

基于约束输入变速吸引律的离散重复控制器设计

周文委, 孙明轩, 张有兵

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对离散时间线性系统的周期跟踪问题, 提出一种能够约束控制输入变化速度的变速吸引律, 结合干扰抑制措施构造了理想误差动态, 并由此导出离散重复控制器. 分析表明, 该变速吸引律能使跟踪误差在有限时间内单调收敛至零, 且误差收敛速度可控. 为刻画误差动态行为, 推导了有界扰动下的误差单调收敛域、绝对值收敛域和稳态误差带, 并给出了收敛步数. 针对伺服电机系统的仿真与实验结果验证了所提出控制方案的有效性.

关键词: 重复控制; 吸引律; 离散时间系统; 约束输入

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Rare-variant attracting law based design of discrete-time repetitive controllers with constrained input

ZHOU Wen-wei, SUN Ming-xuan, ZHANG You-bing

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: ZHOU Wen-wei, E-mail: zww@zjut.edu.cn)

Abstract: The problem of periodic tracking is addressed for discrete-time linear systems. A rare-variant attracting law for the repetitive controller design is presented, and the ideal error dynamic is formed based on the proposed attracting law, by which the discrete-time repetitive controller is designed. It is shown that the control input is constrained within the pre-specified region, and the monotonic convergence of the tracking error is ensured in finite time. Consequently, the undesirable high-frequency switching between different values of the control signal is avoided. To characterize the error dynamics, the monotone convergence region, the absolute convergence boundary and the steady state error band are derived, respectively, in the presence of the bounded disturbances. The expression for the convergence steps is also given. Both numerical simulation and experiment results demonstrate the effectiveness of the proposed repetitive control scheme.

Keywords: repetitive control; attracting law; discrete-time systems; constrained input

0 引言

许多具有旋转或者周期运行特性的系统(如转台伺服系统、光伏逆变器)中,除了完全未知的量测噪声外,较普遍地存在着与参考指令具有相同动态的周期扰动.针对系统周期扰动的抑制问题,基于内模原理的重复控制是一种常见的解决方案^[1-2].通过将参考指令的模型植入重复控制器,被控输出可以无静差地跟踪参考指令,实现良好的稳态误差^[3].

自从文献[4]提出重复控制方法以来,大量学者致力于重复控制理论和应用的研究,发展出连续和离散时延内模、有限维重复控制以及非线性系统的重复控制等方法,文献[5]对此作了详细的综述.进入

21世纪后,许多学者致力于将其他控制方法与重复控制相结合,发展出多种结构和新方法.例如文献[6]提出了一种 $nk \pm m$ 次谐波重复控制器用于提高恒压变频PWM变换器的性能;文献[7]提出一种多速率重复控制方法;文献[8]提出带状态反馈的重复控制,在基于极点配置的状态反馈中加入积分环节来抑制系统干扰.

为了改善系统动态品质,文献[9]首先提出基于指数趋近律的离散滑模控制,显式定义了滑动模态的状态轨迹;文献[10]提出了理想趋近律和鲁棒趋近律的概念;文献[11]为趋近律设计提供了无抖振到达条件;文献[12]提出一种基于死区离散趋近律的准滑模

收稿日期: 2015-07-22; 修回日期: 2015-10-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174034); 浙江省自然科学基金项目(LY16E070005).

作者简介: 周文委(1978—),男,博士生,从事重复控制的研究; 孙明轩(1961—),男,教授,博士生导师,从事学习控制、重复控制等研究.

控制方法; 文献[13]提出一种双幂次趋近律, 在快速趋近切换面的同时给出了有界扰动作用下的收敛界。区别于已确定的趋近律设计控制器, 文献[14]提出一种扰动动态补偿的趋近律, 对系统不确定项进行了处理; 文献[15]提出的理想切换动态方法解决了不确定系统控制性能对不确定项的依赖问题; 文献[16]提出基于理想误差动态设计重复控制器, 通过吸引律构造理想误差动态, 将跟踪误差取代离散滑模控制的切换函数, 以零点取代切换面, 使得闭环系统具有理想误差动态所刻画的期望性能。

本文针对不确定周期系统的跟踪控制问题, 采用理想误差动态方法设计重复控制器。考虑执行器输出速度受限的实际情况, 在约束控制量的同时追求系统稳态运动的不变性。首先通过构造新的变速吸引律来定义跟踪误差收敛轨迹, 使得误差收敛速度上限可控、单调递减, 从而约束控制量变化速度; 然后从时域角度分析误差收敛行为和稳态特性, 并给出误差收敛速度范围; 最后通过伺服电机控制系统的仿真和实验验证了设计工作的有效性。

1 问题的提出

考虑 n 阶单入单出离散时间线性系统

$$y_k + A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + w_k. \quad (1)$$

其中: u_k 为控制输入, y_k 为系统输出, w_k 为有界干扰, d 为延迟步数; 系统参数 $A(z^{-1})$ 与 $B(z^{-1})$ 为关于延迟算子 z^{-1} 的多项式, 有

