

基于非对称 Lanczos 算法的线性分数阶系统模型降阶方法

高哲

(辽宁大学 轻型产业学院, 沈阳 110036)

摘要: 采用非对称 Lanczos 算法研究线性分数阶系统的模型降阶问题, 提出一种保持系统传递函数一定数量的分数阶矩的模型降阶方法. 根据 Caputo 导数的运算法则给出线性分数阶系统的分数阶矩的计算方法; 利用非对称 Lanczos 算法构造对应的非对称三对角矩阵; 根据非对称三对角矩阵的性质证明降阶系统与原系统具有相同的一定数量的分数阶矩; 给出降阶系统与原系统传递函数的误差估计, 为合理选择降阶系统的阶次提供理论依据. 数值实例的计算结果验证了所提出方法的有效性.

关键词: 分数阶系统; 模型降阶; 非对称 Lanczos 算法; Krylov 子空间; 误差估计

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Reduced order modeling method for linear fractional-order systems based on unsymmetric Lanczos algorithm

GAO Zhe

(College of Light Industry, Liaoning University, Shenyang 110036, China. E-mail: gaozhe83@gmail.com)

Abstract: The problem of reduced order modeling for linear fractional-order systems is investigated based on the unsymmetric Lanczos algorithm, and a reduced order modeling method is proposed to retain a certain number of fractional-order moments of transfer functions. According to the operation principle of Caputo derivative, the computing method of fractional-order moment of the linear fractional-order system is given. By using the unsymmetric Lanczos algorithm, the corresponding unsymmetric tridiagonal matrix is constructed. Based on the properties of the unsymmetric tridiagonal matrix, it is proved that the reduced order systems and the original systems have a certain number of fractional-order moments. Besides, the error estimation with respect to the the transfer functions between the reduced order system and the original system is given, providing the theoretical basis for choosing the order of the reduced order system. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: fractional-order systems; model order reduction; unsymmetric Lanczos algorithm; Krylov subspace; error estimation

0 引言

由于分数微积分具有记忆属性, 分数阶微积分为系统建模和控制器的设计提供了一种新途径, 因此分数阶系统分析和控制的研究引起了很多学者的广泛关注^[1-2]. 由分数阶微积分算子的运算规则可知, 相比于整数阶系统辨识方法, 分数阶辨识方法所得到的辨识模型可以更好地描述系统的动态特性^[3]. 虽然阶次较高的模型可以更好地表征系统特性, 但是为控制器的设计和系统的模拟仿真带来了困难, 因此研究分数阶系统模型降阶问题是十分必要的. 对于高阶分数阶线性系统, 通过模型降阶, 将被控系统的动态特性以

阶次较低分数阶系统表示. 根据低价分数阶系统的数学模型设计控制器, 可以简化控制器设计和控制参数整定的复杂程度, 因此模型降阶的计算精度也是影响控制效果的重要因素.

模型降阶方法中最重要的也是最基本的方法是 Krylov 子空间类的降阶方法. 这种方法利用构造的标准列正交向量基底对系统进行模型降阶, 并且已经解决了很多复杂高阶整数阶系统模型降阶的问题^[4-5], 其中基于 Arnoldi 算法的模型降阶方法是 Krylov 子空间类的降阶方法的最典型算法^[6]. 利用 Arnoldi 模型降阶方法得到的 r 阶降阶模型的传递函数和原系统

收稿日期: 2015-08-05; 修回日期: 2016-02-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304094); 辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2015194).

作者简介: 高哲(1983-), 男, 副教授, 博士, 从事分数阶系统辨识、稳定性及其控制等研究.

的传递函数具有相同的第 0 阶矩到第 $r-1$ 阶矩^[7]. 相比于 Arnoldi 算法, 基于 Lanczos 算法计算得出的 r 阶降阶模型的传递函数具有与原系统传递函数相同的前 $2r$ 阶矩, 也就是说减小了降阶模型与原系统的降阶误差^[8].

