第 31 卷 第 11 期 控 制 与 决 策 2016 年 11 月
Vol. 31 No. 11 Control and Decision Nov. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 11-2019-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0929

考虑偏好反转的区间不确定多属性决策方法

张美璟[1,2], 王应明[1], 陈圣群[2], 李 锴[2]

(1. 福州大学 决策科学研究所，福州 350116；2. 福建江夏学院 电子信息科学学院，福州 350108)

摘 要: 针对实际决策中的不确定性和偏好反转问题, 提出一种区间不确定多属性决策方法. 该方法通过证据推理方法集结区间不确定评估信息, 采用累积前景理论代替主观期望效用理论构建方案的综合前景价值, 从而应对不确定环境下可能的决策偏好反转, 将区间可能度用于方案综合前景价值排序. 介绍了决策过程, 给出了求解方案综合前景价值的非线性规划模型, 并通过实例验证了方法的可行性、合理性和有效性.

关键词: 累积前景理论；证据推理；多属性决策；区间不确定；偏好反转

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Approach for multiple attribute decision making under interval uncertainty considering preference reversal

ZHANG Mei-jing[1,2], *WANG Ying-ming*[1], *CHEN Sheng-qun*[2], *LI Kai*[2]

(1. Institute of Decision Sciences，Fuzhou University，Fuzhou 350116，China；2. College of Electrionic and Information Science，Fujian Jiangxia University，Fuzhou 350108，China．Correspondent：WANG Ying-ming，E-mail：ymwang@fzu.edu.cn)

Abstract: Aiming at the uncertainty and preference reversal in practical decision making problems, an approach for multi-attribute decision making under interval uncertainty is proposed. The interval assessments are integrated by the evidential reasoning. Then the prospect value of each alternative is worked out by using cumulative prospect theory, substituting for the subjective expected utility theory, to handle with preference reversal in possibility under uncertainty, and the interval possibility degree is used to order all alternatives. The process of decision making is provided, and a pair of nonlinear programming models is built up to calculate the overall prospect value of each alternatives. An example is given to illustrate the feasibility, rationality and effectiveness of the proposed approach.

Keywords: cumulative prospect theory；evidential reasoning；multiple attribute decision making；interval uncertainty；preference reversal

0 引 言

多属性决策分析 (MADA) 是一种集结多项指定属性评估信息以寻找最优方案的决策方法. 受制于客观现实的复杂性和决策者认知的局限性[1], MADA 的决策参数在实践中通常含有不完整、含糊不清、乃至完全未知的信息, 需用区间数、模糊数、语言评价等形式表述. 其中, 区间数因其简单直观的特点成为最常用的一种不确定信息表达形式.

目前, 除了 TOPSIS 方法[2-3]、线性规划法4和前景理论[5-6], 区间理论与证据推理 (ER) 的结合也为求解区间不确定决策问题提供了一种有效途径, 尤其适用含有不完全信息的决策问题. 2006 年, Xu 等[7]将区间信度结构引入 ER 方法, 用于表达评估值的不确定; Wang 等[8]扩展了评估等级形式, 使用区间等级描述 ER 方法中评价等级的不确定, 给出了区间等级条件下评估信息的集结公式及证明; 文献 [9] 以区间证据推理为基础, 结合扩展原理, 提出了一种混合 ER 方法, 用于处理含有区间数、三角模糊数和梯形模糊数等异构评估信息的混合不确定决策问题.

在方案比较时, ER 采用主观期望效用表示方案优劣, 简单直观且考虑了决策者的不同风险偏好[7-8]. 然而, 行为学和心理学的研究表明, 现实决策者在面对不确定或风险问题时存在偏好反转问题, 即得失的预期程度将引起风险偏好的变化[10]. 期望效用理论

收稿日期: 2015-07-21；**修回日期:** 2016-01-13.

基金项目: 国家杰出青年基金项目(70925004)；福建省自然科学基金项目(2015J01279).

作者简介: 张美璟 (1981−), 男, 讲师, 博士生, 从事决策分析、信息融合、计算智能的研究；王应明 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法、数据包络分析、规则库推理、质量功能展开等研究.

在决策时并未考虑上述情况, 以致决策结果不够合理. 此外, ER 的等级期望效用均为正值, 未能直观反映决策者对评估结果的不满和排斥.