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}, \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}, \end{cases} \quad (2)$$

a_i 和 b_i 为系统结构参数, $b_0 \neq 0$, 正整数 $1 \leq m \leq n$ 。

本文研究的问题是在考虑以具有周期特性为主的干扰情形下, 针对不确定系统(1)设计能够约束控制量的重复控制器, 使得系统输出快速逼近并跟踪参考指令。为衡量跟踪性能, 本文分别对跟踪误差收敛步数、单调收敛域、绝对值收敛边界和稳态误差带宽进行了分析, 以刻画跟踪误差的动态行为。

2 吸引律的设计

为使系统输出在有限时间内逼近参考指令, 同时考虑针对控制输入的约束, 本文构造一种新型的离散变速吸引律用于刻画误差动态性能, 有

$$e_{k+1} = \frac{P+PQ}{2}e_k - \left[\frac{Q}{2} \arctan(|e_k| - \lambda) + \frac{P(1-Q)\delta}{2} + Q\left(F - \frac{\pi}{4}\right) \right] \text{sgn}(e_k). \quad (3)$$

其中: $\arctan(\cdot)$ 为反正切函数, 死区边界 $\delta > 0$, 参数 $\lambda = 2F - \frac{\pi}{2} - \delta \geq \delta$, $P = \text{sgn}\left[\frac{|e_k|}{\delta}\right]$, $Q = \text{sgn}\left[\frac{|e_k|}{\lambda}\right]$, $[\cdot]$ 为向下取整函数。

2.1 收敛性分析

定理 1 针对 $w_k = 0$ 时的标称系统(1)的位置跟踪问题, 利用吸引律(3)设计控制器, 则跟踪误差单调收敛至零并保持, 误差收敛过程不穿越零线, 无抖振, 无正负交替现象, 即 $\text{sgn}(e_{k+1}) = \text{sgn}(e_k)$ 。

证明 根据 $|e_k|$ 取值, 针对如下 3 种情形分别考虑:

1) 设 $|e_k| \geq \lambda$, 有 $P = Q = 1$, 所以由式(3)得

$$e_{k+1} = e_k - \left[\frac{1}{2} \arctan(|e_k| - \lambda) + F - \frac{\pi}{4} \right] \text{sgn}(e_k). \quad (4)$$

其中: $\frac{1}{2} \arctan(|e_k| - \lambda) + F - \frac{\pi}{4} > 0$, 所以 $|e_{k+1}| < |e_k|$, 即跟踪误差具有收敛性。

根据反正切函数的特性可得 $\arctan(|e_k| - \lambda) < |e_k| - \lambda$, 将其代入式(4), 有 $e_{k+1} \text{sgn}(e_k) > (|e_k| - \delta)/2 \geq 0$, 即 e_{k+1} 与 e_k 保持同号, 所以收敛过程具有单调性。

根据吸引律(3), 有

$$\begin{aligned} \Delta e_{k+1} \text{sgn}(e_k) &= (e_{k+1} - e_k) \text{sgn}(e_k) = \\ &= - \left[F - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(|e_k| - \lambda) \right] \leq \\ &= - \left(F - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

即跟踪误差收敛步长不小于 $F - \pi/4$, 所以经过有限控制步后必然有 $|e_k| < \lambda$ 。

2) 设 $\delta \leq |e_k| < \lambda$, 有 $P = 1, Q = 0$, 因此由式(3)得 $|e_{k+1}| = e_k/2 - \delta/2 < |e_k|/2$, 即跟踪误差具有收敛性。又因为 $e_{k+1} \text{sgn}(e_k) = |e_k|/2 - \delta/2 > 0$, 所以 e_{k+1} 与 e_k 保持同号, 即收敛过程具有单调性。

根据吸引律(3), 有

$$\Delta e_{k+1} \text{sgn}(e_k) = \frac{e_k}{2} - \frac{\delta}{2} \leq -\delta, \quad (6)$$

即跟踪误差收敛步长不小于 δ , 所以经过有限控制步后必然有 $|e_k| < \delta$ 。

3) 设 $|e_k| < \delta$, 有 $P = Q = 0$, 因此 $e_{k+1} = 0$, 即跟踪误差收敛至零并保持。□

2.2 吸引过程分析

定理 2 对于标称系统(1), 利用吸引律(3)设计控制器, 则经过有限控制步 k 后, 跟踪误差收敛到零并保持。 k 满足

$$k \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{e_0 - \lambda - 1}{F - \pi/8} \right\rceil + k_{2m} + k_{3m}, & |e_0| \in [\lambda + 1, \infty); \\ \left\lceil \log_{4/3} \frac{3e_0 + 4\lambda + 8\delta}{4\lambda + 6\delta} \right\rceil + k_{3m}, & |e_0| \in [\lambda, \lambda + 1); \\ \lceil \log_2^{e_0 + \delta} - \log_2^\delta \rceil, & |e_0| \in [\delta, \lambda); \\ 1, & |e_0| \in (0, \delta). \end{cases} \quad (7)$$

其中: $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整, $k_{2m} = \lceil \log_{4/3} \frac{7\lambda+8\delta+3}{6\lambda+6\delta} \rceil$, $k_{3m} = \lceil \log_2^{\lambda+\delta} - \log_2^\delta \rceil$.

证明 根据 e_0 取值, 针对如下4种情形分别考虑.