文献 [9] 提出了分数阶系统的基于 Arnoldi 算法的模型降阶方法, 研究了 Arnoldi 算法对分数阶矩的影响, 并且给出了降阶系统与原系统的估计误差. 为了进一步使降阶系统和原系统匹配更多的分数阶矩, 本文研究基于非对称 Lanczos 算法的线性分数阶系统模型降阶问题. 首先, 利用 Caputo 导数的运算法则给出分数阶矩的计算方法; 然后, 利用非对称 Lanczos 算法得出线性分数阶系统降阶模型及其对应的各个参数矩阵; 最后, 分析基于非对称 Lanczos 算法得到的降阶模型的传递函数与原系统传递函数的分数阶矩之间的关系, 以及模型估计误差. 相比于 Arnoldi 模型降阶方法, 本文研究的算法所得到的降阶模型能够匹配原系统更多的分数阶矩.

1 预备知识

本文研究基于 Caputo 定义的线性分数阶系统模型降阶问题. 函数 $f(t)$ 的 α 阶 Caputo 导数的定义如下^[10]:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau. \quad (1)$$

其中: $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数; $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbf{N}$, D^α 为 α 阶 Caputo 求导运算, \mathbf{N} 为自然数集.

设 $f(0)$ 为函数 $f(t)$ 的初始值, $F(s)$ 为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换, 则函数 $f(t)$ 的 Caputo 导数的 Laplace 变为

$$s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

因此, 对于零初始条件, 函数 $f(t)$ 的 Caputo 导数对应 Laplace 变换为 $s^\alpha F(s)$. 本文利用非对称 Lanczos 算法研究基于 Caputo 导数的模型降阶方法, 下面简单介绍非对称 Lanczos 算法.

定义 1 一个 r 维的 Krylov 子空间是以矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $b \in \mathbf{R}^n$ 生成的向量空间

$$K_r(M; d) = \text{span}\{d, Md, M^2d, \dots, M^{r-1}d\}.$$

其中: \mathbf{R}^n 为 n 维实数列向量集, $\mathbf{R}^{n \times n}$ 为 n 行 n 列构成的实矩阵集.

非对称 Lanczos 算法是研究如何构造矩阵 $W, V \in \mathbf{R}^{n \times r}$, 使得

$$W^T V = I_r,$$

其中 I_r 为 r 维数的单位矩阵. $T = W^T M V$ 为非对称三对角矩阵, 记

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_r],$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_r],$$

以及

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \rho_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{r-1} & \beta_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_r & \alpha_r \end{bmatrix}.$$

算法 1^[11] 非对称 Lanczos 算法.

Step 1: 给定矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和向量 $p, q \in \mathbf{R}^n$, 初始化

$$v_1 = p/\rho_1, w_1 = q/\beta_1, v_0 = w_0 = 0,$$

$$\omega_1 = \langle p, q \rangle \neq 0, \rho_1 = \sqrt{|\omega_1|}, \beta_1 = \text{sign}(\omega_1)\rho_1.$$

其中: $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积运算.

Step 2: 对于 $i = 2, 3, \dots, r$, 计算

$$\alpha_{i-1} = w_{i-1}^T M v_{i-1},$$

$$\hat{v}_i = M v_{i-1} - \beta_{i-1} v_{i-2} - \alpha_{i-1} v_{i-1},$$

$$\hat{w}_i = M^T w_{i-1} - \rho_{i-1} w_{i-2} - \alpha_{i-1} w_{i-1},$$

$$\omega_i = \langle \hat{v}_i, \hat{w}_i \rangle.$$

Step 3: 如果 $\omega_i \neq 0$, 则计算

$$\rho_i = \sqrt{|\omega_i|}, \beta_i = \text{sign}(\omega_i),$$

$$v_i = \hat{v}_i/\rho_i, w_i = \hat{w}_i/\beta_i,$$

置 $i = i + 1$, 跳转到 **Step 2**; 否则, 算法终止.

非对称 Lanczos 算法具有下面的性质.

性质 1 1) $MV = VT + [0, 0, \dots, 0, \hat{v}_{r+1}]$;

2) $M^T W = WT^T + [0, 0, \dots, 0, \hat{w}_{r+1}]$.

