第 31 卷 第 8 期
Vol. 31 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 8 月
Aug. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 08-1475-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.0910

状态饱和离散线性系统的稳定性分析

钱明霞[a], 嵇小辅[b]

(江苏大学 a. 财经学院，b. 电气信息工程学院，江苏 镇江 212013)

摘 要: 讨论一类具有状态饱和非线性的离散线性系统稳定性分析问题. 通过引入无穷范数小于等于1 的自由矩阵与对角元素非正的对角矩阵, 将状态饱和离散线性系统的状态变量约束在一个凸多面体内, 进而以矩阵不等式形式给出状态饱和离散线性系统的稳定性判据, 并给出该矩阵不等式的迭代线性矩阵不等式算法. 基于这一稳定性判据, 给出了基于迭代线性矩阵不等式的状态反馈控制律设计算法. 通过状态饱和离散线性系统的状态空间分割方法, 给出了保守性更小的稳定性判据, 并给出了相应的迭代线性矩阵不等式算法. 数值例子验证了所给出方法的正确性与有效性.

关键词: 离散系统；稳定性分析；饱和非线性；迭代线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Stability analysis for discrete-time linear systems with state saturation

QIAN Ming-xia[a], *JI Xiao-fu*[b]

(a. School of Finance & Economics，b. School of Electrical and Information Engineering，Jiangsu University, Zhenjiang 212013，China．Correspondent：QIAN Ming-xia，E-mail：qmx@ujs.edu.cn)

Abstract: The stability analysis for a class of discrete-time linear systems with state saturation nonlinearity is concemed. By introducing a free matrix with infinity norm less than or equal to 1 and a diagonal matrix with nonpositive diagonal elements, the state of this discrete-time linear system under state saturation constraint is confined in a convex hull. In this way, a criterion for discrete-time linear systems with state saturation to be asymptotically stable is obtained in terms of bilinear matrix inequalities that can be resolved by using the presented iterative linear matrix inequality algorithm. Based on this criterion, the state feedback control law synthesis problem is also resolved and the corresponding iterative linear matrix inequality algorithm is given. A further study shows that the space division method can be also applied to solve this problem with less conservativeness. Numerical examples are used to illustrate the effectiveness and correctness of the proposed method.

Keywords: discrete-time；stability analysis；state saturation nonlinearity；iterative linear matrix inequality

0 引 言

状态饱和现象广泛存在于工程系统, 如有限精度的计算机存储系统, 具有位置和速度约束的机械系统与神经网络等[1]. 这类系统的特点在于其状态变量都被约束在一个多面体内. 为了方便起见, 在稳定性分析与控制律设计过程中通常忽略饱和非线性的影响, 但这种情况下设计的控制律并不能保证闭环系统具有既定的性能, 甚至不能保证闭环系统的稳定性. 因此, 状态饱和系统的稳定性分析与控制律设计问题受到了国内外研究者的广泛重视.

文献 [1] 首次研究了状态饱和系统的稳定性分析问题, 相关结论很快推广到滤波器设计问题[2-3]. 考虑到平面系统的特殊性, 文献 [4] 讨论了平面系统的稳定性问题, 所得结论被进一步推广到一般状态饱和系统[5]. 在这些结论的基础上, 很容易获得部分状态饱和线性系统的稳定性判据[6]. 这些稳定性判据可以分成两类: 一类是研究系统稳定时系统矩阵必须满足的条件[7-8]; 另一类是约束 Lyapunov 矩阵为特殊结构, 如对角矩阵[9]. Fang 等[10]引入对角元素为负的行对角占优矩阵, 将连续时间状态饱和线性系统的状态向量约束在顶点与对角占优矩阵相关的凸多面体内, 运用鲁棒控制理论给出了稳定性判据. 文献 [11] 进一步

收稿日期: 2015-07-18；**修回日期:** 2015-10-13.

基金项目: 工业控制技术国家重点实验室开放课题项目(ICT1559)；浙江省重中之重学科开放基金重点项目；江苏高校优势学科建设工程项目.

作者简介: 钱明霞(1980−), 女, 博士, 讲师, 从事饱和系统的研究；嵇小辅(1979−), 男, 教授, 从事鲁棒控制理论等研究.