1) 假设 $e_0 \in [\lambda+1, \infty)$, 根据反正切函数的单调性可得

$$\arctan(e_k - \lambda) \geq \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

将其代入式(3), 有

$$e_{k+1} \leq e_k - F + \frac{\pi}{8}. \quad (8)$$

根据递推关系解得 $e_k \leq e_0 - k(F - \pi/8)$, 所以存在 $k_1 = \lceil \frac{e_0 - \lambda - 1}{F - \pi/8} \rceil$, 使得任意 $k \geq k_1$ 均满足 $e_k < \lambda + 1$, 即跟踪误差从 e_0 开始, 经过不超过 k_1 控制步后收敛至半径为 $\lambda + 1$ 的零点邻域内.

2) 假设 $e_0 \in [\lambda, \lambda + 1)$, 有

$$\arctan'(e_k - \lambda) = \frac{1}{1 + (e_k - \lambda)^2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \quad (9)$$

所以 $\arctan(e_k - \lambda) > \frac{e_k - \lambda}{2}$. 代入式(3), 得

$$e_{k+1} \leq \frac{3}{4}e_k - \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\delta}{2}\right). \quad (10)$$

根据递推关系可得

$$e_k \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k e_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\delta}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^k e_0 - 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right] \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\delta}{2}\right). \quad (11)$$

由式(11)得, 存在 $k_2 = \lceil \log_{4/3} \frac{3e_0 + 4\lambda + 8\delta}{4\lambda + 6\delta} \rceil$, 使得任意 $k \geq k_2$ 均满足 $e_k < \lambda$, 即跟踪误差从 e_0 开始, 经过不超过 k_2 步后收敛至半径为 λ 的零点邻域内. 当 $e_0 \rightarrow \lambda + 1$ 时, 得到 k_2 的上确界 $k_{2m} = \lceil \log_{4/3} \frac{7\lambda + 8\delta + 3}{6\lambda + 6\delta} \rceil$.

3) 假设 $e_0 \in [\delta, \lambda)$, 由式(3)得 $e_{k+1} = e_k/2 - \delta/2$. 根据递推关系有

$$e_k = \frac{e_0}{2^k} - \frac{2^k - 1}{2^k} \delta, \quad (12)$$

所以存在 $k_3 = \lceil \log_2^{e_0 + \delta} - \log_2^\delta \rceil$, 使得任意 $k \geq k_3 - 1$ 均满足 $e_k < \delta$, 即跟踪误差从 e_0 开始, 经过不超过 k_3 步后收敛至半径为 δ 的零点邻域内. 当 $e_0 \rightarrow \lambda$ 时, 得到 k_3 的上确界 $k_{3m} = \lceil \log_2^{\lambda + \delta} - \log_2^\delta \rceil$.

4) 假设 $e_0 \in (0, \delta)$, 此时 $P = Q = 0$, 所以由式(3)可得 $e_{k+1} = 0$.

由于吸引律(3)为奇函数, 当 e_0 为负值时, 具有相同的收敛行为. 当 $|e_0| \in [\lambda + 1, \infty)$ 时, 跟踪误差从 e_0 开始, 经过不超过 $k_1 + k_{2m} + k_{3m}$ 控制步后收敛至零并保持; 当 $|e_0| \in [\lambda, \lambda + 1)$ 时, 经过不超过 $k_2 + k_{3m}$ 控制步后跟踪误差收敛至零并保持; 当 $|e_0| \in [\delta, \lambda)$ 时, 经过 k_3 控制步后跟踪误差收敛至零并保持. \square

注1 因为计算过程通过不等式将反正切函数

进行了线性近似, 所以实际收敛时间小于上述分析.

2.3 控制输入变化速度的约束

由不考虑干扰的标称系统(1)可得

$$y_{k+1} - y_k = z^{-d} B(u_{k+1} - u_k) - A(y_{k+1} - y_k). \quad (13)$$

因为输出误差 $e_k = r_k - y_k$, 所以有

$$z^{-d} B(u_{k+1} - u_k) = (r_{k+1} - r_k) - (e_{k+1} - e_k) + A(y_{k+1} - y_k). \quad (14)$$

设离散系统取样周期为 T_s , 则由式(14)可得控制输入变化速度满足

$$\dot{u}_k = \frac{\Delta u_k}{T_s} = \frac{u_{k+1} - u_k}{T_s} = z^d B^{-1}(1 + A)(\dot{r}_k - \dot{e}_k). \quad (15)$$

其中 \dot{r}_k 为给定参考指令变化速度, 其值与控制器无关. 由式(15)可见, 控制输入变化速度取决于当前与最近 n 步误差变化速度的线性组合. 据此, 在设计误差吸引律时, 限制相邻控制步的误差变化量即误差收敛速度在一定范围内, 可以约束控制输入变化速度.

定理3 对于标称系统(1), 利用吸引律(3)设计控制器, 则跟踪误差收敛速度与 e_k 符号相反, 且收敛速率在 $[\delta/T_s, F/T_s]$ 区间内单调降低.