性质 2 矩阵 V, W 的列向量分别是 Krylov 子空间 $K_r(M; p)$ 和 $K_r(M^T; q)$ 的一组基.

2 线性分数阶系统的模型降阶

2.1 线性分数阶系统传递函数的矩计算

对于同元阶次 α , 满足 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶系统

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = c^T x(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $E, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b, c \in \mathbf{R}^n$, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统 (2) 的状态; $u(t), y(t) \in \mathbf{R}$ 分别为系统 (2) 的输入和输出; D^α 为 α 阶 Caputo 导数.

线性分数阶系统 (2) 的传递函数为

$$F(s) = c^T (s^\alpha E - A)^{-1} b.$$

考虑到

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k,$$

其中 I_n 为 n 维单位矩阵, 则传递函数 $F(s)$ 等价于

$$\begin{aligned}
F(s) &= c^T (s^\alpha E - A)^{-1} b = \\
&= -c^T (I_n - s^\alpha A^{-1} E)^{-1} A^{-1} b = \\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty} c^T A^{-k} E^k A^{-1} b s^{\alpha k}. \quad (3)
\end{aligned}$$

根据 Caputo 导数的定义, 函数 t^γ ($\gamma > 0$) 的 α 阶导数为

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad (4)$$

则传递函数 $F(s)$ 的 $i\alpha$ 阶导数为

$$\begin{aligned}
\underbrace{D^\alpha \cdots D^\alpha}_{i} F(s) &= \\
&= -\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1-i\alpha)} c^T A^{-k} E^k A^{-1} b s^{\alpha(k-i)}. \quad (5)
\end{aligned}$$

因此, 传递函数 $F(s)$ 在 $s = s_0 = 0$ 处的第 $i\alpha$ 阶矩为

$$m_{i\alpha} = -c^T A^{-i} E^i A^{-1} b. \quad (6)$$

2.2 基于非对称 Lanczos 算法的降阶系统矩性质

将系统(2)的状态方程两边都乘以 A^{-1} , 可得

$$\begin{cases} A^{-1} E D^\alpha x(t) = x(t) + A^{-1} b u(t), \\ y(t) = c^T x(t). \end{cases} \quad (7)$$

定义矩阵 $\tilde{E} = A^{-1} E$ 和 $\tilde{b} = A^{-1} b$, 则系统(7)可以表示为

$$\begin{cases} \tilde{E} D^\alpha x(t) = x(t) + \tilde{b} u(t), \\ y(t) = c^T x(t). \end{cases} \quad (8)$$

根据非对称 Lanczos 算法中矩阵 W 和 V 的性质 $W^T V = I_r$, 令 $x(t) = V \tilde{x}(t)$, 系统(7)的状态方程两边都乘以 W^T , 则可以得到 $r\alpha$ 阶降阶分数阶系统如下:

$$\begin{cases} W^T \tilde{E} V D^\alpha \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) + W^T \tilde{b} u(t), \\ y(t) = c^T V \tilde{x}(t). \end{cases} \quad (9)$$

其中: $W, V \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $\tilde{x}(t) \in \mathbf{R}^r$, $r < n$.

考虑到 $W^T \tilde{E} V = T \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 为非对称三对角矩阵, 则系统(9)可以表示为

$$\begin{cases} T D^\alpha \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) + W^T \tilde{b} u(t), \\ y(t) = c^T V \tilde{x}(t). \end{cases} \quad (10)$$

也就是

$$\begin{cases} D^\alpha \tilde{x}(t) = \bar{A} \tilde{x}(t) + \bar{b} u(t), \\ y(t) = \bar{c}^T \tilde{x}(t). \end{cases} \quad (11)$$

其中: $\bar{A} = T^{-1}$, $\bar{b} = T^{-1} W^T A^{-1} b$, $\bar{c} = V^T c$.

