

超混沌 Bao 系统线性状态反馈控制及自适应控制

付景超, 张中华

(东北电力大学 理学院, 吉林省 吉林市 132012)

摘要: 研究超混沌 Bao 系统的控制问题. 首先, 给出超混沌 Bao 系统的 Lyapunov 指数图, 用以验证系统存在超混沌现象; 然后, 将线性反馈控制方法和自适应反推控制方法应用于超混沌 Bao 系统, 并设计了将系统混沌状态稳定到平衡点的混沌控制器; 最后, 通过数值仿真验证了所设计的控制器的有效性.

关键词: 超混沌 Bao 系统; 线性反馈控制; 自适应反推控制

中图分类号: TM023

文献标志码: A

Linear state feedback control and adaptive backstepping control of hyperchaotic Bao system

FU Jing-chao, ZHANG Zhong-hua

(College of Science, Northeast Dianli University, Jilin 132012, China. Correspondent: FU Jing-chao, E-mail: neufujingchao@126.com.)

Abstract: Control problems of the hyperchaotic Bao system are studied. Firstly, hyperchaos is verified by giving the Lyapunov exponent spectrum of the hyperchaotic Bao system. Then, the controllers are designed to stabilize the chaotic states of the system to equilibrium by using the linear feedback control method and adaptive backstepping control method. Finally, simulation results show the effectiveness of the designed controllers.

Keywords: hyperchaotic Bao system; linear feedback control; adaptive backstepping control

0 引言

Lorenz 于 1963 年在研究天气预报时提出了第 1 个混沌模型^[1], 其后提出的 Chen 混沌吸引子^[2]和 Lü 吸引子^[3]属于广义 Lorenz 族混沌系统范畴. Liu 于 2004 年提出的 Liu 混沌系统^[4]实质上属于 Lü 混沌系统. Bao 等^[5]于 2009 年发现了 Bao 混沌系统, Bao 系统是一个不属于 Lorenz 混沌系统族的新三维混沌系统, 能产生拓扑结构更复杂的不同于 Lorenz 混沌系统族的双螺旋吸引子.

基于自治系统实现超混沌的两个基本条件(即系统维数至少为四维且系统至少有两个正的 Lyapunov 指数), 许多学者通过增添一维线性项的方法, 基于三维混沌系统构建了不同的四维超混沌吸引子. 1979 年, Rössler^[6]给出了第 1 个超混沌系统. 后来, Lorenz 和 Chen 超混沌系统的发现引起了人们广泛兴趣^[7-9]. 2006 年, Chlouverakis 等^[10]发现了超 Jerk 混沌系统; 2008 年, 禹思敏等^[11]提出了新五阶超混沌电路, 并

给出了硬件实验结果; 2010 年, Dadras 等^[12]从一个新四维非线性光滑自治系统发现了四涡卷超混沌现象; 2014 年, El-Sayed 等^[12]提出了一个新四维自治系统, 研究了系统分岔、混沌及超混沌现象, 最后进行了电路实现; Huang 等^[14]在分数阶系统中也发现了超混沌现象.

自 OGY 方法提出以来, 人们相继提出了多种混沌控制方法. 文献[15]应用负反馈控制设计控制器, 将具有两个非线性项的新混沌系统的轨道稳定化; 文献[16]应用脉冲控制方法控制了一类混沌系统; 文献[17]应用滑模控制方法来控制 Rössler 系统族的混沌; 文献[18]设计了递归反推非线性控制器来控制两个四维 Lorenz-Stenflo (LS) 混沌系统和 Qi 混沌系统; 文献[19]应用最优和自适应控制方法控制了一个三维自治混沌系统和一个四维超混沌系统.

以上控制研究主要是针对混沌系统, 由于超混沌系统的自身特点使其不易实现控制, 对超混沌系统的

收稿日期: 2015-07-10; 修回日期: 2015-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11201057); 吉林省自然科学基金项目(20130101065JC); 吉林省教育厅“十二五”科学技术研究项目(2013429).

作者简介: 付景超(1977—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性混沌动力系统分析与控制的研究; 张中华(1979—), 女, 讲师, 博士, 从事非线性动力系统建模与分析的研究.

控制研究相对较少. 文献 [20] 设计反馈控制器控制了 Lorenz 系统的超混沌到不稳定的平衡点; 文献 [21] 应用滑模控制方法实现了具有输入非线性 Rössler 系统的鲁棒控制; 文献 [22] 使用简单的自适应反馈控制实现了混沌及超混沌的控制.