将该方法推广到了离散线性系统.

本文研究具有状态饱和非线性的离散线性系统的稳定性问题. 通过引入无穷范数小于等于 1 的自由矩阵与对角元素非正的对角矩阵, 将状态饱和离散线性系统的状态向量约束在凸多面体内, 基于凸多面体不确定系统的鲁棒控制理论给出了状态饱和离散线性系统的稳定性判据. 通过理论分析, 该稳定性判据与文献 [11] 相比具有更小的保守性. 在该稳定性判据的基础上, 同时给出了状态反馈控制律设计算法. 稳定性判据与控制律设计算法以矩阵不等式形式给出, 为解决数值计算问题, 给出了该矩阵不等式的迭代线性矩阵不等式算法. 进一步研究发现, 利用状态饱和离散线性系统的状态空间划分方法, 可以给出保守性更小的稳定性判据. 数值例子表明了所提出方法的有效性与正确性.

1 问题描述

考虑具有状态饱和非线性的离散线性系统

$$x(k+1)=h(Ax(k)). \tag{1}$$

其中: $x(k)\in \boldsymbol{D}^n:=\{x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots,x_n(k)]^{\mathrm{T}}\in \boldsymbol{R}^n:\mid x_i(k)\mid\leqslant 1,\ i\in[1,n]\}$ 为状态向量; $A=[a_{ij}]\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为定常矩阵; $h(\cdot)$ 为饱和函数, 可以描述为

$$h(Ax(k))=\begin{bmatrix} h_1\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j(k)\Big)\\ h_2\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j(k)\Big)\\ \vdots\\ h_n\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j(k)\Big)\end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$h_i(\zeta)=\mathrm{sign}(\zeta)\min\{1,\mid\zeta\mid\},\ i\in[1,n].$$

在给出结论之前, 首先给出本文用到的引理.

引理 1[12] 令 $u,u^1,u^2,\cdots,u^{\mathcal{I}}\in \boldsymbol{R}^{n_1}$; $v,v^1,v^2,\cdots,v^{\mathcal{J}}\in \boldsymbol{R}^{n_2}$. 如 $u\in\mathrm{co}\{u^i,i\in[1,\mathcal{I}]\}$, $v\in\mathrm{co}\{v^j,j\in[1,\mathcal{J}]\}$, 则有

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\in\mathrm{co}\Big\{\begin{bmatrix}u^i\\ v^j\end{bmatrix}:i\in[1,\mathcal{I}],j\in[1,\mathcal{J}]\Big\}, \tag{3}$$

其中 $\mathrm{co}\{\cdot\}$ 表示凸包.

令 $\mathcal{D}^n$ 为对角元素为 1 或 0 的 $n\times n$ 维对角矩阵的集合. 容易验证, $\mathcal{D}^n$ 含有 2^n 个元素, 其第 i 个元素用 D_i 表示, $i\in[1,2^n]$. 令 $D_i^-=I-D_i$, 容易验证, 如果 $D_i\in\mathcal{D}^n$, 则 $D_i^-\in\mathcal{D}^n$. 在引理 1 中, 如果 $\mathcal{I}=\mathcal{J}=2$, 即 $u\in\mathrm{co}\{u^1,u^2\}$, $v\in\mathrm{co}\{v^1,v^2\}$, 则式 (3) 等价于

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\in\mathrm{co}\Big\{D_i\begin{bmatrix}u^1\\ v^1\end{bmatrix}+D_i^-\begin{bmatrix}u^2\\ v^2\end{bmatrix}\Big\},\ i\in[1,2^2].$$

引理 2 令 $G=[g_{ij}]\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足 $\parallel G\parallel_\infty\leqslant 1$, $\varepsilon=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 满足 $\varepsilon_i\leqslant 0$, $i\in[1,n]$, 则有

$$h(Ax(k))\in\mathrm{co}\{D_iAx(k)+D_i^-(G+\varepsilon A)x(k)\},\quad i\in[1,2^n]. \tag{4}$$

证明 由 $\parallel G\parallel_\infty\leqslant 1$, $\mid x_i(k)\mid\leqslant 1$, $i\in[1,n]$, 易得到

$$\mid G_ix(k)\mid\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mid g_{ij}x_j(k)\mid\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mid g_{ij}\mid\leqslant\parallel G\parallel_\infty\leqslant 1,$$

即 $\mid G_ix(k)\mid\leqslant 1$ 成立.