累积前景理论 (CPT) 是前景理论 (PT) 的改进版, 能够刻画决策者偏好反转导致的决策参数非线性变化, 在决策领域得到了广泛的应用[6,11-18]. 本文结合 CPT 和 ER 提出一种新的区间不确定决策方法. 该方法先以解析 ER 方法集结不确定评估信息, 将集结后的各等级置信度作为等级主观概率代入 CPT 函数以计算方案的前景价值, 进而用区间可能度对各方案进行排序. 给出该方法的决策模型和流程, 讨论决策结果的含义, 并通过实例分析验证所提出方法的可行性和有效性.

1 理论概述

1.1 证据推理方法

ER 方法以 Dempster-Shafer 理论 (DST) 集结信息, 权重信息的引入克服 DST 的悖论[7], 以主观期望效用衡量方案优劣, 并考虑决策者的风险偏好[8], 适用于定性和定量混合的决策问题. 迭代算法和解析算法是求解 ER 的主要方法, 后者计算更简便, 更适合信息量大的决策问题[19]. 基于解析算法的 ER 方法描述如下:

定义 1[19] 令多属性决策问题有 M 个候选方案 $a_l\,(l=1,2,\cdots,M)$, L 个评价指标 $e_i(i=1,2,\cdots,L)$, w_i 为 e_i 的相对权重. 指标的评估等级序列为 $H=\{H_n|H_n\prec H_{n+1}, n=1,2,\cdots,N\}$, 其等级效用为 $U=\{u(H_n)|u(H_n)<u(H_{n+1}),\ n=1,2,\cdots,N\}$, e_i 的评估记为 $S(e_i)=\{(H_n,\beta_{n,i}), n=1,2,\cdots,N\}$. ER 的非线性规划解析优化模型为

$$u=\sum_{n=1}^{N}u(H_n)\beta_n+u(X)(\beta_H).$$

$$\text{s.t. } \beta_n=\frac{m_n}{1-\bar{m}_H},\ n=1,2,\cdots,N;$$

$$\beta_H=\frac{\tilde{m}_H}{1-\bar{m}_H};$$

$$m_n=\Big[\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i}+m_{H,i})-\prod_{i=1}^{L}m_{H,i}\Big]\Big/K,\quad n=1,2,\cdots,N;$$

$$\tilde{m}_H=\Big[\prod_{i=1}^{L}m_{H,i}-\prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\Big]\Big/K;$$

$$\bar{m}_H=\Big[\prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\Big]\Big/K;$$

$$K=\Big[\sum_{n=1}^{N}\Big(\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i}+m_{H,i})\Big)-(N-1)\prod_{i=1}^{L}m_{H,i}\Big];$$

$$\bar{m}_{H,i}=1-w_i, \tilde{m}_{H,i}=w_i\Big(1-\sum_{n=1}^{N}m_{n,i}\Big);$$

$$m_{H,i}=\tilde{m}_{H,i}+\bar{m}_{H,i};$$

$$\sum_{n=1}^{N}m_{n,i}+m_{H,i}=1,\ i=1,2,\cdots,L. \tag{1}$$

若 $X=H_1$, 则方案取最小效用 $u_{\min}$; 若 $X=H_N$, 则取最大效用 $u_{\max}$.

1.2 累积前景理论

令 $F=\{f:S\to X\}$ 为所有前景的集合, F^+ 和 F^- 分别为正、负前景. 前景 f 是自然状态集 S 到结果集 X 的一个函数, 表示事件 A_d 发生时会产生结果 x_d. 所有 x_d 构成一个严格递增序列, $x_1\prec x_2\prec\cdots\prec x_D$. 取集合中点 x_h 为参考点, 即 $h=(D+1)/2$, 结果劣于 x_h 则为负前景, 反之为正前景[12]. 正、负前景价值分别为 $V(f^+)$ 和 $V(f^-)$, 表达在相应结果下决策者的得失程度. f 的综合前景价值 $V(f)$ 为两者之和, 定义为

$$V(f)=V(f^+)+V(f^-). \tag{2}$$

其中: $V(f^+)$ 定义为所有正价值函数 $v(\Delta x_d)$ 与其对应概率权重函数 π_i^+ 的乘积之和, $d=h,h+1,\cdots,D$; $V(f^-)$ 为所有负价值函数 $v(\Delta x_d)$ 与其对应概率权重函数 π_i^- 的乘积之和, $d=1,2,\cdots,h-1$. 正、负前景价值为

$$V(f^+)=\sum_{h}^{l}\pi_d^+v(\Delta x_d), \tag{3}$$

$$V(f^-)=\sum_{1}^{h-1}\pi_d^-v(\Delta x_d). \tag{4}$$

其中: Δx_d 为前景结果 x_d 与参考点 x_h 的差值, 即 $\Delta x_d=x_d-x_h$, 表示该结果的表面价值得失. 正、负前景事件的边际效用函数为

$$\varpi^+(p_d)=\frac{p_d^\gamma}{(p_d^\gamma+(1-p_d^\gamma)^\gamma)^{1/\gamma}},\quad d=(D+1)/2,\cdots,D; \tag{5}$$

$$\varpi^-(p_d)=\frac{p_d^\delta}{(p_d^\delta+(1-p_d^\delta)^\delta)^{1/\delta}},\quad d=1,2,\cdots,(D+1)/2-1. \tag{6}$$

