文章编号: 1001-0920 (2016) 09-1720-03 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0941

线性控制系统多面体区域的生存性判别

高 岩

(上海理工大学 管理学院，上海 200093)

摘 要: 利用非光滑分析, 讨论线性控制系统多面体区域的生存性判别. 对于有界多面体 (利用有限点集的凸包来表示), 其生存性判别只需检验其在极点处是否满足生存性条件, 去掉了以往对输入集合为多面体的要求, 这种生存性判别方法简便易行. 最后利用所给出的生存性条件讨论了生存性设计.

关键词: 线性控制系统；生存性；多面体；非光滑分析

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Determining viability of polytopic set for linear control system

GAO Yan

(School of Management，University of Shanghai for Science and Technology，Shanghai 200093，China. E-mail: gaoyan@usst.edu.cn)

Abstract: A viability criterion of a polytopic set for a linear control system is discussed by using nonsmooth analysis. It is shown that, determining the viability of a polytopic set, which is expressed by a convex hull of a finitely many points, can be transformed into verifying the viability criteria at vertices without the assumption that the input set is an polytope, which is needed in existing criteria. This method of determining the viability is easy to be complemented. Finally, the viable design is discussed by using the proposed viability criterion.

Keywords: linear control system；viability；polytope；nonsmooth analysis

0 引 言

生存性是控制系统中的一项重要研究内容. 在理论方面, 控制系统中的很多问题都可以转化为生存性来研究, 例如系统的可达性 (可控性)、李雅普诺夫稳定性等[1-2]. 在应用方面, 系统的安全域设计以及车辆、机器人、潜艇、航空器的导航避障都可通过生存性设计来实现[3-4]. 关于系统生存性的研究主要集中在以下几方面: 给定一个区域判断其生存性; 对给定的生存域设计一个生存解; 对非生存域计算其生存核, 即计算到其包含的最大生存域.

关于线性系统生存性讨论主要有两种方法: 1) 利用矩阵不等式讨论椭球生存域; 2) 利用线性不等式或非光滑分析判别多面体生存域[4-5]. 多面体可以逼近任意区域, 因此多面体生存域较椭球生存域更有实用价值. 在生存性判别方面, 多面体的生存性判别可转化为其极点的生存性判别, 不需要考虑所有边界点, 这使得判别方法简单实用. 然而, 以往的线性系统多面体生存域讨论中都假设控制集合是多面体[2,5-6], 在一定程度上限制了方法的应用范围. 本文在去掉这个假设下得到相同的生存性判别方法, 使系统的应用面更加广泛.

1 预备知识

考虑下述控制系统:

$$\dot{x}(t)=f(x,u). \tag{1}$$

其中: $f(x,u)$ 为 $\boldsymbol{R}^{m+n}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lipschitz 函数, $x\in\boldsymbol{R}^n$ 为状态变量, $u\in U$ 为控制变量, $U\subset\boldsymbol{R}^m$.

定义 1[1] 设 $D\subset\boldsymbol{R}^n$, 如果对于任意初始状态 $x_0\in D$, 存在系统 (1) 的解 $x(t)=x(x_0,t,u)$, 使得 $x(t)\in D$, $\forall t\geqslant 0$, 则称控制系统 (1) 关于区域 D 是生存的, D 称为控制系统 (1) 的生存域, 解 $x(t)$ 称为控制系统 (1) 的一个生存解.

定义 2[1-2] 设 $S\subset\boldsymbol{R}^n$ 非空, 集合 S 在点 $x\in S$ 的切锥定义如下:

$$T_S(x)=\Big\{h\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\liminf_{t\to 0^+}\frac{d_S(x+th)}{t}=0\Big\},$$

其中 $d_S(y)$ 为点 $y\in\boldsymbol{R}^n$ 到 S 的距离.

收稿日期: 2015-07-22；**修回日期:** 2015-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11171221)；教育部博士点基金项目(20123120110004).

作者简介: 高岩(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统控制、非光滑优化等研究.

定理 1[1]　闭集 $D\subset \boldsymbol{R}^n$ 关于系统 (1) 是生存的充要条件是

$$T_D(x)\bigcap\Big(\bigcup_{u\in U} f(x,u)\Big)=\varnothing,\ \forall x\in D. \tag{2}$$

由切锥的定义可见, 当 x 为集合 D 的内点时, $T_D(x)=\boldsymbol{R}^n$, 此时式 (2) 总成立, 于是判别式 (2) 是否成立, 只需考虑 D 的边界点.

设 $a_1,\cdots,a_m\in\boldsymbol{R}^n,\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, 称点 $a=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_i$ 为 $a_1,\cdots,a_m$ 的一个凸组合[2].