注意到 $\varepsilon_i\leqslant 0$, $i\in[1,n]$, 可知 $A_ix(k)\geqslant 1$ 时 $\varepsilon_iA_ix(k)\leqslant 0$; 而 $A_ix(k)\leqslant -1$ 时 $\varepsilon_iA_ix(k)\geqslant 0$. 因此, 当 $A_ix(k)\geqslant 1$ 时, 有 $(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\leqslant 1$; 而当 $A_ix(k)\leqslant -1$ 时, 有 $(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\geqslant -1$. 当状态未饱和时, $h_i(A_ix(k))=A_ix(k)$, 这时可以得到 $h_i(A_ix(k))\in\mathrm{co}\{A_ix(k),(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\}$. 当状态饱和时, 这时当 $A_ix(k)>1$ 时, $h_i(A_ix(k))=1$, 或当 $A_ix(k)<-1$ 时, $h_i(A_ix(k))=-1$. 当 $A_ix(k)>1$ 时, 由 $(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\leqslant 1$ 可以得到 $h_i(A_ix(k))=1\in\mathrm{co}\{A_ix(k),(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\}$; 当 $A_ix(k)<-1$ 时, 由 $(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\geqslant -1$ 可以得到 $h_i(A_ix(k))=-1\in\mathrm{co}\{A_ix(k),(G_i+\varepsilon_iA_i)x(k)\}$. 应用引理 1 可以得到结论. □

注 1 引理 2 引入满足 $\parallel G\parallel_\infty\leqslant 1$ 的自由矩阵 G 与对角元素非正的对角矩阵 ε, 将非线性系统 (1) 的状态向量约束于凸多面体 $\mathrm{co}\{D_iAx(k)+D_i^-(G+\varepsilon A)x(k)\}$ 内, 进而可以使用凸多面体不确定线性系统的鲁棒控制理论来研究其稳定性分析与控制律设计问题.

2 稳定性分析

以下定理给出了系统 (1) 的稳定性判据.

定理 1 状态饱和离散线性系统 (1) 是渐近稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P, 矩阵 $G,X,\varepsilon=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_i\leqslant 0$, $i\in[1,n]$, 满足

$$\parallel G\parallel_\infty\leqslant 1, \tag{5}$$

$$\varXi_i=\begin{bmatrix}-P & ((D_i+\varepsilon D_i^-)A+D_i^-G)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\\ * & -X-X^{\mathrm{T}}+P\end{bmatrix}<0,\quad i\in[1,2^n]. \tag{6}$$

证明 由引理 2, 系统 (1) 可以变换为

$$x(k+1)=\sum_{i=1}^{2^n}\eta_i((D_i+\varepsilon D_i^-)A+D_i^-G)x(k). \tag{7}$$

其中: $\eta_i\geqslant 0$, $i\in[1,2^n]$, $\sum\limits_{i=1}^{2^n}\eta_i=1$.

为符号描述简单起见, 令

$$E_i=\eta_i((D_i+\varepsilon D_i^-)A+D_i^-G),\ i\in[1,2^n].$$

对于凸多面体不确定离散线性系统 (7), 设计以

下 Lyapunov 函数:

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k),\ P > 0, \tag{8}$$

并沿系统 (7) 的状态轨迹求取前向差分, 可得

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) =$$
$$\Big(\sum_{i=1}^{2^n} E_i x(k)\Big)^{\mathrm{T}} P \Big(\sum_{i=1}^{2^n} E_i x(k)\Big) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) =$$
$$x^{\mathrm{T}}(k)\Theta x(k), \tag{9}$$

其中

$$\Theta = \Big(\sum_{i=1}^{2^n} E_i\Big)^{\mathrm{T}} P \Big(\sum_{i=1}^{2^n} E_i\Big) - P. \tag{10}$$