得失的价值函数及其概率权重函数为[13]

$$v(\Delta x_d)=\begin{cases}\Delta x_d^{\alpha_1},\ d=(D+1)/2,\cdots,N;\\ -\theta(-\Delta x_d)^{\alpha_2},\ d=1,2,\cdots,(D+1)/2-1.\end{cases} \tag{7}$$

$$\pi_d^+=\varpi^+\Big(\sum_{j=d}^{N}p_j\Big)-\varpi^+\Big(\sum_{j=d+1}^{N}p_j\Big),\quad d=(D+1)/2,\cdots,D; \tag{8}$$

$$\pi_d^-=\varpi^-\Big(\sum_{j=1}^{d}p_j\Big)-\varpi^-\Big(\sum_{j=1}^{d-1}p_j\Big),\quad d=1,2,\cdots,(D+1)/2-1. \tag{9}$$

其中: 参数 α_1 和 α_2 分别为正、负前景下决策者的风

险态度系数, 满足 $0 < \alpha_1 < 1$ 和 $0 < \alpha_2 < 1$, α_1 和 α_2 的值越大表示决策者越趋于冒险. 在本文中: λ 为损失规避系数, 当 $\lambda > 1$ 时, 表明决策者对损失更敏感; γ 为风险收益系数; δ 为风险损失系数; p_d 为事件 A_d 的主观概率. 关于上述参数的取值, 中外学者基于各自决策情境得到不同的结果: 美国受试者更看重收益, 在中大概率下, 收益时回避风险比损失时寻求风险更显著, 中国则相反[12-13]. 因此, 前景参数的确定应根据实际情况选取.

2　决策方法

2.1　问题描述

设某不确定 MADA 问题有 M 个候选方案 a_l ($l = 1, 2, \cdots, M$), L 个评价指标 e_i ($i = 1, 2, \cdots, L$), w_i 为 e_i 的权重, $H = \{H_n | H_n \prec H_{n+1},\ n = 1, 2, \cdots, N\}$ 为指标等级序列, 可得决策矩阵

$$D_g = (S(e_i(a_l)))_{L\times M}.$$

2.2　区间证据推理方法

2.2.1　定量指标的信度结构计算

定义 2[7]　令 $\{(H_{n,i}, Y_{n,i}),\ n = 1, 2, \cdots, N\}$ 为定量指标的等级标准, t 为精确定量评估, $[t^f, t^u]$ 为区间定量评估, 则信度结构计算如下:

1) 若 $Y_{n,i} \leqslant t \leqslant Y_{n+1,i}$, $N-1 \geqslant n \geqslant 1$, 则有

$$\beta_{n,i} = \frac{Y_{n+1,i} - t}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}},\ \beta_{n+1,i} = \frac{t - Y_{n,i}}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}}. \tag{10}$$

2) 若 $Y_{n,i} \leqslant t^l < t^u \leqslant Y_{n+1,i}$, $N-1 \geqslant n \geqslant 1$, 则

$$\begin{cases} \beta^f_{n,i} = \dfrac{Y_{n+1,i} - t^u}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}},\ \beta^u_{n,i} = \dfrac{Y_{n+1,i} - t^f}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}}; \\ \beta^f_{n+1,i} = \dfrac{t^f - Y_{n,i}}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}},\ \beta^u_{n+1,i} = \dfrac{t^u - Y_{n,i}}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}}. \end{cases} \tag{11}$$

3) 若 $Y_{n-g,i} \leqslant t^u \leqslant Y_{n-g+1,i} < \cdots < Y_{n,i} \leqslant t^u \leqslant Y_{n+1,i}$, $N > n > g \geqslant 1$, 则有

$$\begin{cases} \beta^f_{n-g,i} = 0,\ \beta^u_{n,i} = \dfrac{Y_{n-g+1,i} - t^f}{Y_{n-g+1,i} - Y_{n-g,i}}; \\ \beta^f_{n-g+1,i} = 0,\ \beta^u_{n-g+1,i} = 1; \\ \qquad\vdots \\ \beta^f_{n,i} = 0,\ \beta^u_{n,i} = 1; \\ \beta^f_{n+1,i} = 0,\ \beta^u_{n+1,i} = \dfrac{t^u - Y_{n,i}}{Y_{n+1,i} - Y_{n,i}}. \end{cases} \tag{12}$$

2.2.2　等级信度结构的检验及归一化

定义 3[8]　若 e_i 的等级信度和满足 $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta_{n,i} = 1$, 则其信度结构完整, 反之不完整.