集合 S 的凸包, 记为 $\mathrm{co}S$, 是由 S 中的所有凸组合形成的集合, 换言之, $a\in\mathrm{co}S$ 当且仅当 a 可表示为 $a=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i a_i$, 其中 k 为一正整数, $a_i\in S,\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$[2].

点集 $\{a_1,\cdots,a_m\}$, 其中 $a_i\in\boldsymbol{R}^n\,(i=1,2,\cdots,m)$ 的凸包 $\mathrm{co}\{a_1,\cdots,a_m\}$ 可表示为

$$\mathrm{co}\{a_1,\cdots,a_m\}=\Big\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i\Big|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m\Big\}. \tag{3}$$

$\boldsymbol{R}^n$ 空间中的有界凸多面体都可表示为式 (3) 的形式, 这里的 $a_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 在几何上看是相应多面体的极点.

引理 1[1-2]　设 $S\subset\boldsymbol{R}^n$ 为凸多面体, 则 $d\in T_S(x)$ 的充要条件是存在常数 $\widetilde{t}>0$ 使得 $x+td\in S,\ \forall t\leqslant\widetilde{t}$.

2　生存性判别

考虑线性控制系统

$$\dot{x}(t)=Ax+Bu,\ x\in\boldsymbol{R}^n,\ u\in U. \tag{4}$$

其中: $U\subset\boldsymbol{R}^m$ 为凸集, A 和 B 为适当维数的矩阵, x 为状态变量, u 为输入变量.

下面讨论对于给定的一个凸多面体如何判别它是否为系统 (4) 的生存域.

定理 2　设 $W=\mathrm{co}\{w_1,\cdots,w_l\}$, 其中 $w_i\in\boldsymbol{R}^n, i=1,2,\cdots,l$, U 为凸集, 则 W 为系统 (4) 生存域的充要条件为

$$T_W(w_i)\bigcap\Big(\bigcup_{u\in U}(Aw_i+Bu)\Big)\neq\varnothing, i=1,2,\cdots,l. \tag{5}$$

证明　首先证明这样一个结论: 设 $\lambda_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,l)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i=1$, 如果 $d_i\in T_W(w_i),\ i=1,2,\cdots,l$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i d_i\in T_W\Big(\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i w_i\Big)$. W 是凸多面体, 根据引理 1, $d_i\in T_W(w_i),\ i=1,2,\cdots,l$, 必存在 $\widetilde{t_i}>0, i=1,2,\cdots,l$, 使得

$$w_i+t_i d_i\in W,\ \forall t_i<\widetilde{t_i},\ i=1,2,\cdots,l. \tag{6}$$

取 $\widetilde{t}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\widetilde{t_i}$, 由式 (6) 得

$$w_i+td_i\in W,\ \forall t<\widetilde{t},\ i=1,2,\cdots,l. \tag{7}$$

W 为凸集, 因此式 (7) 中 w_i+td_i 的凸组合也在 W 中, 即

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(w_i+td_i)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i w_i+t\Big(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i d_i\Big)\in W,\ \forall t<\widetilde{t}.$$

根据引理 1, $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i d_i\in T_W\Big(\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i w_i\Big)$.

根据定理 1, 定理 2 的必要性成立. 下面证明充分性, 即证明当式 (5) 成立时下述结论成立:

$$T_W(x)\bigcap\Big(\bigcup_{u\in U}(Ax+Bu)\Big)\neq\varnothing,\ \forall x\in W. \tag{8}$$

给定 $x\in W$, 则存在 $\lambda_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,l)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i=1$ 使得 x 可表示为 $x=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i w_i$. 由于式 (5) 成立, 必存在 $d_i\in T_W(w_i), u_i\in U,\ i=1,2,\cdots,l$, 使得

$$d_i=Aw_i+Bu_i,\ i=1,2,\cdots,l, \tag{9}$$

对式 (9) 两边关于 $\lambda_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,l)$ 加权求和得

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i d_i=A\sum_{i=1}^{l}\lambda_i w_i+B\sum_{i=1}^{l}\lambda_i u_i.$$

记 $d=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i d_i, u=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i u_i$, 根据前面证明的结论 $d\in T_W(x)$, 以及 U 的凸性 $u\in U$, 有 $d=Ax+Bu$, 这说明 $T_W(x)\bigcap\Big(\bigcup\limits_{u\in U}(Ax+Bu)\Big)\neq\varnothing$, 定理得证. □

与以往文献[2,6-7]相比, 定理 1 去掉了输入集合 U 为多面体的要求, 但对于无界多面体还没有得到相应的结论[6].