对于任意矩阵 X 与对称正定矩阵 P, 有下式成立:

$$(X-P)P^{-1}(X-P)^{\mathrm{T}} \geqslant 0. \tag{11}$$

这时可得

$$XP^{-1}X^{\mathrm{T}} \geqslant X + X^{\mathrm{T}} - P. \tag{12}$$

利用不等式 (5), (6) 和 (12) 可得

$$\sum_{i=1}^{2^n}\eta_i \begin{bmatrix} -P & ((D_i+\varepsilon D_i^-)A + D_i^- G)^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \\ * & -XP^{-1}X^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0,$$

并进一步得到

$$\begin{bmatrix} -P & \sum_{i=1}^{2^n}\eta_i((D_i+\varepsilon D_i^-)A + D_i^- G)^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \\ * & -XP^{-1}X^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

利用 Schur 补引理[13]和不等式 (13), 可得 $\Theta < 0$, 从而 $\Delta V(x(k)) \leqslant -\epsilon \parallel x(k) \parallel^2$, 其中 $\epsilon = -\lambda_{\max}(\Theta) > 0$. 因此, 系统 (1) 是渐近稳定的. □

定理 1 的对角矩阵 ε 的对角元素 ε_i 满足 $\varepsilon_i \leqslant 0$. 作为特例, 可以令 $\varepsilon = 0$, 此时可得以下推论.

推论 1 状态饱和离散线性系统 (1) 是渐近稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P 与矩阵 G、X 满足式 (5) 及如下不等式:

$$\begin{bmatrix} -P & (D_iA + D_iG)^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \\ * & -X - X^{\mathrm{T}} + P \end{bmatrix} < 0,\ i \in [1, 2^n]. \tag{14}$$

注意到式 (11) 对于 $X = P$ 依然成立. 如果进一步令 $X = P$, 可得以下推论.

推论 2 状态饱和离散线性系统 (1) 是渐近稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P 与矩阵 G 满足式 (5) 及如下不等式:

$$\begin{bmatrix} -P & (D_iA + D_iG)^{\mathrm{T}} P \\ * & -P \end{bmatrix} < 0,\ i \in [1, 2^n]. \tag{15}$$

推论 2 即文献 [11] 中的推论 1, 由此看出文献 [11] 给出的状态饱和离散线性系统稳定性判据可以看作定理 1 在 $X = P$ 与 $\varepsilon = 0$ 时的特殊情形. 由此而言, 定理 1 具有较小的保守性.

注 2 定理 1 中 Lyapunov 函数(8)采用 Lyapunov 矩阵 P. 状态饱和离散线性系统 (1) 转换为凸多面体不确定系统 (7) 后, 如果设计参数依赖 Lyapunov 函数, 则可以降低结论保守性, 即设计依赖于参数 η_i 的 Lyapunov 函数. 注意到 η_i 标志着状态饱和系统 (1) 的饱和程度, 所以这类 Lyapunov 泛函称为饱和依赖 Lyapunov 泛函, 即

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)\Big(\sum_{i=1}^{2^n}\eta_i P_i\Big)x(k),$$

其中 $P_i\ (i \in [1, 2^n])$ 为对称正定矩阵. 采用定理 1 的思路可得到相应的稳定性判据, 具体方法参见文献 [11,14].

矩阵不等式 (5) 和 (6) 为非线性矩阵不等式, 难以采用常规的线性矩阵不等式方法求解. 为解决该矩阵不等式的可行性问题, 可以将满足 $\parallel G \parallel_\infty \leqslant 1$ 的矩阵 $G = [g_{ij}] \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 等价变换为

$$h_i G y_{ij} \leqslant 1,\ i \in [1, n],\ j \in [1, 2^n].$$

其中: $\mathcal{H}$ 为只有一个元素为 1, 其他元素为 0 的 n 维行向量的集合, $h_i \in \mathcal{H}$ 表示 h_i 的第 i 个元素为 1, 其他元素为 0; $\mathcal{Y}$ 为元素为 1 或 –1 的 n 维列向量的集合. 容易看出: $\mathcal{Y}$ 中有 2^n 个元素, $\mathcal{Y}_i \subset \mathcal{Y}$ 为第 i 个元素为 1, 其他元素为 1 或 –1 的向量集合, $\mathcal{Y}_i$ 中有 2^{n-1} 个元素, 记第 j 个元素为 y_{ij}.