证明 1) 当 $|e_k| > \lambda$ 时, 根据式(3), 有误差收敛速度

$$\dot{e}_{k+1} = \frac{\Delta e_{k+1}}{T_s} = \frac{(e_{k+1} - e_k)}{T_s} = \left[\frac{\pi}{4} - F - \frac{1}{2} \arctan(|e_k| - \lambda)\right] \frac{\text{sgn}(e_k)}{T_s}, \quad (16)$$

所以

$$\begin{cases} |\dot{e}_{k+1}| = \left[F - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(|e_k| - \lambda)\right] / T_s \in \left[\left(F - \frac{\pi}{4}\right) / T_s, F/T_s\right), \\ \text{sgn}(\dot{e}_{k+1}) = -\text{sgn}(e_k). \end{cases} \quad (17)$$

又因为 e_k 单调收敛不变号, 即 $\text{sgn}(e_{k+1}) = \text{sgn}(e_k)$, 所以根据式(16), 有

$$(\dot{e}_{k+1} - \dot{e}_k) \text{sgn}(e_k) = \frac{1}{2T_s} [\arctan(|e_{k-1}| - \lambda) - \arctan(|e_k| - \lambda)] > 0. \quad (18)$$

由式(17)和(18)可得, 当 $e_k > 0$ 时 $\dot{e}_k < \dot{e}_{k+1} < 0$; 当 $e_k < 0$ 时 $0 < \dot{e}_{k+1} < \dot{e}_k$, 即

$$|\dot{e}_{k+1}| < |\dot{e}_k|. \quad (19)$$

2) 当 $\delta \leq |e_k| < \lambda$ 时, 根据式(3), 有 $\Delta e_{k+1} = -\frac{e_k}{2} - \frac{\delta}{2} \text{sgn}(e_k)$, 所以

$$\begin{cases} |\dot{e}_{k+1}| = \frac{e_k + \delta}{2T_s} < \frac{\lambda + \delta}{2T_s} \in \left[\frac{\delta}{T_s}, \left(F - \frac{\pi}{4}\right) / T_s\right), \\ \text{sgn}(\dot{e}_{k+1}) = -\text{sgn}(e_k). \end{cases} \quad (20)$$

同时, 因为 $\text{sgn}(e_{k+1}) = \text{sgn}(e_k) = \text{sgn}(e_{k-1})$, 所以有 $\Delta e_{k+1} - \Delta e_k = (e_{k-1} - e_k)/2$, 因此

$$(\dot{e}_{k+1} - \dot{e}_k) \text{sgn}(e_k) = \frac{|e_{k-1}| - |e_k|}{2T_s} > 0. \quad (21)$$

结合式 (20) 可得, 当 $e_k > 0$ 时 $\dot{e}_k < \dot{e}_{k+1} < 0$; 当 $e_k < 0$ 时 $0 < \dot{e}_{k+1} < \dot{e}_k$, 即同样满足式 (19).

由式 (17)、(19) 和 (20) 可知, 跟踪误差收敛速率在 $[\delta/T_s, F/T_s]$ 区间内随 $|e_k|$ 降低而单调降低, 且变化方向与 e_k 的符号相反, 使得误差逐步接近零点. 变化速度上限受参数 F 限制, 以约束控制输入变化速度, 其下限值不为零, 能保证误差值在有限时间内到达零点. \square

3 重复控制器设计及其收敛性分析

为降低不确定系统 (1) 中干扰项 w_k 的影响, 在吸引律 (3) 中嵌入干扰抑制措施, 得到理想误差动态

$$e_{k+1}^* = \frac{P + PQ}{2} e_k + d_{k+1} - d_{k+1}^* - \left[\frac{Q}{2} \arctan(|e_k| - \lambda) + \frac{P(1-Q)\delta}{2} + Q\left(F - \frac{\pi}{4}\right) \right] \text{sgn}(e_k), \quad (22)$$

其中 $d_k = w_k - w_{k-N}$ 为相邻周期的扰动变化量, d_k^* 为 d_k 的估计. 为实现理想误差动态, 取离散重复控制器

$$u_k = u_{k-N} + z^{d-1} B^{-1} [r_{k+1} - y_{k+1-N} - e_{k+1}^* + zA(y_k - y_{k-N}) - d_{k+1}^*]. \quad (23)$$

其中: u_{k-N} 为控制输入的历史数据, r_{k+1} 通过给定指令获得, y_k 及其时延值可通过输出反馈得到. 采用式 (23) 得到的跟踪误差收敛行为取决于 (22), 不同的控制参数有不同的误差特性. 以下分析其误差收敛域.

因为 w_k 为有界扰动, 所以变化量 d_k 亦有界. 令 $d_l \leq d_k \leq d_u$, 采用中值估计, 即 $d_k^* = (d_u + d_l)/2$, 则 $|d_k^* - d_k| \leq \Delta = (d_u - d_l)/2$.

定理 4 若满足 $F > \Delta + \delta + 3\pi/8$, 则重复控制器 (23) 使得系统 (1) 的跟踪误差单调收敛, 且经过有限控制步后到达半径为 $\Delta_{\text{MDR}} = 2\Delta + \delta$ 的零点邻域内, 继而误差绝对值收敛直至穿越边界 $\Delta_{\text{AL}} = \max\{2\Delta - \delta, (2\Delta + \delta)/3\}$, 稳态误差带为半径为 $\Delta_{\text{SS}} = \max\{2\Delta - \delta, \Delta\}$ 的零点邻域.