本文研究四维超混沌 Bao 系统的控制问题. 分别应用线性状态反馈和自适应反推控制方法设计控制器, 将超混沌 Bao 系统控制到系统的平衡点上, 所设计的线性反馈控制器结构简单且控制效果好. 参数未知时所设计的自适应反推控制器能将混沌状态稳定到平衡点, 并能够对系统参数值作出较好的估计.

1 超混沌 Bao 系统动力学行为

Bao 等^[5]基于三维 Bao 混沌系统构建了四维超混沌 Bao 系统, 数学模型描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y), \\ \dot{y} = xz - cy + w, \\ \dot{z} = x^2 - bz, \\ \dot{w} = d(x + y). \end{cases} \quad (1)$$

其中: 参数 $a = 20, b = 4, c = 32, d = 4$ 时, 系统存在一个超混沌吸引子.

引理 1^[23] 超混沌 Bao 系统只有一个平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$, 当 $a = 20, b = 4, c = 32, d = 4$ 时, 系统存在一个超混沌吸引子.

$a = 20, b = 4, c = 32, d = 4$ 时计算得到系统的 4 个 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 1.987, LE_2 = 0.071, LE_3 = 0.000, LE_4 = -18.058$. 图 1 是 4 个 Lyapunov 指数随时间变化曲线, 图 2 是图 1 的放大. 由图 2 可知, 系统有两个正的 Lyapunov 指数, 可见系统此时处于超混沌状态.

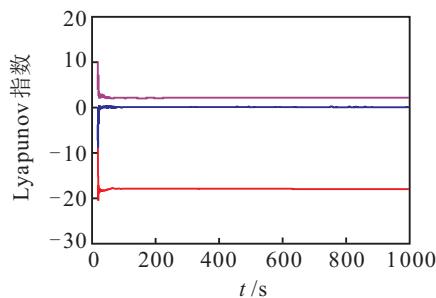


图 1 超混沌 Bao 系统的 Lyapunov 指数随时间变化曲线

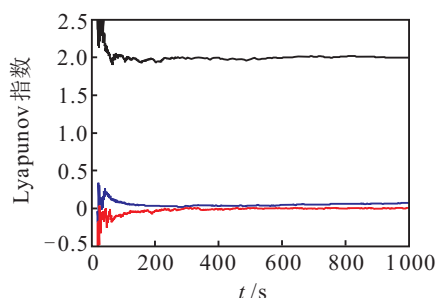


图 2 超混沌 Bao 系统的 Lyapunov 指数随时间变化曲线局部放大

2 超混沌 Bao 系统的反馈控制和自适应反推控制

为保证系统稳定, 可通过使系统 Lyapunov 指数下降的方法消除混沌, 同时对原系统的改变应尽可能小, 且使系统尽快稳定. 下面采取线性反馈和自适应反推控制方法对超混沌 Bao 系统进行控制.

2.1 超混沌 Bao 系统线性反馈控制

2.1.1 线性反馈控制器设计

施加线性反馈控制器后的系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y) + u_1, \\ \dot{y} = xz - cy + w + u_2, \\ \dot{z} = x^2 - bz + u_3, \\ \dot{w} = d(x + y) + u_4. \end{cases} \quad (2)$$

其中 u_1, u_2, u_3, u_4 为反馈控制输入, 控制目标是稳定系统轨道到平衡点上. 不失一般性, 令式 (2) 中 $u_1 = 0, u_2 = k_1 x, u_3 = 0, u_4 = 0$, 则系统 (2) 变为如下受控系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y), \\ \dot{y} = xz - cy + w + k_1 x, \\ \dot{z} = x^2 - bz, \\ \dot{w} = d(x + y). \end{cases} \quad (3)$$

系统在平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$, 受控超混沌 Bao 系统 Jacobi 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ k_1 & -c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ d & d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

特征方程为

$$(\lambda + b)[\lambda^3 + (c - a)\lambda^2 + (ak_1 - d - ac)\lambda + 2ad] = 0. \quad (5)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知, 当 $k_1 \geq 32.9$ 时, 受控系统 (2) 稳定到原点平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$.