算法 1 状态饱和离散系统 (1) 的稳定性分析.

Step 1: 选择满足 $\parallel G \parallel_\infty \leqslant 1$ 的矩阵 G, $\varepsilon = 0$, $k = 0$, 令 $\gamma_k > 0$ 为充分大的标量.

Step 2: 对变量 X, P 与 γ 求解以下线性矩阵不等式优化问题:

$$\min_{X,P}\ \gamma;$$
$$\text{s.t. } \Xi_i < \gamma I, \forall i \in [1, 2^n].$$

如果 $\gamma < 0$ 或 $\gamma > \gamma_k$, 则转 Step 4; 否则令 $k = k+1$, $\gamma_k = \gamma$, 转 Step 3.

Step 3: 使用 Step 2 所得 X 与 P, 对变量 ε, G 与 γ 求解以下线性矩阵不等式优化问题.

$$\min_{\varepsilon,G}\ \gamma.$$
$$\text{s.t. } \begin{cases} \Xi_i < \gamma I,\ \forall i \in [1, 2^n]; \\ h_i G y_{ij} \leqslant 1,\ i \in [1, n],\ j \in [1, 2^n]; \\ \varepsilon \leqslant 0. \end{cases}$$

如果 $\gamma < 0$ 或 $\gamma > \gamma_k$, 则转 Step 4; 否则令 $k = k+1$, $\gamma_k = \gamma$, 转 Step 2.

Step 4: 如果 $\gamma < 0$, 则系统 (1) 是渐近稳定的; 否则该算法失效. 这时, 可选择不同的 ε 与 G, 从 Step 1 开始重新迭代.

现在考虑系统(1)的状态反馈控制律设计问题，即带控制输入$u(k)$的状态饱和系统

$$x(k+1)=h(Ax(k)+Bu(k)). \tag{16}$$

其中: $B=[b_{ij}]\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$为定常矩阵, $u(k)\in \boldsymbol{R}^m$为控制输入向量. 设计目标在于给出状态反馈控制律$u(k)=Fx(k)$使得闭环系统渐近稳定. 将式(5)和(6)中A替换为$A+BF$, 使用定理(1)可得以下结论.

定理 2 状态饱和离散线性系统(16)是可镇定的, 如果存在对称正定矩阵P, 矩阵$G,X,F,\varepsilon=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_i\leqslant 0, i\in[1,n]$, 满足式(5)和不等式

$$\varGamma_i=\begin{bmatrix}-P & ((D_i+\varepsilon D_i^-)(A+BF)+D_i^-G)^{\mathrm T}X^{\mathrm T}\\ * & -X-X^{\mathrm T}+P\end{bmatrix}<0,\quad i\in[1,2^n], \tag{17}$$

则状态反馈控制律为

$$u(k)=Fx(k).$$

类似于算法1, 给出系统(16)的状态反馈控制律设计算法.

算法 2 状态饱和离散系统(16)的状态反馈控制律设计算法.

Step 1: 选择对称正定矩阵Q, 求解Lyapunov方程

$$-P+(A+BF)^{\mathrm T}P(A+BF)=-Q,$$

其中F为使$A+BF$ Schur稳定的反馈矩阵. 令$X=P, k=0, \gamma_k>0$为充分大的标量.

Step 2: 使用Step 1所得X与P, 对变量ε,G,γ求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\min_{\varepsilon,G}\ \gamma.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\varGamma_i<\gamma I,\ \forall i\in[1,2^n];\\ h_iGy_{ij}\leqslant 1,\ i\in[1,n],\ j\in[1,2^n];\\ \varepsilon\leqslant 0.\end{cases}$$

如果$\gamma<0$或$\gamma>\gamma_k$, 则转Step 5; 否则, 令$k=k+1$, $\gamma_k=\gamma$, 转Step 3.

Step 3: 使用Step 2所得ε,G和F, 对变量X,P,γ求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\min_{X,P}\ \gamma;$$

$$\text{s.t. } \varGamma_i<\gamma I,\ \forall i\in[1,2^n].$$

如果$\gamma<0$或$\gamma>\gamma_k$, 则转Step 5; 否则, 令$k=k+1$, $\gamma_k=\gamma$, 转Step 4.