令非对称 Lanczos 算法的矩阵 $M = \tilde{E}$, 向量 $p = -\tilde{b}$, $q = c$. 这样, 系统(2)就可以通过非对称 Lanczos 算法得到一个维数较低的分阶系统(10). 根据系统(10)的状态空间模型, 降阶系统的传递函数可以表示为

$$\tilde{F}(s) = c^T V (s^\alpha T - I_r)^{-1} W^T \tilde{b}.$$

定义向量

$$e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^r,$$

$$e_r = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbf{R}^r,$$

则下面的定理给出了降阶系统和原系统矩的关系.

定理 1 降阶系统(10)的传递函数匹配原系统(2)的传递函数的前 $2r\alpha$ 阶矩.

证明 考虑到

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\tilde{b}/\rho_1, \quad w_1 = c/\beta_1, \\
\beta_1 \rho_1 &= -c^T \tilde{b}, \quad W^T V = I_r,
\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(s) &= c^T V (s^\alpha T - I_r)^{-1} W^T \tilde{b} = \\
&= -\beta_1 \rho_1 e_1^T W^T V (s^\alpha T - I_r)^{-1} W^T V e_1 = \\
&= -\beta_1 \rho_1 e_1^T (s^\alpha T - I_r)^{-1} e_1 = \\
&= c^T \tilde{b} e_1^T (s^\alpha T - I_r)^{-1} e_1 = \\
&= -c^T \tilde{b} e_1^T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} s^{\alpha k} T^k \right) e_1. \quad (12)
\end{aligned}$$

根据分数阶求导式(5), 可得

$$\begin{aligned}
\underbrace{D^\alpha \cdots D^\alpha}_{i} \tilde{F}(s) &= \\
&= -\sum_{k=i}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1-i\alpha)} \right] c^T \tilde{b} e_1^T T^k e_1 s^{\alpha(k-i)},
\end{aligned}$$

则降阶系统的传递函数在 $s = s_0 = 0$ 处的第 $i\alpha$ 阶矩为 $\tilde{m}_{i\alpha} = -c^T \tilde{b} e_1^T T^k e_1$.

下面利用数学归纳法证明, 对应 $j = 0, 1, \dots, r-1$, 有等式 $\tilde{E}^j V e_1 = V T^j e_1$ 成立. 当 $j = 0$ 时, 等式显然成立; 当 $j = 1$ 时, 利用非对称 Lanczos 算法性质 1 的第 1 个等式, 可知 $\tilde{E} V = V T + \rho_{r+1} v_{r+1} e_r^T$ 成立, 也就是 $\tilde{E} V e_1 = V T e_1$.

假设当 $j = k$ ($k = 0, 1, \dots, r-2$) 时, 有 $\tilde{E}^k V e_1 = V T^k e_1$ 成立, 则当 $j = k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^{k+1} V e_1 &= \tilde{E} V T^k e_1 = \\
&= (V T + \rho_{r+1} v_{r+1} e_r^T) T^k e_1 = \\
&= V T^{k+1} e_1 + \rho_{r+1} v_{r+1} e_r^T T^k e_1
\end{aligned}$$

成立. 考虑到对于 $k = 0, 1, \dots, r-2$, 有 $e_r^T T^k e_1 = 0$ 成立, 因此 $\tilde{E}^{k+1} V e_1 = \tilde{E} V T^k e_1 = V T^{k+1} e_1$. 也就是说, 对于 $j = 0, 1, \dots, r-1$, 等式 $\tilde{E}^j V e_1 = V T^j e_1$ 成立.

根据上面得出的结果, 对于 $j = 0, 1, \dots, r-1$, 有

$$-\tilde{E}^j \tilde{b} = \rho_1 \tilde{E}^j V e_1 = \rho_1 V T^j e_1.$$

同理, 根据非对称 Lanczos 算法性质 1 的第 2 个等式, 对于 $j = 0, 1, \dots, r-1$, 可得

$$c^T \tilde{E}^j = \beta_1 e_1^T T^j W^T.$$

设 $i = i_1 + i_2$, 其中 $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, r-1$, 则当 $0 \leq i \leq 2r-2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{i\alpha} &= -c^T \tilde{b} e_1^T T^i e_1 = \beta_1 \rho_1 e_1^T T^{i_1} T^{i_2} e_1 = \\ &(\beta_1 e_1^T T^{i_1} W^T)(\rho_1 V T^{i_2} e_1) = (-c^T \tilde{E}^{i_1})(\tilde{E}^{i_2} \tilde{b}) = \\ &-c^T \tilde{E}^{i_1} \tilde{b} = -c^T A^{-i} E^i A^{-1} b = m_{i\alpha}. \end{aligned}$$