定理 1 当 $k_1 \geq 32.9$ 时, 超混沌系统 (1) 在线性状态反馈 $u_1 = 0, u_2 = k_1 x, u_3 = 0, u_4 = 0$ 控制下被稳定到平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$ 上.

2.1.2 数值仿真

对于受控系统 (2), 当 $a = 20, b = 4, c = 32, d = 4$ 时取 $k_1 = 33$ 进行仿真. 对比图 3 和图 4 可见, 超混沌 Bao 系统在线性状态反馈下能够渐近稳定到平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$, 表明线性反馈控制是可行的.

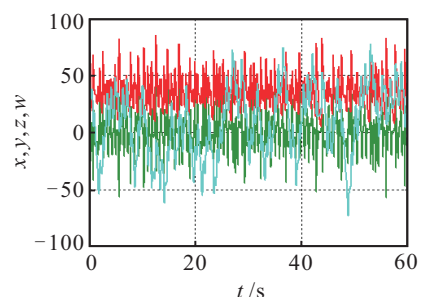


图 3 超混沌 Bao 系统波形

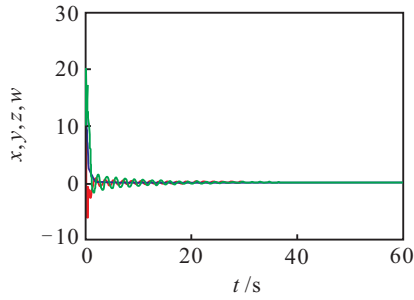


图 4 线性反馈控制下系统 (2) 波形

2.2 超混沌 Bao 系统自适应反推控制

自适应反推控制^[12]通过由前向后逐步修正算法来设计控制器, 以实现系统全局跟踪, 适用于状态线性化或严格参数反馈的参数未知系统的在线控制^[17]. 下面给出参数未知时超混沌 Bao 系统的自适应反推控制器设计, 并将超混沌系统控制到平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$.

2.2.1 参数未知时自适应控制器设计

参数 a, b, c, d 未知时, 超混沌 Bao 系统 (1) 的受控系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y) + u_1, \\ \dot{y} = xz - cy + w + u_2, \\ \dot{z} = x^2 - bz + u_3, \\ \dot{w} = d(x + y) + u_4. \end{cases} \quad (6)$$

设 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = c_1e_1, \alpha_3 = c_2e_2, \alpha_4 = c_3e_3$, 定义误差信号 $e_1 = x_1 - \alpha_1, e_2 = x_2 - \alpha_2, e_3 = x_3 - \alpha_3, e_4 = x_4 - \alpha_4$, 将 e_1, e_2, e_3, e_4 代入式 (6), 得到如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_1 - c_1e_1 - e_2) + u_1, \\ \dot{e}_2 = e_1(c_2e_2 + e_3) - c(c_1e_1 + e_2) - c_3e_3 + e_4 - c\dot{e}_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 = e_1^2 - b(c_2e_2 + e_3) - c_2\dot{e}_2 + u_3, \\ \dot{e}_4 = d(e_1 + c_1e_1 + e_2) - c_3\dot{e}_3 + u_4. \end{cases} \quad (7)$$

Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) + \frac{1}{2\gamma_1}(a - a_1)^2 + \frac{1}{2\gamma_2}(b - b_1)^2 + \frac{1}{2\gamma_3}(c - p_1)^2 + \frac{1}{2\gamma_4}(d - q_1)^2.$$