Step 4: 使用Step 3所得ε,P和X, 对变量G,F,γ求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\min_{G,F}\ \gamma.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\varGamma_i<\gamma I,\ \forall i\in[1,2^n];\\ h_iGy_{ij}\leqslant 1,\ i\in[1,n],\ j\in[1,2^n].\end{cases}$$

如果$\gamma<0$或$\gamma>\gamma_k$, 则转Step 5; 否则, 令$k=k+1$, $\gamma_k=\gamma$, 转Step 2.

Step 5: 如果$\gamma<0$, 则系统(16)是可镇定的, 反馈控制律为$u(k)=Fx(k)$; 否则, 该算法失效. 这时, 可选择不同的F和Q, 从Step 1重新迭代.

3 状态空间分割法

从G和ε的设计过程可以看出, 只要当$A_ix\geqslant 1$时$G_ix\leqslant 1$成立, 且当$A_ix\leqslant -1$时$G_ix\geqslant -1$成立, 则引理2成立, 这时$\|G\|_\infty\leqslant 1$不一定需要满足. 考虑到这点, 可以将系统(1)的状态空间$\boldsymbol{D}^n$对于给定向量$\xi\in\boldsymbol{R}^n$划分为

$$S_\xi^-:=\{x|x\in\boldsymbol{D}^n:\xi^{\mathrm T}x<-1\},$$
$$S_\xi^\pm:=\{x|x\in\boldsymbol{D}^n:-1<\xi^{\mathrm T}x<1\},$$
$$S_\xi^+:=\{x|x\in\boldsymbol{D}^n:\xi^{\mathrm T}x>1\}.$$

S_ξ^-与S_ξ^+关于坐标原点对称.

定义 1 对于矩阵A和G, 记$S_A^+\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_G^+$, 如果$S_{A_i}^+\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_{G_i}^+, i\in[1,n]$, 即$G_ix\leqslant 1, A_ix>1$, $x\in\boldsymbol{D}^n$. 类似地, 记$S_A^-\subset\boldsymbol{D}^n-S_G^-$, 如果$S_{A_i}^-\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_{G_i}^-, i\in[1,n]$.

引理 3 如果$G\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$满足$S_A^+\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_G^+$, 则下式成立:

$$h(Ax(k))\in\mathrm{co}\{D_iAx(k)+D_i^-Gx(k)\},\ i\in[1,2^n]. \tag{18}$$

证明 由$\boldsymbol{D}^n$和$S_A^+\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_G^+$的对称性可知$S_A^-\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_G^-$. 对于任意$i\in[1,n]$, 当$A_ix(k)$不饱和时, $h_i(A_ix(k))=A_ix(k)$, 这时$h_i(A_ix(k))\in\mathrm{co}\{A_ix(k),G_ix(k)\}$成立; 当$A_ix(k)>1$时, 由$S_{A_i}^+\subseteq\boldsymbol{D}^n-S_{G_i}^+$可得$G_ix(k)\leqslant 1$, 这时$h_i(A_ix(k))=1\in\mathrm{co}\{A_ix(k),G_ix(k)\}$成立; 当$A_ix(k)<-1$时, 同理可知$G_ix(k)\geqslant -1$与$h_i(A_ix(k))=-1\in\mathrm{co}\{A_ix(k),G_ix(k)\}$成立. 由引理1可知式(18)成立. □

在此基础上，可以获得以下定理.

定理 3 状态饱和离散线性系统(1)是渐近稳定的, 如果存在对称正定矩阵P和满足$S_A^+\subset\boldsymbol{D}^n-S_G^+$的矩阵$G$使得以下矩阵不等式成立:

$$\varOmega_i=\begin{bmatrix}-P & (D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P\\ P(D_iA+D_i^-G) & -P\end{bmatrix}<0,\quad i\in[1,2^n]. \tag{19}$$

对系统(1)设计Lyapunov函数如式(8)所示, 并由定理1证明过程可得定理3成立.