当 $i = 2r - 1$ 时, 有下面等式成立, 即

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{(2r-1)\alpha} &= -c^T \tilde{b} e_1^T T^{2r-1} e_1 = \beta_1 \rho_1 e_1^T T^{r-1} T^r e_1 = \\ &\beta_1 \rho_1 e_1^T T^{r-1} W^T (V T^r e_1 + [0, \dots, 0, \hat{v}_{r+1}] T^{r-1} e_1) = \\ &(\beta_1 e_1^T T^{r-1} W^T)(\rho_1 \tilde{E} V T^{r-1} e_1) = \\ &-(c^T \tilde{E}^{r-1}) \tilde{E} (\tilde{E}^{r-1} \tilde{b}) = -c^T \tilde{E}^{2r-1} \tilde{b} = \\ &m_{(2r-1)\alpha}. \end{aligned}$$

因此, 降阶系统(10)的传递函数与原系统(2)的传递函数具有相同的 $0, \alpha, \dots, (2r - 1)\alpha$ 阶矩. \square

2.3 模型估计误差

下面研究降阶系统(10)与原系统(2)传递函数的误差估计.

定理 2 设 $F(s)$ 和 $\tilde{F}(s)$ 分别是分数阶系统(2)和 $r\alpha$ 阶分数阶降阶系统(10)的传递函数, 则模型估计误差满足

$$|F(s) - \tilde{F}(s)| \leq N(s), \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} N(s) &= \\ &|c^T \tilde{b}| |s^{2r\alpha}| \frac{|\beta_2 \beta_3 \cdots \beta_r \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_r|}{|\det(I_r - s^\alpha T)|^2} \times \\ &\|\hat{w}_{r+1}^T\|_2 \|(I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1}\|_2 \|\hat{v}_{r+1}\|_2. \end{aligned}$$

证明 根据 $-\tilde{b} = v_1 \rho_1, c = w_1 \beta_1, w_1^T v_1 = 1, -c^T \tilde{b} = \beta_1 \rho_1$, 原系统(2)的传递函数可以表示为

$$F(s) = -c^T \tilde{b} w_1^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} v_1.$$

由性质 1 的第 2 个等式可知

$$W^T \tilde{E} = T W^T + e_r \hat{w}_{r+1}^T.$$

因此, $W^T (I_n - s^\alpha \tilde{E}) = (I_r - s^\alpha T) W^T - s^\alpha e_r \hat{w}_{r+1}^T$ 成立, 等价于

$$\begin{aligned} &(I_r - s^\alpha T)^{-1} W^T = \\ &W^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} - \\ &s^\alpha (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_r \hat{w}_{r+1}^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \end{aligned}$$

成立. 考虑到 $W^T V = I_r$, 则

$$\begin{aligned} &w_1^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1} = \\ &s^\alpha e_1^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_r \hat{w}_{r+1}^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1}. \quad (14) \end{aligned}$$

由性质 1 的第 1 个等式可知

$$\begin{aligned} &V (I_r - s^\alpha T)^{-1} = \\ &(I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} V - \\ &s^\alpha (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1} e_r^T (I_r - s^\alpha T)^{-1}, \end{aligned}$$

因此

$$w_1^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} v_1 - e_1^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_1 =$$

$$s^\alpha w_1^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1} e_r^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_1. \quad (15)$$

由式(14)和(15)的关系式, 可以得到估计误差

$$\begin{aligned} &F(s) - \tilde{F}(s) = \\ &-c^T \tilde{b} [w_1^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} v_1 - e_1^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_1] = \\ &-c^T \tilde{b} s^\alpha w_1^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1} e_r^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_1 = \\ &-c^T \tilde{b} s^{2\alpha} e_1^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_r \hat{w}_{r+1}^T \times \\ &(I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1} e_r^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_1. \quad (16) \end{aligned}$$