定义 4[8]　若 e_i 的等级信度和满足 $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta_{n,i} \leqslant 1$, 则其信度结构合理, 反之不合理.

定义 5[9]　令 $\{[\beta^f_{n,i}, \beta^u_{n,i}],\ n = 1, 2, \cdots, N\}$ 为 e_i 的区间评估信度. 若 $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta^f_{n,i} \leqslant 1$, 则该区间信度结构合理, 反之不合理.

评估信度经合理性检验后, 需进行归一化处理.

定义 6[19]　令指标的区间信度评估集合为 $S(e_i) = \{[\beta^f_{n,i}, \beta^u_{n,i}],\ n = 1, 2, \cdots, N\}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta^f_{n,i} \leqslant 1$. 该信度结构的归一化为

$$S(e_i) = \\ \Big\{\Big[\max\Big\{\beta^f_{n,i}, 1 - \sum_{p\neq n}\beta^u_{p,i}\Big\},\ \min\Big\{\beta^u_{n,i}, 1 - \sum_{p\neq n}\beta^f_{p,i}\Big\}\Big]; \\ p = 1, 2, \cdots, N,\ n = 1, 2, \cdots, N\Big\}. \tag{13}$$

归一化后即可计算指标的等级不确定信度.

定义 7[8]　令 $S(e_i) = \{\beta_{n,i}, n = 1, 2, \cdots, N\}$ 为指标的精确信度. 若 $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta_{n,i} < 1$, 则其不确定信度为 $\beta_{H,i} = 1 - \sum\limits_{i=1}^{N} \beta_{n,i}$.

定义 8[9]　令 $S(e_i) = \{[\beta^f_{n,i}, \beta^u_{n,i}], n = 1, 2, \cdots, N\}$ 为指标的区间评估信度. 若 $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta^u_{n,i}(a_l) < 1$, 则该区间评估的不确定信度为

$$\beta_{H,i} = \Big[\max\Big(0, 1 - \sum_{i=1}^{N}\beta^u_{n,i}\Big), 1 - \sum_{i=1}^{N}\beta^f_{n,i}\Big].$$

2.2.3　基于累积前景理论的区间证据推理模型

令 $S(e_i) = \{(H_n, \beta_{n,i}),\ n = 1, 2, \cdots, N\}$ ($i = 1, 2, \cdots, L$) 为合理的等级信度结构, 对指标 e_i 的基本概率赋值 (BPA) 求解为

$$m_{n,i} = w_i\beta_{n,i},\ n = 1, 2, \cdots, N; \tag{14}$$

$$m_{H,i} = \tilde{m}_{H,i} + \bar{m}_{H,i}. \tag{15}$$

其中: $\bar{m}_{H,i} = 1 - w_i$, $\tilde{m}_{H,i} = w_i\Big(1 - \sum\limits_{n=1}^{N} m_{n,i}\Big)$.

由文献 [18] 可得求解综合 BPA 的解析式为

$$m_n = k\Big[\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i} + \bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i}) - \prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i})\Big], \\ n = 1, 2, \cdots, N; \tag{16}$$

$$\tilde{m}_H = k\Big[\prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i}) - \prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\Big]; \tag{17}$$

$$\bar{m}_H = k\Big[\prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\Big]; \tag{18}$$

$$k = \Big[\sum_{i=1}^{N}\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i} + \bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i}) - (N-1)\times \\ \prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i})\Big]^{-1},\ n = 1, 2, \cdots, N. \tag{19}$$

集结后的综合信度为

$$\beta_n(a_l)=\frac{m_n}{1-\bar{m}_H},\ n=1,2,\cdots,N; \tag{20}$$

$$\beta_H(a_l)=\frac{\tilde{m}_H}{1-\bar{m}_H}. \tag{21}$$

依据累积前景理论的框架, 将方案的评价等级序列 $H=\{H_n|H_n\prec H_{n+1},\ n=1,2,\cdots,N\}$ 作为其有序前景集合 $F=\{f_n|f_n\prec f_{n+1},\ n=1,2,\cdots,N\}$, 集结后方案的各综合评价等级的置信度作为该前景 f_n 发生的主观概率, 即 $p_n=\beta_n$. 为了定量表达前景的差异, 将有序前景序列转换为对应的序数序列, 即 $O(f_n)=n, n=1,2,\cdots,N$. 取中间前景为参考点 $f_h=(N+1)/2$, 各前景 f_n 的得失价值归一化为