注 3 从定义1可以看出, 矩阵G与A紧密相

关. 由于这一原因, 矩阵 G 的设计过程较引理 2 的 G 复杂, 特别当矩阵 A 维数较高时. 从引理 3 推导过程可以看出, 引理 3 中的 G 具有较大的自由度且包含了引理 2. 因此, 定理 3 比定理 2 具有更小的保守性. 遗憾的是, 在反馈控制律设计时, 对于未知矩阵 $A+BF$, S^+_{A+BF} 无法确定, 因此该方法只能用于开环系统稳定性分析而难以应用到状态反馈控制律设计.

对于任意 $i \in [1,n]$, $S^+_{A_i} = \{x|x \in \boldsymbol{D}^n : A_i^{\mathrm{T}}x > 1\}$ 可以看作超立方体 $\boldsymbol{D}_n$ 被超平面 $\{x|x \in \boldsymbol{D}^n, A_i x = 1\}$ 所截的凸多面体. 注意到该多面体具有凸性, $S^+_A \subseteq \boldsymbol{D}^n - S^+_G$ 可以表示为

$$h_i G y_{ij} < 1,\ i \in [1,n], j \in [1,v].$$

其中 $\mathcal{H}$ 为只有一个元素为 1, 其他元素为 0 的 n 维行向量集合, $h_i \in \mathcal{H}$ 表示 h_i 的第 i 个元素为 1, 其他元素为 0; y_{ij}, $i \in [1,n], j \in [1,v]$ 为 $\{x|x \in \boldsymbol{D}^n,\ A_i x > 1\}$ 的顶点, v 为 $\{x|x \in \boldsymbol{D}^n, A_i x > 1\}$ 顶点个数. 在此基础上, 可以给出以下的迭代线性矩阵不等式算法.

算法 3　状态饱和离散系统 (1) 的稳定性分析.

Step 1: 给定对称正定矩阵 Q, 求解 Lyapunov 方程

$$-P + A^{\mathrm{T}}PA = -Q.$$

如果存在对称正定解 P, 则令 $k = 0$, α_k 为充分大的标量; 否则, 该系统不稳定.

Step 2: 使用 Step 1 所得到的 P, 对变量 G 和 α 求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\min_G\ \alpha.$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \varOmega_i < \alpha I,\ i \in [1, 2^n]; \\ h_i G y_{ij} < 1,\ i \in [1,n], j \in [1,v]. \end{cases}$$

如果 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > \alpha_k$, 转 Step 4, 否则令 $k = k+1$, $\alpha_k = \alpha$, 并转 Step 3.

Step 3: 使用 Step 2 所得到的 G, 对变量 P 和 α 求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\min_P\ \ \alpha;$$

$$\text{s.t.}\ \varOmega_i < \alpha I,\ i \in [1, 2^n].$$

如果 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > \alpha_k$, 转 Step 4, 否则令 $k = k+1$, $\alpha_k = \alpha$, 并转 Step 4.

Step 4: 如果 $\alpha < 0$, 则该系统是渐近稳定的, 否则该算法失效. 这时, 可以选择不同的 Q, 从 Step 1 开始重新迭代.

4　数值仿真

首先考虑系统 (1) 的稳定性问题, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.9 & -0.3 \end{bmatrix}.$$

由算法 1 可知该系统是渐近稳定的, 并可得矩阵不等式 (5) 和 (6) 的一组可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 3.430\,2 & 0.156\,3 \\ 0.156\,3 & 2.682\,7 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 3.320\,5 & 0.035\,2 \\ 0.144\,6 & 2.803\,9 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.412\,3 & 0.508\,9 \\ 0.517\,2 & -0.374\,3 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1.142\,3 & 0 \\ 0 & -0.565\,8 \end{bmatrix}.$$

为了验证定理 2 的可行性, 考虑系统 (16) 的反馈控制律设计问题, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.7 \\ 0.9 & 1.3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

系统矩阵 A 的特征根为 2.2 和 0.6, 所以该系统即使没有状态饱和现象发生时也是开环不稳定的. 利用算法 2 可得矩阵不等式 (17) 的可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 7.289\,4 & -0.342\,6 \\ -0.342\,6 & 0.720\,4 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 6.189\,6 & 0.142\,3 \\ -0.551\,7 & 0.808\,6 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.413\,5 & 0.127\,5 \\ 0.156\,9 & -0.781\,4 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -0.243\,3 & 0 \\ 0 & -0.414\,5 \end{bmatrix}.$$

同时可得状态反馈控制律为

$$u(k) = [-1.817\,2 - 0.674\,3]x(k).$$

使用该状态反馈控制律, 闭环系统的状态轨迹分别如图 1 和图 2 所示, 可知闭环系统渐近稳定.