例 1　考虑 $\boldsymbol{R}^2$ 上的线性控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2(t)+2u_1\\ x_1(t)+u_2\end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中 $U=\{(u_1,u_2)\in\boldsymbol{R}^2|u_1^2+u_2^2\leqslant 1\}$, 如图 1 所示.

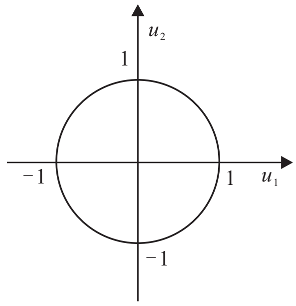

图 1　线性系统输入约束

根据定理2不难验证, 由点$(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$形成如图2 所示的凸包是线性控制系统(10)的生存域.

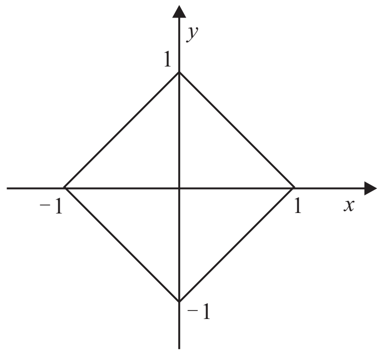

图 2 线性系统生存域

由定理2的证明可以看出, 判别多面体W的生存性只需要对每一个极点w_i验证$T_W(w_i)\bigcap\Big(\bigcup\limits_{u\in U}(Aw_i+Bu)\Big)\neq\varnothing$是否成立. 根据引理1及集合$W$的结构, $d\in T_W(w_i)$当且仅当存在$t>0,\lambda_j\geqslant 0$满足$\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j=1$, 使得$w_i+td=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j w_j$, 即$d=\dfrac{1}{t}\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j(w_j-w_i)$. 因此, $T_W(w_i)\bigcap\Big(\bigcup\limits_{u\in U}(Aw_i+Bu\Big)\neq\varnothing$等价于存在充分小的$t>0$使得下述系统有解:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{t}\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j(w_j-w_i)=Aw_i+Bu,\ u\in U;\\ \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j=1,\lambda_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,l.\end{cases}\tag{11}$$

其中$u,\lambda_j\,(j=1,2,\cdots,l)$为变量. 系统(11)等价于一个凸规划问题, 通常的凸规划方法可用来求解系统(11).

下面讨论生存性设计问题. 事实上, 系统(11)的解$\widetilde{u_i}$是线性控制系统(3)生存设计时在极点w_i处需要选取的控制变量. 对于一般的点$x\in W$, 将x表示为$x=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i w_i$, 其中$\lambda_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,l)$满足$\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i=1$, 则在系统(4)生存设计中, 选取控制变量$\widetilde{u}=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\widetilde{u_i}$. 为完成系统(4)在集合$W$上的生存性设计, 首先计算在极点处需要选取的控制变量, 对非极点x, 将其表示为$x=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i w_i$的形式, 这种表示可通过求解下述线性不等式组来实现:

$$x=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i w_i,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,l,\tag{12}$$

其中$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,l)$为变量. 不等式组(12)的求解可转化为求解线性规划问题.

3 结 论

本文在输入约束仅为凸性假设下建立了线性系统多面体区域生存性条件. 进一步利用此生存性条件给出了生存性设计的方法. 文中给出的方法简便易行, 可直接用于生存性判别及生存性设计.

参考文献(References)

[1] Aubin J P. Viability theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011: 1-72.

[2] 高岩. 非光滑优化[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 176-190.
(Gao Y. Nonsmooth optimization[M]. Beijing: Science Press, 2008: 176-190.)

[3] 刘磊, 高岩, 吴越鹏. 基于生存理论的非完整约束轮式机器人高速避障控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(9): 1623-1628.
(Liu L, Gao Y, Wu Y P. The high speed obstacle avoidance control of wheeled mobile robots with non-homonymic constraint base on viability theory[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1623-1628.)

[4] 崔军辉, 魏瑞轩, 张小倩. 无人机感知-规避系统安全区域动态决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(12): 2195-2200.
(Cui J H, Wei R X, Zhang X Q. Dynamic decision-making mothod for safety region of sense and avoid system for unmanned aerial vehicle[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 2195-2200.)

[5] Blanchini F. Set invariance in contro[J]. Automatica, 1999, 35(11): 1747-1767.

[6] Chen Z, Gao Y. Determining the viable unbounded polyhedron under linear control systems[J]. Asian J of Control, 2014, 16(5): 1561-1567.

[7] Gao Y. Viability criteria for differential inclusions[J]. J of Systems Science and Complexity, 2011, 24(5): 825-834.

(责任编辑：孙艺红)