证明 当 $e_k > 0$ 时, 欲使误差单调收敛, 要求 $0 \leq e_{k+1}^* < e_k$. 将式 (22) 中的 $d_{k+1} - d_{k+1}^*$ 分离出来, 并由其极限值 $\pm\Delta$ 替代, 则单调收敛的充分条件为满足如下不等式:

$$\begin{cases} e_{k+1} + \Delta < e_k, \\ e_{k+1} - \Delta \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

1) 设 $e_k \geq \lambda + 1$, 有 $\arctan(e_k - \lambda) \in [\pi/4, \pi/2)$.

将式 (3) 代入 (24), 解不等式得 $e_k \geq F + \Delta (F > \Delta + \pi/8)$. 又因为 $F \geq \Delta + \delta + 3\pi/8$, 所以 $F + \Delta \leq \lambda + 1$, 即跟踪误差在 $[\lambda + 1, \infty)$ 内单调收敛. 由式 (5) 知, 误差收敛步长不小于 $F - \pi/4$, 所以必定在有限控制步后到达 $e_k < \lambda + 1$.

2) 设 $\lambda \leq e_k < \lambda + 1$, 有 $\arctan(e_k - \lambda) \in [0, \pi/4)$, 解不等式 (24), 得 $e_k \geq F + \Delta - \pi/8 (F \geq \Delta + \pi/4)$. 又因为 $F \geq \Delta + \delta + 3\pi/8$, 所以 $F + \Delta - \pi/8 \leq \lambda$, 即跟踪误差在 $[\lambda, \lambda + 1)$ 内单调收敛. 同理, 由于误差收敛步长不小于 $F - \pi/4$, 所以必定在有限控制步后到达 $e_k < \lambda$.

3) 设 $\delta \leq e_k < \lambda$, 解不等式 (24), 得 $e_k \geq 2\Delta + \delta$, 即在 $[2\Delta + \delta, \lambda)$ 内, 跟踪误差单调收敛. 由式 (6) 可知, 误差收敛步长不小于 δ , 所以必定在有限控制步后到达 $e_k < 2\Delta + \delta$, 即误差单调收敛域为 $e_k > \Delta_{\text{MDR}} = 2\Delta + \delta$.

当 $0 < e_k < 2\Delta + \delta$ 时, 误差可能存在正负交替、穿越零线的绝对值收敛行为, 其充分必要条件为

$$\begin{cases} e_{k+1} + \Delta < e_k, \\ e_{k+1} - \Delta > -e_k. \end{cases} \quad (25)$$

将式 (3) 代入 (25) 并求解不等式, 得到误差绝对值收敛域为 $e_k > \Delta_{\text{AL}} = \max\{2\Delta - \delta, (2\Delta + \delta)/3\}$.

同理, 若满足 $F > \Delta + \delta + 3\pi/8$, 则当 $e_k < 0$ 时, 跟踪误差的单调收敛域为 $e_k < -\Delta_{\text{MDR}}$, 绝对值收敛域为 $e_k < -\Delta_{\text{AL}}$.

为给出稳态误差带边界 Δ_{SS} , 考虑理想切换动态方程 (22), 当 $|e_k| \geq \Delta_{\text{AL}}$ 时, 跟踪误差绝对值必定收敛, 即 $|e_{k+1}^*| < |e_k|$; 当 $|e_k| < \Delta_{\text{AL}}$ 时, 下一时刻的 $|e_{k+1}^*|$ 有可能增大并越过边界 Δ_{AL} , 因此可通过求 $|e_k| < \Delta_{\text{AL}}$ 时 $|e_{k+1}^*|$ 的极大值得到稳态误差边界 Δ_{SS} .

当 $\Delta < \delta$ 时, $\Delta_{\text{AL}} = (2\Delta + \delta)/3 < \delta$, 所以对于任意 $|e_k| < \Delta_{\text{AL}}$, $e_{k+1}^* = d_{k+1} - d_{k+1}^* \in [-\Delta, \Delta]$.

当 $\Delta \geq \delta$ 时, $\Delta_{\text{AL}} = 2\Delta - \delta \geq \delta$, 所以对于任意 $|e_k| < \delta$, 根据式 (22) 有 $e_{k+1}^* = d_{k+1} - d_{k+1}^* \in [-\Delta, \Delta]$; 对于任意 $\delta \leq e_k < \Delta_{\text{AL}}$, 根据式 (22) 有

$$e_{k+1}^* = \frac{e_k}{2} - \frac{\delta}{2} + d_{k+1} - d_{k+1}^* \in [-\Delta, 2\Delta - \delta]. \quad (26)$$

同理, 当 $-\Delta_{\text{AL}} < e_k \leq -\delta$ 时, $e_{k+1}^* \in (\delta - 2\Delta, \delta]$.

总结上述两种情况, 系统 (1) 的稳态误差带边界为 $\pm\Delta_{\text{SS}}$, 其中 $\Delta_{\text{SS}} = \max\{2\Delta - \delta, \Delta\}$. \square

注 2 参数 F 用于约束控制输入量, 但并非越小越好. 因为 F 过小意味着误差收敛步长小, 当 Δ 较大时, 在误差收敛过程中可能存在较大回调, 若不满足 $F > \Delta + \delta + 3\pi/8$, 则收敛过程有可能失去单调性,

影响系统动态.