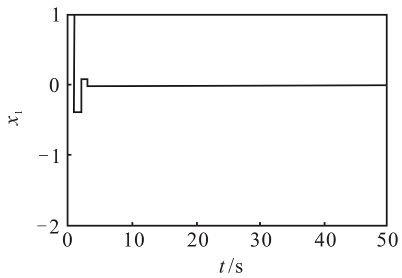

图 1　闭环系统状态轨迹 $x_1(k)$

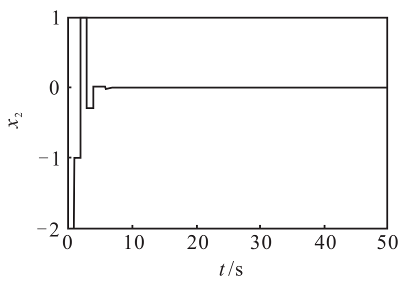

图 2　闭环系统状态轨迹 $x_2(k)$

5 结 论

本文讨论了一类具有状态饱和非线性的离散线性系统的稳定性分析问题. 通过引入无穷范数小于等于1的自由矩阵与对角元素非正的对角矩阵, 将状态饱和离散线性系统的状态变量约束在顶点与这两个矩阵相关的凸多面体内, 进而使用凸多面体不确定系统鲁棒控制理论, 以矩阵不等式形式给出了状态饱和离散线性系统的稳定性判据, 并给出了该矩阵不等式的迭代线性矩阵不等式算法. 基于这一稳定性判据, 同时给出了基于迭代线性矩阵不等式算法的状态反馈控制律设计算法. 通过状态饱和离散线性系统的状态空间分割方法, 给出了保守性更小的稳定性判据, 并给出了相应的迭代线性矩阵不等式算法.

参考文献(References)

[1] Singh V. A new realizability condition for limit cycle limit state-space digital filters employing saturation arithmetic[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1985, 32(10): 1070-1071.

[2] Ritzerfeld J H F. A criterion for the overflow stability of second-order digital filters that is satisfied by all scaled state-space structures using saturation[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1989, 36(8): 49-57.

[3] Sanberg I W. A theorem concerning limit cycles in digital filters[C]. Proc of the 7th Annual Allerton Conf on Circuit and System Theory. Monticello: University Illinois Press, 1969: 63-68.

[4] Singh V. Elimination of overflow oscillations in fixed-point state-space digital filters using saturation arithmetic[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1990, 37(6): 814-818.

[5] Liu D, Michel A N. Asymptotic stability of discrete-time systems with saturation nonlinearities with application to digital filters[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1992, 39(10): 789-807.

[6] Kar H, Singh V. Stability analysis of discrete-time systems in a state-space realisation with partial state saturation nonlinearities[J]. IEE Proc on Control Theory and Applications, 2003, 150(3): 205-208.

[7] Barnes C W, Fam A T. Minimum norm recursive digital filters that are free of overflow limit cycles[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1977, 24(10): 569-574.

[8] Kar H, Singh V. Elimination of overflow oscillations in fixed-point state-space digital filters with saturation arithmetic: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2004, 1(1): 40-42.

[9] Mills W L, Mullis C T, Roberts R A. Digital filter realizations without overflow oscillations[J]. IEEE Trans on Acoustics Speech, Signal Processing, 1978, 26(4): 334-338.

[10] Fang H, Lin H. Stability analysis for linear systems under state constraints[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 950-955.

[11] Ji X, Liu T, Sun Y, et al. Stability analysis and controller synthesis for discrete linear time-delay systems with state saturation nonlinearities[J]. Int J of Systems Science, 2010, 42(3): 397-406.

[12] Hu T, Lin Z. Control systems with actuator saturation: analysis and design[M]. Boston: Birkhäuser, 2001: 7.

[13] Boyd S, EI Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[14] Cao Y Y, Lin Z. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function[J]. Automatica, 2003, 39(7): 235-241.

(责任编辑：孙艺红)