$$\Delta x_n=\frac{n-(N+1)/2}{N},\ n=1,2,\cdots,N.$$

由于指标评估存在区间不确定, 方案的前景价值必介于某个区间范围, 记作 $[V_{\min}(a_l),V_{\max}(a_l)]$, $l=1,2,\cdots,M$. 结合 CPT 及区间 ER, 可以得到 $V_{\min}(a_l)$ 和 $V_{\max}(a_l)$ 的函数

$$V_{\min}(a_l)=\sum_{n=1}^{N}(\pi(\beta_n)v(\Delta x_n))+\pi(\beta_H)v(\Delta x_1), \tag{22}$$

$$V_{\max}(a_l)=\sum_{n=1}^{N}(\pi(\beta_n)v(\Delta x_n))+\pi(\beta_H)v(\Delta x_N). \tag{23}$$

公共约束条件为

$$\text{s.t. } v(\Delta x_n)=\begin{cases}\Delta x_n^{\alpha_1},\ n=(N+1)/2,\cdots,N;\\ -\theta(-\Delta x_n)^{\alpha_2},\ n=1,2,\cdots,(N+1)/2-1.\end{cases}$$

$$\Delta x_n=\frac{n-(N+1)/2}{N},\ n=1,2,\cdots,N.$$

$$\varpi(p)=\begin{cases}\dfrac{p^\gamma}{(p^\gamma+(1-p)^\gamma)^{1/\gamma}},\\ n=(N+1)/2,\cdots,N;\\ \dfrac{p^\delta}{(p^\delta+(1-p)^\delta)^{1/\delta}},\\ n=1,2,\cdots,(N+1)/2-1.\end{cases}$$

$$\pi(\beta_n)=\begin{cases}\varpi\Big(\sum_{j=n}^{N}\beta_j\Big)-\varpi\Big(\sum_{j=n+1}^{N}\beta_j\Big),\\ n=1,2,\cdots,(N+1)/2-1;\\ \varpi\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\Big)-\varpi\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\Big),\\ n=1,2,\cdots,(N+1)/2-1.\end{cases}$$

$$\beta_n(a_l)=\frac{m_n}{1-\bar{m}_H},\ n=1,2,\cdots,N.$$

$$\beta_H(a_l)=\frac{\tilde{m}_H}{1-\bar{m}_H}.$$

$$m_n=k\Big[\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i}+\bar{m}_{H,i}+\tilde{m}_{H,i})-\prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i}+\tilde{m}_{H,i})\Big],\ n=1,2,\cdots,N.$$

$$\tilde{m}_H=k\Big[\prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i}+\tilde{m}_{H,i})-\prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\Big],\ n=1,2,\cdots,N.$$

$$\bar{m}_H=k\Big[\prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\Big],\ n=1,2,\cdots,N.$$

$$k=\Big[\sum_{i=1}^{N}\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i}+\bar{m}_{H,i}+\tilde{m}_{H,i})-(N-1)\prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i}+\tilde{m}_{H,i})\Big]^{-1}.$$

$$m_{n,i}=w_i\beta_{n,i},\ n=1,2,\cdots,N.$$

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}=1,\ i=1,2,\cdots,L.$$

$$\beta_{n,i}^{-}\leqslant\beta_{n,i}\leqslant\beta_{n,i}^{+},$$

$$n=1,2,\cdots,N,\ i=1,2,\cdots,L. \tag{24}$$

其中: 式 (22) 和 (23) 分别与 (24) 构成计算前景价值区间下、上限的非线性优化模型, 可利用 Lingo 求解.

2.3 方案排序及结果讨论

关于区间价值 $[V_{\min}(a_l),V_{\max}(a_l)]$ 的排序, ER 方法一般采用区间平均值[7-9]或区间可能度[5,20-21]等方法. 该方法由于前景价值的引入, 可能存在负前景价值的方案, 因此需要根据情况区分对待: 1) 若方案前景价值区间为负值, 即 $V_{\min}(a_l)\leqslant V_{\max}(a_l)\leqslant 0$, 则该方案达不到决策者的心理底线, 予以直接淘汰; 若所有方案都无法达到心理底线, 则重新设计所有方案. 2) 若方案前景价值区间存在非负值, 即 $V_{\max}(a_l)>0$, 则该方案有可行性, 可能满足决策者的需求, 可采用文献 [21] 方法进一步确定优劣, 具体描述如下:

设 $[V_{\min}(a_1),V_{\max}(a_1)]$ 和 $[V_{\min}(a_2),V_{\max}(a_2)]$ 为 a_1 和 a_2 的区间价值, $a_1\succ a_2$ 的可能度 $p(a_1\succ a_2)$为

$$p(a_1\succ a_2)=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{(V_{\max}(a_1)-V_{\max}(a_2))+}{|V_{\max}(a_1)-V_{\max}(a_2)|+}\rightarrow \leftarrow\frac{(V_{\min}(a_1)-V_{\min}(a_2))}{|V_{\min}(a_1)-V_{\min}(a_2)|+l_{a_1a_2}}\Big), \tag{25}$$

其中 $l_{a_1a_2}$ 为两区间的重叠部分. 将可行方案 $a_l(l=1,2,\cdots,M)$ 的可能度组合成可能度矩阵, 即

$$P=(p)_{M\times M}=\begin{bmatrix}p(a_1\succ a_1) & p(a_1\succ a_2) & \cdots & p(a_1\succ a_M)\\ p(a_2\succ a_1) & p(a_2\succ a_2) & \cdots & p(a_2\succ a_M)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p(a_M\succ a_1) & p(a_M\succ a_2) & \cdots & p(a_M\succ a_M)\end{bmatrix}, \tag{26}$$

而后逐行统计 a_l 中大概率下优于其他方案的数量 C_l $(p > 0.5)$, 并依此进行排序. 该方法具有保序性、计算量小、简洁直观等特点[20].

3 算例演示

考虑某企业的私有云存储系统招标问题, 相关部门根据企业需求制定评价体系并对外招标. 评价体系分 11 个方面: 访问控制机制 e_1、入侵检测与预防 e_2、系统可靠性 e_3、数据恢复能力 e_4、数据安全性 e_5 和单位时间最大事务数 e_6(事务数/秒)、瞬间最大并发数 e_7/个、平均响应时长 e_8/秒、初期建设费用 e_9 / 十万元、年均维持费用 e_{10} / 万元和维护人员 e_{11}/人. 其中: 前 5 个为定性指标, 其余为定量指标; $e_1 \sim e_7$ 为效益型指标, 其余为成本型指标. 指标评估序列分 5 个等级: 差 H_1、较差 H_2、一般 H_3、较好 H_4 和好 H_5, 定量指标的评价标准如表 1 所示.

表 1　定量指标等级标准

指标	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
e_6	[0,3]	(3,6]	(6,9]	(9,12]	$(12, \infty)$
e_7	10	20	30	40	50
e_8	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
e_9	$(18, \infty)$	(15,18]	(12,15]	(9,12]	[0,9]
e_{10}	$(24, \infty)$	(20,24]	(16,20]	(12,16]	[0,12]
e_{11}	$(10, \infty)$	(8,10]	(6,8]	(4,6]	[0,4]

在表 1 中: 等级 "一般 H_3" 作为参考点. 各指标的权重 ω 如表 2 所示, 由采购部门以专家打分法给出. A_1、A_2 和 A_3 三个系统参与竞标, 各系统的评测结果见表 2.

表 2　竞标系统的测试评估结果

指标	权重 ω	A_1	A_2	A_3
e_1	0.1	$\{(H_4, [0.2, 0.3]), (H_5, [0.7, 0.8])\}$	$\{(H_3, [0.2, 0.3]), (H_4, [0.2,0.4]), (H_5, [0.3, 0.5])\}$	$\{(H_2, [0.35, 0.4]), (H_3, [0.35, 0.5]), (H_4, [0.15, 0.3])\}$
e_2	0.12	$\{(H_3, [0.3, 0.5]), (H_4, [0.4, 0.6])\}$	$\{(H_2, [0.2, 0.4]), (H_3, [0.2,0.5]), (H_4, [0.4, 0.6])\}$	$\{(H_3, [0.25, 0.4]), (H_4, [0.3, 0.6]), (H_5, [0.3, 0.45])\}$
e_3	0.1	$\{H_4, 1\}$	$\{(H_3, [0.4, 0.6]), (H_4, [0.3,0.5]), (H_5, [0.1, 0.2])\}$	$\{(H_3, [0.2, 0.5]), (H_4, [0.4,0.6]), (H_5, [0.3, 0.5])\}$
e_4	0.12	$\{(H_2, [0.1, 0.25]), (H_3, [0.3, 0.4]), (H_4, [0.3, 0.5])\}$	$\{(H_3, [0.4, 0.6]), (H_4, [0.2, 0.5])\}$	$\{(H_2, [0.3, 0.5]), (H_3, [0.5, 0.7])\}$
e_5	0.08	$\{(H_3, [0.1, 0.25]), (H_4, [0.4, 0.5]), (H_5, [0.3, 0.4])\}$	$\{(H_3, [0.4, 0.7]), (H_4, [0.3, 0.6])\}$	$\{(H_3, [0.35, 0.5]), (H_5, [0.3, 0.4])\}$
e_6	0.08	5.4	6	6.9
e_7	0.08	[16,22]	[18,21]	[19,26]
e_8	0.1	0.33	0.27	0.41
e_9	0.07	[12,16]	[15,17]	[15,20]
e_{10}	0.09	[19,23]	[16,21]	[16,17]
e_{11}	0.06	[5,8]	[6,7]	[6,8]