注 3 对于定位问题,可理解为 $N = 1$ 的跟踪问题,从而得到反馈控制器

$$u_k = u_{k-1} + z^{d-1} B^{-1} [r_{k+1} - y_k - e_{k+1}^* + zA(y_k - y_{k-1}) - d_{k+1}^*]. \quad (27)$$

因此,上述推导的用于刻画跟踪误差动态性能和控制输入量的结论同样适用于定位控制.二者在性能上的主要区别在于重复控制器(23)侧重于周期扰动的抑制,而控制器(27)则侧重于常值扰动的抑制.特别地,对于慢变周期扰动,由于 $|w_k - w_{k-1}|$ 较小,利用控制器(27)尽管无法完全消除,但有比较好的抑制效果.

4 数值仿真与实验结果

本节以伺服电机的转角位置跟踪为研究对象,选用 DSP 作为控制器,与 Basson 驱动器以及韩国 LS 交流伺服电机 APM-SB01AGN 构成三环控制系统.增量式光栅编码器反馈转角位置信息,分辨率为 0.015° .电流环与速度环采用 PI 控制,由驱动器实现,位置环由 DSP 根据本文控制器编程实现.

以定常系统作为驱动器和电机本体的数学模型,采用最小二乘辨识法得到伺服对象的二阶离散系统^[11]

$$y_{k+1} + a_1 y_k + a_2 y_{k-1} = b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + w_k. \quad (28)$$

其中: $d = 1$, $a_1 = -0.5385$, $a_2 = 0.2504$, $b_1 = 0.3606$, $b_2 = 0.2358$, 干扰项 w_k 代表各种未建模特性.系统(28)作为系统(1)的差分方程形式,可直接应用本文控制器进行仿真.仿真时取频率 $f = 0.25 \text{ Hz}$, 参考指令 $r_k = 6\pi \cos(2\pi f T_s k)$, 采样周期 $T_s = 5 \text{ ms}$.

4.1 仿真结果

为验证控制性能,首先在不考虑干扰项 w_k 的情况下对系统(28)进行仿真.取控制参数 $F = 3$, $\delta = 0.3$.分别选用形同文献[9]的指数吸引律、文献[13]的双幂次吸引律和本文吸引律(3),采用重复控制器(23)作用于系统(28),得到跟踪误差收敛曲线和控制输入量及其变化速度曲线如图1所示.其中指数吸引律中的 ρ 取 0.05 , ε 取 0.8 , 双幂次吸引律中的 α 取 0.5 , β 取 1.5 , k_α 和 k_β 均为 0.1 .图1中点线对应指数吸引律,点划线对应双幂次吸引律,实线对应本文吸引律.

因存在一周期的延时环节,重复控制器(23)需要前一周期的历史数据生成新的控制量.因为在第1周期实际控制输入为零,所以本文从第2周期开始介入发挥作用.反映在图1(a)中表现为跟踪误差从第2周期开始收敛.由图1(b)可见:利用指数吸引律,系统存在稳态抖振;双幂次吸引律在误差小于1时通过降低收敛速度来达到消除抖振的目的;对比前二者,利用吸引律(3)实现的跟踪误差单调收敛,在误差值较大

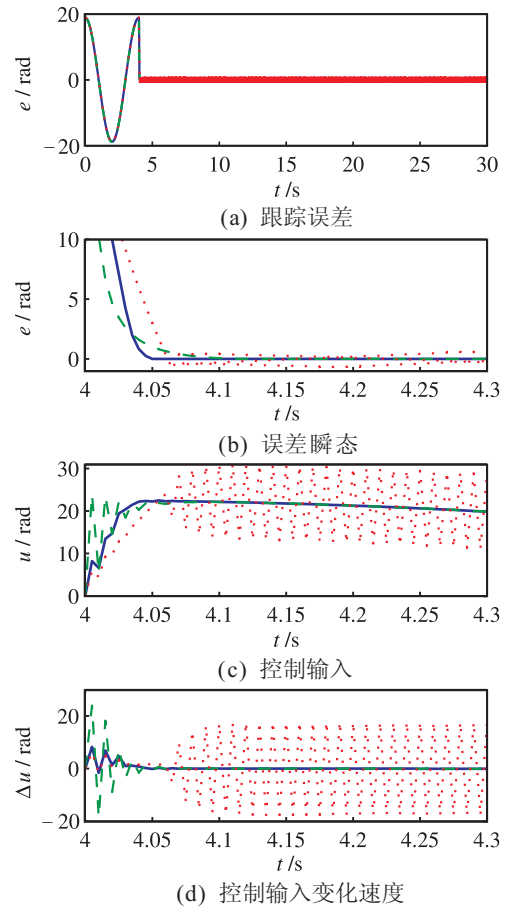


图1 跟踪误差与控制输入对比

时收敛速度比不上双幂次吸引律,但在误差值较小时仍能快速收敛,且稳态无抖振,实现了在有限时间内对参考指令的平滑逼近.