考虑到 T 为非对称三对角矩阵, 则有

$$\begin{aligned} &e_1^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_r = \frac{s^{(r-1)\alpha} \beta_2 \beta_3 \cdots \beta_r}{\det(I_r - s^\alpha T)}, \\ &e_r^T (I_r - s^\alpha T)^{-1} e_1 = \frac{s^{(r-1)\alpha} \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_r}{\det(I_r - s^\alpha T)}. \end{aligned}$$

进而可得

$$\begin{aligned} &F(s) - \tilde{F}(s) = \\ &-c^T \tilde{b} s^{2r\alpha} \frac{\beta_2 \beta_3 \cdots \beta_r \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_r}{\det(I_r - s^\alpha T)^2} \times \\ &\hat{w}_{r+1}^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1}. \quad (17) \end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned} &|F(s) - \tilde{F}(s)| = \\ &|c^T \tilde{b}| |s^{2r\alpha}| \frac{|\beta_2 \beta_3 \cdots \beta_r \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_r|}{|\det(I_r - s^\alpha T)|^2} \times \\ &|\hat{w}_{r+1}^T (I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1} \hat{v}_{r+1}|. \quad (18) \end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式可以进一步得到

$$\begin{aligned} &|F(s) - \tilde{F}(s)| \leq \\ &|c^T \tilde{b}| |s^{2r\alpha}| \frac{|\beta_2 \beta_3 \cdots \beta_r \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_r|}{|\det(I_r - s^\alpha T)|^2} \times \\ &\|\hat{w}_{r+1}^T\|_2 \|(I_n - s^\alpha \tilde{E})^{-1}\|_2 \|\hat{v}_{r+1}\|_2. \quad (19) \end{aligned}$$

由此, 定理 2 得证. \square

3 数值算例

考虑如下的线性分数阶系统:

$$\begin{cases} D^{0.5} x(t) = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = c^T x(t). \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 & 16 & 13 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -5 & -4 & 1 \\ 3 & 30 & 15 & 11 & 39 \\ 9 & 4 & 7 & 6 & 0 \\ -10 & -15 & 3 & -21 & -19 \\ -2 & -21 & -8 & -10 & -26 \\ -3 & -6 & 4 & -7 & -7 \\ 1 & -7 & -14 & 0 & -11 \\ 4 & 4 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 15 & 14 & 9 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 6 & -1 & 4 \\ 26 & 35 & 31 & 24 & 23 \\ 8 & 4 & 8 & 9 & 5 \\ \leftarrow -28 & -20 & -12 & -9 & 1 \\ -17 & -25 & -22 & -15 & -15 \\ -8 & -5 & -9 & -3 & 3 \\ -4 & -11 & -14 & -18 & -15 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & -14 \end{array} \right],$$

$$b^T = [2 \quad -3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 2 \quad -1],$$

$$c^T = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad -1].$$

由文献 [12] 提出的稳定性判定方法可知, 分数阶系统 (20) 是稳定的. 设 V_r 为 r 取不同数值时, 非对称 Lanczos 降阶算法计算的矩阵, 并且定义 $\bar{A}_r = T_r^{-1}$, $\bar{b}_r = T_r^{-1}W_r^T A^{-1}b$, $\bar{c} = V_r^T c$ 和 $\bar{F}_r(s)$ 分别是当 r 取不同数值时, 根据非对称 Lanczos 降阶方法得到的降阶系统的各个参数矩阵和对应的传递函数, 则当 $r = 5, 4, 3$ 时, 降阶系统的状态空间模型对应的矩阵如下:

$$\bar{A}_5 =$$

$$\begin{bmatrix} -1.1207 & 1.2936 & 2.5959 & 0.3745 & -0.1319 \\ -1.2936 & 0.5011 & 1.0056 & 0.1451 & -0.0511 \\ -2.5959 & 1.0056 & -11.3002 & -1.6302 & 0.5744 \\ -0.3745 & 0.1451 & -1.6302 & -3.2153 & 1.1329 \\ -0.1319 & 0.0511 & -0.5744 & -1.1329 & -4.2543 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_5^T = [3.4882 \quad 4.0262 \quad 8.0796 \quad 1.1656 \quad 0.4107],$$