本例的目标是选择最优系统, 更注重系统带来的收益, 故此处的前景参数采用文献 [12] 的取值, 即 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$, $\lambda = 2.25$, $\gamma = 0.61$, $\delta = 0.69$[12-13].

按第 3 节的步骤, 先将 $e_6 \sim e_{11}$ 的定量评估采用式 (10) ∼ (12) 转换为等级信度结构, 如表 3 所示, 随后对所有指标的等级信度进行检验和归一化处理, 进而按式 (22) 和 (24)、式 (23) 和 (24) 通过 Lingo 软件分别建立方案价值区间的下、上限优化模型, 代入各参数, 可得各方案的价值区间如表 4 所示.

表 3　转换后定量指标的等级信度

指标	A_1	A_2	A_3
e_6	$\{H_2, 1\}$	$\{H_3, 1\}$	$\{H_3, 1\}$
e_7	$\{(H_1, [0, 0.4I_{11}]), (H_2, [0.6, 1]), (H_3, [0, 0.2I_{12}])\}$	$\{(H_1, [0, 0.2I_{21}]), (H_2, [0.8, 1]), (H_3, [0, 0.\ 1I_{22}])\}$	$\{(H_1, [0, 0.1I_{31}]), (H_2, [0.41]), (H_3, [0, 0.6I_{32}])\}$
e_8	$\{(H_2, 0.3), (H_3, 0.7)\}$	$\{(H_3, 0.7), (H_4, 0.3)\}$	$\{(H_1, 0.1), (H_2, 0.9)\}$
e_9	$\{(H_2, 0.25), (H_3, 0.75)\}$	$\{H_2, 1\}$	$\{(H_1, 0.4), (H_2, 0.6)\}$
e_{10}	$\{(H_2, 0.75), (H_3, 0.25)\}$	$\{(H_2, 0.2), (H_3, 0.8)\}$	$\{H_3, 1\}$
e_{11}	$\{(H_3, 0.667), (H_4, 0.333)\}$	$\{H_3, 1\}$	$\{H_3, 1\}$

表 4　竞标系统的前景价值区间

系统	A_1	A_2	A_3
上限	0.160 189	0.156 617	−0.003 318 06
下限	−0.174 748	−0.254 755	−0.178 437

在表 4 中: A_3 满足条件 $V_{\min}(A_3) \leqslant V_{\max}(A_3) < 0$, 属于不可接受方案, 不参与后续排序. 将剩余的 A_1 和 A_2 数据代入式 (25), 得到可能度矩阵

$$P = (p)_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.599\,852 \\ 0.400\,148 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

由此可知: $C_1(p > 0.5) = 1, C_2(p > 0.5) = 0$, 即 $A_1 \overset{0.60}{\succ} A_2$, 系统 A_1 以微弱优势入选.

在本算例中, 由于决策过程中主、客观的不确定, 部分定性指标采用不完整分布式信度结构描述. 这种信息不完全的不确定情况在单纯使用 CPT 或 TOPSIS 时无法处理, 因为这两种方法在使用时均要求定性指标必须等级明确且信息完全, 否则无法计算指标的相对距离. 另一方面, ER 方法虽能处理上述不完全分布式信度结构, 但文献 [7-9] 所用的期望效用理论无法刻画决策者面对不同程度得失的偏好反转, 决策结果不够合理. 相比而言, 本方法较好地处理了上述问题.

4 结　论

本文结合累积前景理论和区间证据推理提出了一种考虑决策偏好反转的不确定多属性决策方法, 能够有效集结定性与定量相结合的不确定评估信息, 同时决策过程考虑了不同得失状态下决策者面对风险的心理变化, 在结合了上述方法的优点的同时克服了其存在的不足. 算例分析表明, 所提出方法具有很好的可行性、合理性和有效性.