图1(c)和图1(d)从有控制输入的第2周期开始对比了根据3种吸引律得到的控制输入量和变化速度.可以看出:采用指数等速吸引律,控制输入及其变化速度在初始阶段比较平滑,但是到稳态阶段后存在因误差引起的抖振;双幂次吸引律和本文吸引律(3)对应的控制输入及其变化速度均随着误差的收敛越来越平滑,前者在初始阶段存在急剧波动,后者受参数 F 限制,在初始阶段的波动明显较小,有利于实际执行器的运行.

考虑干扰项 w_k 时,由于部分未知噪声的影响,系统(28)的稳态误差实际上不可能收敛到并保持为零.本文令系统扰动由3次和5次谐波干扰、常值干扰和准随机干扰3部分叠加构成,表达式为

$$w_k = \frac{1}{2} \sin\left(6\pi f T_s k + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(10\pi f T_s k + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{5} + (-1)^{\lceil k/310 - k/70 \rceil} \text{sgn}[\text{mod}(k, 50) - 25]. \quad (29)$$

其中准随机干扰代表未知噪声,由此得到扰动变化量 d_k 的界 $\Delta = 2$.取变化速度限制参数 $F = 6$, $\delta = 1.5 < \Delta$, 得到 $\Delta_{\text{MDR}} = 5.5$, $\Delta_{\text{SS}} = 2.5$, 仿真结果

如图 2(a) 所示; 取 $\delta = 2.5 > \Delta$, 得到 $\Delta_{MDR} = 6.5$, $\Delta_{SS} = 2$, 仿真结果如图 2(b) 所示. 由图 2 可见: 从第 2 周期开始, 当 $|e_k| > \Delta_{MDR}$ 时, 跟踪误差单调收敛; 在不同 Δ 取值的两种情形下, 稳态误差都分布在半径为 Δ_{SS} 的零点邻域内, 符合定理 4 所述. 因为干扰模型中的 3 次、5 次谐波和常值部分都具有 N 采样点的周期性, 在 d_k 中得到消除, 稳态误差取决于中值为零的准随机干扰, 所以图 2 中的稳态误差曲线具有零中值和非周期特性.

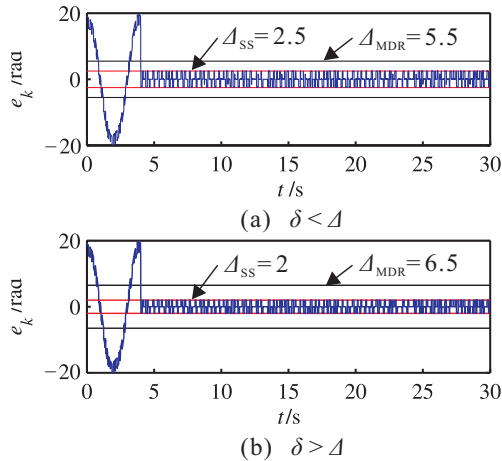


图 2 两种情形下的跟踪误差

注 4 为验证稳态误差带边界, 这里考虑最差情况, 即构造取值为 ± 1 的二值准随机干扰, 从而得到的相邻周期扰动变化量 d_k 能够频繁地等于其上界 Δ . 实际系统随机干扰往往不满足二值特性, 对应的 d_k 大多小于 Δ , 所以稳态误差不可能如图 2 所示布满整个误差带.

4.2 实验结果

实验中, 给定转角位置 $r_k = 135 \sin(2\pi f T_s k)$ deg, 频率与采样周期取值同仿真, 参数 $F = 300$, $\delta = 0.0075$. 采用基于理想误差动态 (22) 的反馈控制器 (27), 得到扰动变化量 d 、位置跟踪误差 e 如图 3 所

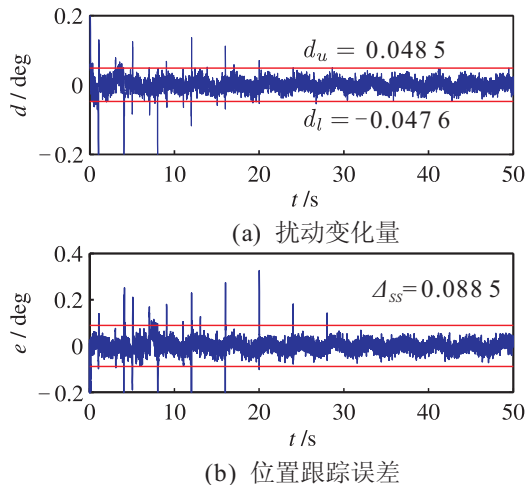


图 3 控制器 (27) 的跟踪性能

示. 取 30s 之后的数据作为稳态量, 得到其上、下界, 所以有 $\Delta = (d_u - d_l)/2 = 0.0481$. 由定理 4 可得 $\Delta_{MDR} = 0.1036$, $\Delta_{AL} = \Delta_{SS} = 0.0885$. 由图 3 可知, 误差稳态值 (30s 之后) 均分布在 $\pm \Delta_{SS}$ 之间, 计算得到其均方根误差为 0.0208.