$$\bar{c}_5^T = [3.1124 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} -1.1166 & 1.2920 & 2.6138 & 0.4096 \\ -1.2920 & 0.5005 & 1.0125 & 0.1587 \\ -2.6138 & 1.0125 & -11.3778 & -1.7832 \\ -0.4096 & 0.1587 & -1.7832 & -3.5170 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_4^T = [3.4754 \quad 4.0213 \quad 8.1350 \quad 1.2749],$$

$$\bar{c}_4^T = [3.1124 \quad 0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.1644 & 1.3105 & 2.4061 \\ -1.3105 & 0.5076 & 0.9320 \\ -2.4061 & 0.9320 & -10.4737 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_3^T = [3.6239 \quad 4.0788 \quad 7.4886],$$

$$\bar{c}_3^T = [3.1124 \quad 0 \quad 0].$$

当 $r = 3, 4, 5$ 时, 降阶系统的传递函数 $\tilde{F}_r(s)$ 如下:

$$\tilde{F}_5(s) =$$

$$(10.86s^2 + 281s^{1.5} + 1758s + 3812s^{0.5} + 1989)/(s^{2.5} + 19.39s^2 + 115.6s^{1.5} + 282.2s + 300.9s^{0.5} + 205.4),$$

$$\tilde{F}_4(s) =$$

$$\frac{10.82s^{1.5} + 239.7s + 795.5s^{0.5} + 467.6}{s^2 + 15.51s^{1.5} + 53.07s + 60.37s^{0.5} + 48.27},$$

$$\tilde{F}_3(s) = \frac{11.28s + 185.1s^{0.5} + 132.9}{s^{1.5} + 11.13s + 12.93s^{0.5} + 13.72}.$$

由检验可知, 当 $r = 3, 4, 5$ 时, 分数阶降阶系统也是稳定的. 可以验证分数阶降阶系统的传递函数 $\tilde{F}_r(s)$ 与原系统 (20) 的传递函数 $F(s)$ 具体相同的第 $0.5i$ ($i = 0, 1, \dots, 2r - 1$) 阶矩. 分数阶系统 (20) 的传递函数 $F(s)$ 和降阶系统的传递函数 $\tilde{F}_r(s)$ 对应的 Nyquist 曲线如图 1 所示.

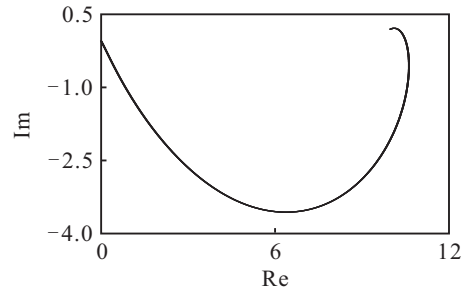


图 1 $r = 5, 4, 3$ 时, $F(s)$ 和 $\tilde{F}_r(s)$ 的 Nyquist 曲线

由图 1 的 Nyquist 曲线可知, 4 条 Nyquist 曲线在复平面上非常贴近, 降阶系统传递函数的 Nyquist 曲线能很好地拟合原系统传递函数的 Nyquist 曲线. 下面验证截断误差与误差估计是否满足定理 1 的结论. 当 $r = 5, 4, 3$ 时, 令 $s = j\omega$, 则原系统 (20) 与降阶系统的误差以及估计如图 2~图 4 所示.