这里: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ 是自适应增益系数; a_1, b_1, p_1, q_1 分别是 a, b, c, d 的参数估计. 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 - \frac{1}{\gamma_1}(a - a_1)\dot{a}_1 - \\ & \frac{1}{\gamma_2}(b - b_1)\dot{b}_1 - \frac{1}{\gamma_3}(c - p_1)\dot{p}_1 - \frac{1}{\gamma_4}(d - q_1)\dot{q}_1 = \\ & e_1[a(e_1 - c_1e_1 - e_2) + u_1] + e_2[e_1(c_2e_2 + e_3) - \\ & c(c_1e_1 + e_2) + c_3e_3 + e_4 - c_1\dot{e}_1 + u_2] + \\ & e_3[e_1^2 - b(c_2e_2 + e_3) - c_2\dot{e}_2 + u_3] + \\ & e_4[d(e_1 + c_1e_1 + e_2) - c_3\dot{e}_3 + u_4] - \\ & \frac{1}{\gamma_1}(a - a_1)\dot{a}_1 - \frac{1}{\gamma_2}(b - b_1)\dot{b}_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_3}(c - p_1)\dot{p}_1 - \frac{1}{\gamma_4}(d - q_1)\dot{q}_1 = \\ & e_1[(a - a_1)(e_1 - c_1e_1 - e_2) + \\ & a_1(e_1 - c_1e_1 - e_2) - k_1e_1 + k_1e_1 + u_1] + \\ & e_2[e_1(c_2e_2 + e_3) - (c - p_1)(c_1e_1 + e_2) - \\ & p_1(c_1e_1 + e_2) + c_3e_3 + e_4 - c_1\dot{e}_1 - k_2e_2 + \\ & k_2e_2 + u_2] + e_3[e_1^2 - (b - b_1)(c_2e_2 + e_3) - \\ & b_1(c_2e_2 + e_3) - c_2\dot{e}_2 - k_3e_3 + k_3e_3 + u_3] + \\ & e_4[(d - q_1)(e_1 + c_1e_1 + e_2) + \\ & q_1(e_1 + c_1e_1 + e_2) - c_3\dot{e}_3 - k_4e_4 + k_4e_4 + u_4] - \\ & \frac{1}{\gamma_1}(a - a_1)\dot{a}_1 - \frac{1}{\gamma_2}(b - b_1)\dot{b}_1 - \\ & \frac{1}{\gamma_3}(c - p_1)\dot{p}_1 - \frac{1}{\gamma_4}(d - q_1)\dot{q}_1. \end{aligned}$$

令

$$u_1 = a_1(e_1 - c_1e_1 - e_2) - k_1e_1, \quad (8)$$

$$u_2 = -e_1(c_2e_2 + e_3) + p_1(c_1e_1 + e_2) - c_3e_3 - e_4 + c_1\dot{e}_1 - k_2e_2, \quad (9)$$

$$u_3 = -e_1^2 + b_1(c_2e_2 + e_3) + c_2\dot{e}_2 - k_3e_3, \quad (10)$$

$$u_4 = -q_1(e_1 + c_1e_1 + e_2) + c_3\dot{e}_3 - k_4e_4, \quad (11)$$

当满足如下参数自适应控制律时:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \gamma_1(e_1 - c_1e_1 - e_2)e_1, \\ \dot{b}_1 &= -\gamma_2e_3(c_2e_2 + e_3), \\ \dot{p}_1 &= -\gamma_3(c_1e_1 + e_2)e_2, \\ \dot{q}_1 &= \gamma_4(e_1 + c_1e_1 + e_2)e_4, \end{aligned} \quad (12)$$

则有 $\dot{V} = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 - k_3e_3^2 - k_4e_4^2 < 0$. 这里 $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ 是为保证 $\dot{V} < 0$ 而引入的参数. 此时, 闭环误差系统 (7) 是渐近稳定的, 所以系统 (6) 也是渐近稳定的.

定理 2 对于系统 (6), 当满足式 (8)~(11) 时, 系统被稳定到 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$. 其中 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = c_1e_1, \alpha_3 = c_2e_2, \alpha_4 = c_3e_3$ 且 $e_1 = x_1 - \alpha_1, e_2 = x_2 - \alpha_2, e_3 = x_3 - \alpha_3, e_4 = x_4 - \alpha_4$ 是误差信号.

2.2.2 数值仿真

设未知参数 a, b, c, d 估计值是 a_1, b_1, p_1, q_1 . 对式 (6) 施加控制 (8)~(11), 取 $c_1 = c_2 = c_3 = 0.5, k_1 = 0.1,$

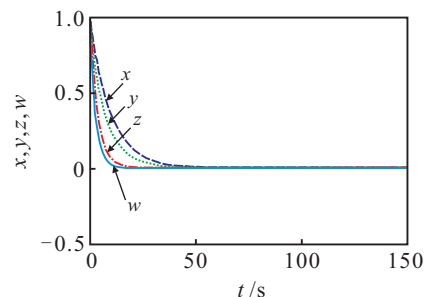


图 5 参数未知受控系统 (6) 的波形

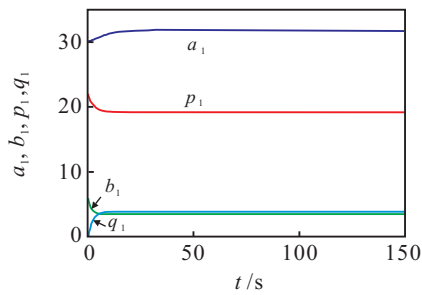


图6 参数未知受控系统(6)的参数估计

$k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, k_4 = 0.4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 2$, 受控系统波形如图5所示, 可见受控系统(11)渐近稳定到原点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$. 图6是参数 a, b, c, d 估计值 a_1, b_1, p_1, q_1 随时间变化图形. 由图6可知, 自适应反推控制方法能够很好地辨识系统参数.

