ 优化的AEWMA控制图处取到. 为了说明AEWMA控制图的统计特性, 取 B 分别为100和500时, 针对 $\delta = 0.25$ 和 $\delta = 4$ 优化的EWMA控制图, 将它们在不同偏移时的ARL绘制在图5中.

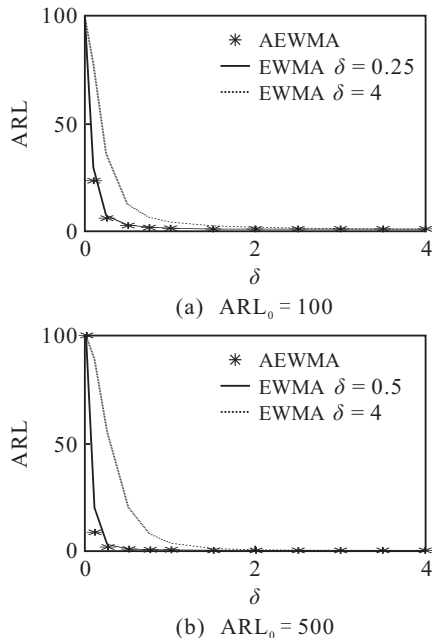


图5 AEWMA控制图与EWMA控制图统计特性比较

由图5可知, 针对 $\delta = 4$ 优化的EWMA控制图在检测小偏移时存在严重的报警滞后问题. 在偏移区间上优化的AEWMA控制图的ARL比单独使用两种情况下的EWMA控制图的ARL都要小. 这表明本文所提出的AEWMA控制图统计经济设计方法可以保证AEWMA控制图的统计特性, 在解决EWMA控制图的惯性问题上依然是有效的.

6 结 论

本文针对AEWMA的特点, 设计了一种在偏移区间上对AEWMA控制图进行统计经济设计的方法. 将该方法优化设计的AEWMA控制图与针对固定偏移设计的EWMA控制图作比较, 结果表明了所提出的设计方法的有效性. 该统计经济设计方法优化的AEWMA控制图依然保持其统计特性, 可以很好地解决EWMA控制图的惯性问题. 在经济特性方面, 针对偏移区间优化的AEWMA控制图的表现比

EWMA控制图更加稳定.

参考文献(References)

- [1] Duncan A J. The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process[J]. J of the American Statistical Association, 1956, 51(2): 228-242.
- [2] Lorenzen T J, Vance L C. The economic design of control charts: A unified approach[J]. Technometrics, 1987, 28(1): 3-10.
- [3] Roberts S W. Control chart tests based on geometric moving averages[J]. Technometrics, 1959, 3(1): 239-250.
- [4] Torng J C, Monggomery D C, Cochran J K. Economic design of AEWMA control chart[J]. Economic Quality Control, 1994, 9(1): 3-23.
- [5] Woodall W H. The statistical design of quality control charts[J]. Statiscian, 1985, 34(2): 155-160.
- [6] Saniga E M. Economic statistical control chart design with an application to \bar{X} and R charts[J]. Technometrics, 1989, 31(3): 313-320.
- [7] Tolley G O, English J R. Economic designs of constrained EWMA and combined EWMA- \bar{X} control schemes[J]. IIE Trans, 2001, 33(6): 429-436.
- [8] Amiri A, Moslemi A, Doroudyan M H. Robust economic and economic-statistical design of EWMA control chart[J]. Int J of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 78(1): 511-523.
- [9] Chiu W C. Economic-statistical design of EWMA control charts based on Taguchi's loss function[J]. Communications in Statistics Simulation and Computation, 2015, 44(1): 137-153.
- [10] Capizzi G, Masarotto G. An adaptive exponentially weighted moving average control chart[J]. Technometrics, 2003, 45(3): 199-207.
- [11] Woodall W H, Mahmoud A M. The inertial properties of quality control charts[J]. Technometric, 2005, 47(4): 425-436.
- [12] Saleh N A, Mahmoud M A, Abdel-Salam A-S G. The performance of the adaptive exponentially weighted moving average control chart with estimated parameters[J]. Quality and Reliability Engineering Int, 2013, 29(4): 595-606.
- [13] Shu L. An adaptive exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variances[J]. J of Statistical Computation and Simulation, 2008, 78(4): 367-384.
- [14] Su Y, Shu L, Tsui K L. Adaptive EWMA procedures for monitoring processes subject to linear drifts[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2011, 55(10): 2819-2829.
- [15] Zheng Y J, Xu X L, Ling H F, et al. A hybrid fireworks optimization method with differential evolution operators[J]. Neurocomputing, 2015, 148: 75-82.

(责任编辑: 齐 霖)