采用重复控制器 (23), 得到扰动变化量 d 、跟踪误差 e 如图 4 所示. 第 1 周期因控制器未介入, 实际误差从第 2 周期开始收敛. 同样取 30s 之后的数据作为稳态量, 得到其上、下界, 所以有 $\Delta = (d_u - d_l)/2 = 0.033$. 从而得到 $\Delta_{MDR} = 0.073$, $\Delta_{AL} = \Delta_{SS} = 0.0584$. 由图 4 可见, 跟踪误差稳态值 (30s 之后) 均分布在 $\pm \Delta_{SS}$ 之间, 计算得到其均方根误差为 0.0132.

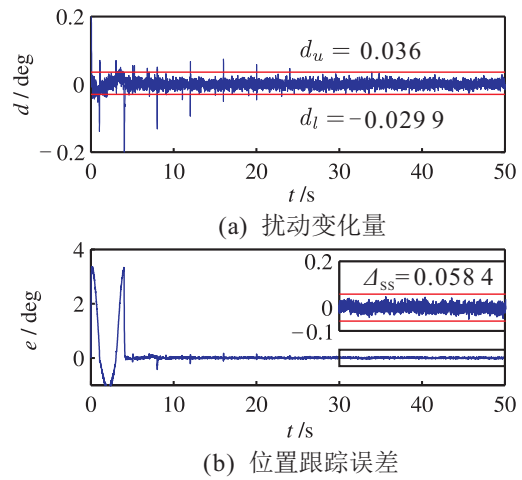


图 4 控制器 (23) 的跟踪性能

比较图 3 和图 4, 利用反馈控制器 (27), 系统稳态误差存在与参考指令同频率 (0.25 Hz) 的周期性; 而利用重复控制器 (23) 得到的稳态误差无明显周期性, 具有更好的统计特性.

5 结 论

本文通过设计一种变速吸引律, 并嵌入扰动抑制措施形成理想误差动态, 进而得到离散重复控制器, 用于解决周期跟踪问题. 所提出的吸引律具有单调收敛性、有限时间可达性, 而且可以通过调整参数 F 来控制输入量的变化速率与变化量, 以适应实际系统执行器. 本文推导了跟踪误差收敛控制步, 给出了有界扰动下的跟踪误差收敛域和稳态误差带宽. 数值仿真与伺服电机位置跟踪实验结果表明, 所提出的控制器使得控制输入变化平滑, 变化速度可控, 且能有效抑制周期扰动.

参考文献 (References)

[1] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, et al. Repetitive control system: A new type servo system for periodical exogenous signals[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(7): 659-668.

- [2] Tomizuka M, Tsao T, Chew K. Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers[J]. *ASME J of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1989, 111(3): 353-358.
- [3] Francis B A, Wonham W M. The internal model principle for linear multi-variable regulators[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1975, 2(2): 170-194.
- [4] Inoue T, Iwai S, Nakano M. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply[C]. *Proc of the 8th IFAC World Congress*. Oxford: Pergamon Press, 1981: 3137-3142.
- [5] 李翠艳, 张东纯, 庄显义. 重复控制综述[J]. *电机与控制学报*, 2005, 9(1): 37-44.
(Li C Y, Zhang D C, Zhuang X Y. Repetitive control-a survey[J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(1): 37-44.)
- [6] Zhou K L, Wang D W, Zhang B, et al. Plug-in dual-mode-structure repetitive controller for CVCF PWM inverters[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 784-791.
- [7] Zhang B, Zhou K L, Wang D W. Multirate repetitive controller for PWM DC/AC converters[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2014, 61(6): 2883-2890.
- [8] 贾要勤, 朱明琳, 凤勇. 基于状态反馈的单相电压型逆变器重复控制[J]. *电工技术学报*, 2014, 29(6): 57-63.
(Jia Y Q, Zhu M L, Feng Y. State feedback based repetitive control for single-phase inverter[J]. *Trans on China Electrotechnical Society*, 2014, 29(6): 57-63.)
- [9] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117-122.
- [10] 宋立新, 李槐树, 姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(3): 525-528.
(Song L X, Li H S, Yao Q H. Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 525-528.)
- [11] 刘涛, 刘贺平. 一种基于死区离散趋近律的准滑模控制[J]. *自动化学报*, 2011, 37(6): 760-766.
(Liu T, Liu H P. Quasi-sliding-mode control based on discrete reaching law with dead zone[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(6): 760-766.)
- [12] 刘希, 孙秀霞, 董文瀚, 等. 无抖振离散滑模趋近律[J]. *控制与决策*, 2013, 28(8): 1277-1280.
(Liu X, Sun X X, Dong W H, et al. Chattering-free trending law for discrete-time sliding mode control[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(8): 1277-1280.)
- [13] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. *控制与决策*, 2013, 28(2): 289-293.
(Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(2): 289-293.)
- [14] Qu S C, Xia X H, Zhang J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2014, 61(7): 3502-3510.
- [15] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律[J]. *自动化学报*, 2011, 37(10): 1213-1221.
(Sun M X, Fan W Y, Wang H. Discrete sliding mode repetitive control with novel reaching law[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(10): 1213-1221.)
- [16] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(12): 1771-1778.
(Sun M X, Xu L D, Wu L W. Ideal-error-dynamics approach for repetitive control of discrete-time systems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(12): 1771-1778.)

(责任编辑: 孙艺红)