3 结论

本文分别设计了线性反馈控制器和自适应反推控制器, 以将混沌系统控制到期望平衡点. 控制效果表明, 两种控制方法均能够解决超混沌 Bao 系统的控制问题, 且线性反馈控制结构简单, 而自适应反推控制能够控制参数未知的系统, 并能够很好地辨识系统参数.

参考文献(References)

- [1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *J of Atmospheric Science*, 1963, 20(2): 130-141.
- [2] Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [3] Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined[J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659-661.
- [4] Liu C X, Liu L, Liu T, et al. A new chaotic attractor[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2004, 22(5): 1031-1038.
- [5] Bao B C, Liu Z, Xu J P. New chaotic system and its hyperchaos generation[J]. *J of Systems Engineering and Electronics*, 2009, 20(6): 1179-1187.
- [6] Rössler O E. An equation for hyperchaos[J]. *Physical Letter A*, 1979, 71(2/3): 155-157.
- [7] Gao T G, Chen G R, Chen Z Q, et al. The generation and circuit implementation of a new hyper-chaos based upon Lorenz system[J]. *Physics Letters A*, 2007, 361(1/2): 78-86.
- [8] Wang X Y, Wang M J. A hyperchaos generated from Lorenz system[J]. *Physica A*, 2008, 387(14): 3751-3758.
- [9] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, et al. A hyperchaos generated from Chen's system[J]. *Int J of Modern Physics C*, 2006, 17(4): 471-478.
- [10] Chlouverakis K E, Sprott J C. Chaotic hyperjerk systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 28(3): 739-746.
- [11] 禹思敏, 禹之鼎. 一个新的五阶超混沌电路及其研究[J]. *物理学报*, 2008, 57(11): 6859-6867.
(Yu S M, Yu Z D. A novel fifth-order hyperchaotic circuit and its research[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(11): 6859-6867.)
- [12] Dadras S, Momeni H R. Four-scroll hyperchaos and four-scroll chaos evolved from a novel 4D nonlinear smooth autonomous system[J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(11/12): 1368-1373.
- [13] El-Sayed A M A, Nour H M, Elsaid A, et al. Circuit realization, bifurcations, chaos and hyperchaos in a new 4D system[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 239(15): 333-345.
- [14] Huang X, Zhao Z, Wang Z, et al. Chaos and hyperchaos in fractional-order cellular neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2012, 94(3): 13-21.
- [15] Liu Y J, Pang S Q, Chen D Y. An unusual chaotic system and its control[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, 57(9/10): 2473-2493.
- [16] Wang B, Shi P, Dong X C. On the impulsive synchronization control for a class of chaotic systems[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, doi.org/10.1155/2014/675721.
- [17] Jen-Fuh Chang, Meei-Ling Hung, Yi-Sung Yang, et al. Controlling chaos of the family of Rössler systems using sliding mode control[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37(2): 609-622.
- [18] Laoye J A, Vincent U E, Kareem S O. Chaos control of 4D chaotic systems using recursive backstepping nonlinear controller[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39(1): 356-362.
- [19] Effati S, Saberi-Nadafi J, Saberi Nik H. Optimal and adaptive control for a kind of 3D chaotic and 4D hyperchaotic systems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38(2): 759-774.
- [20] Zhu C X. Controlling hyperchaos in hyperchaotic Lorenz system using feedback controllers[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(10): 3126-3132.
- [21] Yau H T, Yan J J. Robust controlling hyperchaos of the Rössler system subject to input nonlinearities by using sliding mode control[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 33(5): 1767-1776.
- [22] Chen G X. A simple adaptive feedback control method for chaos and hyper-chaos control[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(17): 7258-7264.
- [23] 包伯成. 混沌电路导论[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 52-55.
(Bao B C. Introduction to chaotic circuits[M]. Beijing: Science Press, 2013: 52-55.)