参考文献(References)

[1] Guo M, Yang J B, Chin K S, et al. Evidential reasoning approach for multiattribute decision analysis under both

fuzzy and interval uncertainty[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(3): 683-697.

[2] 谭旭, 高妍方, 陈英武. 区间型多属性决策求解新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(7): 1082-1085.
(Tan X, Gao Y F, Chen Y W. New method for solving interval multi-attribute decision-making problem[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(7): 1082-1085.)

[3] 常志朋, 程龙生, 刘家树. 基于马田系统与TOPSIS的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 21(1): 168-175.
(Chang Z P, Cheng L S, Liu J S. Multiple attribute decision making method with intervals based on Mahalanobis — Taguchi system and TOPSIS method[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 21(1): 168-175.)

[4] 马建华, 房勇, 陈晓兰. 区间参数线性规划的稳定决策模型[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(12): 1404-1414.
(Ma J H, Fang Y, Chen X L. Stability decision models of linear programming with interval parameters[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 2013, 33(12): 1404-1414.)

[5] 张晓, 樊治平. 一种基于前景理论的风险型区间多属性决策方法[J]. 运筹与管理, 2012, 21(3): 44-50.
(Zhang X, Fan Z P. A method for risky interval based on multiple attribute decision making prospect theory[J]. Operation Research and Management Science, 2012, 21(3): 44-50.)

[6] 江文奇. 基于前景理论和统计推断的区间数多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(2): 375-379.
(Jiang W Q. Interval multi-criteria decision-making approach based on prospect theory and statistic deduction[J]. Control and Decision, 2015, 30(2): 375-379.)

[7] Xu D L, Yang J B, Wang Y M. The evidential reasoning approach for multi-attribute decision analysis under interval uncertainty[J]. European J of Operational Research, 2006, 174(3): 1914-1943.

[8] Wang Y M, Yang J B, Xu D L, et al. The evidential reasoning approach for multiple attribute decision analysis using interval belief degrees[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(1): 35-66.

[9] 张美璟, 王应明. 基于扩展原理的混合型证据推理不确定决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 670-676.
(Zhang M J, Wang Y M. Hybrid evidential reasoning for decision making under uncertainty based on extension principle[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 670-676.)

[10] Lichtenstein S, Slovie P. Reversals of Preference between bids and choice in gambling decisions[J]. J of Experimental Psychology, 1971, 89(1): 46-55.

[11] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometric, 1979, 47(2): 263-291.

[12] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. J of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.

[13] 刘培德. 一种基于前景理论的不确定语言变量风险型多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 893-897.
(Liu P D. Method for multi-attribute decision-making under risk with the uncertain linguistic variables based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 893-897.)

[14] 李喜华. 基于前景理论的复杂大群体直觉模糊多属性决策方法[D]. 长沙: 中南大学商学院, 2012.
(Li X H. Intuitionistic fuzzy multiple attribute complex-large group decision making method based on prospect theory[D]. Changsha: Business School, Central South University, 2012.)

[15] 樊治平, 陈发动, 张晓. 基于累积前景理论的混合型多属性决策方法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(3): 295-301.
(Fang Z P, Chen F D, Zhang X. Method for hybrid multiple attribute decision making based on cumulative prospect theory[J]. J of Systems Engineering, 2012, 27(3): 295-301.)

[16] 刘勇, Forrest J, 刘思峰, 等. 基于前景理论的多目标灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 345-350.
(Liu Y, Forrest J, Liu S F, et al. Multi-objective grey target decision-making based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 345-350.)

[17] 龚承柱, 李兰兰, 卫振锋, 等. 基于前景理论和隶属度的混合型多属性决策方法[J]. 中国管理科学, 2014, 22(10): 122-128.
(Gong C Z, Li L L, Wei Z F, et al. A method for hybrid multiple attribute decision making based on prospect theory and membership[J]. Chinese J of Management Science, 2014, 22(10): 122-128.)

[18] 高建伟, 刘慧晖, 谷云东. 基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(12): 3175-3181.
(Gao J W, Liu H H, Gu Y D. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on prospect theory[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(12): 3175-3181.)

[19] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Environment impact assessment using the evidential reasoning approach[J]. European J of Operational Research, 2006, 174(3): 1885-1913.

[20] Wang Y M, Elhag Taha M S. On the normalization of interval and fuzzy weights[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(18): 2456-2471.

[21] 高峰记. 可能度及区间数综合排序[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(8): 2033-2040.
(Gao F J. Possibility degree and comprehensive priority of interval numbers[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(8): 2033-2040.)

(责任编辑：闫　妍)