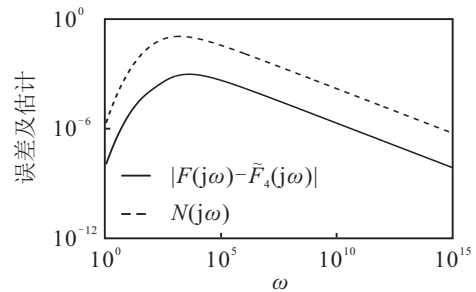


图 2 $r = 5$ 时的模型误差及估计

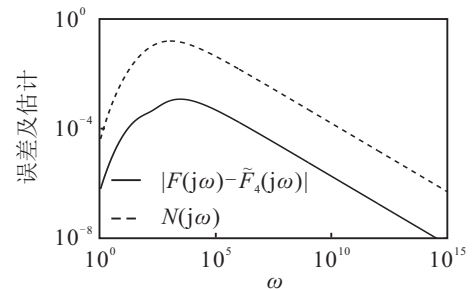


图 3 $r = 4$ 时的模型误差及估计

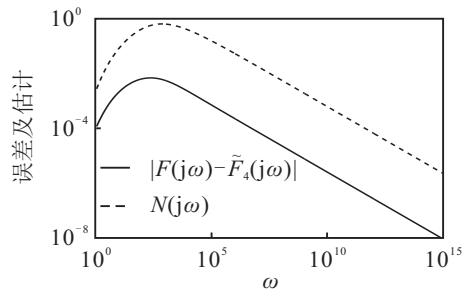


图4 $r = 3$ 时的模型误差及估计

由图2~图4可知,对于 r 取不同阶次的降阶系统,在双对数坐标系,原系统(20)与降阶系统的误差 $|F(j\omega) - \tilde{F}_r(j\omega)|$ 都小于等于误差估计 $N(j\omega)$.图2~图4的曲线进一步验证了定理2误差估计的有效性.

4 结论

本文针对线性分数阶系统的模型降阶问题,提出了基于非对称Lanczos算法的模型降阶方法,以提高模型匹配精度.给出了状态空间模型的线性分数阶系统的分数阶矩的计算方法,利用非对称Lanczos算法得到的非对称三对角矩阵的性质,提出了一种线性分数阶系统模型降阶计算方法.分析了原系统与误差系统传递函数之间的误差估计,并且给出了误差估计函数.数值算例的计算结果表明,基于本文提出的模型降阶方法提高了原系统和降阶系统的匹配分数阶矩的数量,有效地降低了原系统与降阶系统之间的模型匹配误差.在频域上,匹配误差都小于给定函数 $N(j\omega)$,仿真结果也验证了所提出的误差上界的正确性.

参考文献(References)

- [1] Magin R, Ortigueira M D, Podlubny I, et al. On the fractional signals and systems[J]. Signal Processing, 2011, 91(3): 350-371.
- [2] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.
(Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional-order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 161-169.)

- [3] Victor S, Malti, R, Garnier H, et al. Parameter and differentiation order estimation in fractional models[J]. Automatica, 2013, 49(4): 926-935.
- [4] Freund R W. Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2000, 123(1/2): 395-421.
- [5] Bai Z. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems[J]. Applied Numerical Mathematics, 2002, 43(1/2): 9-44.
- [6] Puri R S, Morrey D. A Krylov-Arnoldi reduced order modelling framework for efficient, fully coupled, structural-acoustic optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(4): 495-517.
- [7] Chen J H, Kang S M, Zou J, et al. Reduced-order modeling of weakly nonlinear MEMS devices with Taylor-series expansion and Arnoldi approach[J]. J of Microelectromechanical Systems, 2004, 13(3): 441-451.
- [8] Bai Z J, Slone R D, Smith W T. Error bound for reduced system model by Pade approximation via the Lanczos process[J]. IEEE Trans on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 1999, 18(2): 133-141.
- [9] Jiang Y L, Xiao Z H. Arnoldi-based model reduction for fractional order linear systems[J]. Int J of Systems Science, 2015, 46(8): 1411-1420.
- [10] Monje C A, Chen Y Q, Vignare B M, et al. Fractional-order systems and controls[M]. London: Springer-Verlag, 2010: 12-14.
- [11] Feldmann P, Freund R W. Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process[J]. IEEE Trans on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 1995, 14(5): 639-649.
- [12] Matignon D. Stability properties for generalized fractional differential system[C]. Proc of Fractional Differential Systems, Models, Methods and Applications. Paris, 1998: 145-158.

(责任编辑: 齐 霖)