

基于组合导航系统的非线性高斯滤波算法

王 硕¹, 宋申民¹, 于 浚², 史小平¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

摘 要: 由于组合导航系统具有强非线性和模型不确定性的特点, 工程中扩展卡尔曼滤波无法满足组合导航系统实际应用的要求. 为此, 针对贝叶斯框架下高斯类非线性滤波算法的估计性能给出具体分析. 首先, 在估计点处对非线性函数进行泰勒展开获得泰勒近似, 通过一阶矩和二阶矩分析滤波算法的近似精度; 然后, 通过数值稳定性对非线性滤波算法进行分析; 最后, 分别采用低维和高维模型对各滤波算法进行对比分析, 为组合导航系统的实践提供借鉴.

关键词: 非线性滤波; 组合导航; 高斯滤波; 数值稳定性

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

Gaussian non-linear filter algorithm based on integrated navigation system

WANG Shuo¹, SONG Shen-min¹, YU Han², SHI Xiao-ping¹

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. Beijing Institute of Astronautical Systems Engineering, Beijing 100076, China. Correspondent: WANG Shuo, E-mail: wangshuo_hit@163.com)

Abstract: Because of the strong nonlinearity and model uncertainty in the integrated navigation system, the classical extended Kalman filter cannot satisfy the actual application requirement of the integrated navigation system. The concrete analysis of the estimation performance of the Gaussian nonlinear filter under Bayes framework is given. Firstly, the Taylor approximation is obtained by the Taylor expansion of the nonlinear function at the estimation points, and the approximate precision of the filter algorithm is analyzed by the first and second moment. Then, the nonlinear filter algorithm is analyzed by the numerical stability. Finally, the low-dimensional and the high-dimensional test model is used to analyze and compare several Gaussian filter algorithms. The results provide reference for the practice of the integrated navigation system.

Keywords: nonlinearity filter; integrated navigation; Gaussian filter; numerical stability

0 引 言

组合导航系统的实现问题实质上是数据处理问题, 而实现这种数据处理最有效的工具是滤波算法, 它为组合导航的工程应用提供了有力的理论基础和数学实现. 对飞行器状态的精确估计是采用滤波算法的主要目的, 然而, 由于系统的非线性特性, 最优线性滤波算法无法展开应用, 需要采用非线性滤波算法进行状态估计. 在贝叶斯滤波架构下, 依概率密度分布的不同, 非线性滤波算法可分为高斯滤波算法和非高斯滤波算法. 其中, 高斯滤波算法中的概率密度服从高斯分布, 典型代表有EKF算法、DDF算法、UKF算法和CKF算法等. 上述算法由于采用了不同的非线性逼近方式实现对高斯滤波框架中高斯加权积分的近似计算, 从而导致了估计结果精度的差异. 非高斯

类滤波算法的典型代表为PF算法, 该算法以蒙特卡罗采样近似高斯加权积分.

考虑如下的非线性离散系统:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + v_k, \\z_k &= h(x_k, u_k) + n_k.\end{aligned}\quad (1)$$

对非线性系统状态传递的各种高斯近似方法进行比较, 研究非线性滤波器通过不同的方式对非线性函数 $y = g(x)$ 在估计点 u_x 附近进行泰勒展开

$$\begin{aligned}y &= g(x) = \\&g(u_x) + g'(u_x)(x - u_x) + \\&\left[\frac{1}{2}(x - u_x)^T g''(\xi)(x - u_x) \right]_i.\end{aligned}\quad (2)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^{n_x}$ 和 $y \in \mathbf{R}^{n_y}$ 、 g' 和 g'' 分别为函数 $g(x)$

收稿日期: 2015-08-17; 修回日期: 2016-01-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573115).

作者简介: 王硕(1984—), 男, 博士生, 从事信息融合与导航制导的研究; 宋申民(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、智能优化与智能控制、飞行器控制等研究.

的雅可比矩阵和海森矩阵; g_i' 为海森矩阵 g 的第 i 部分, $i = 1, 2, \dots, n_y$; $[\cdot]_i$ 为向量第 i 个元素; $\xi(x)$ 为 u_x 附近的点. 式 (2) 适用于 $g(x)$ 在点 u_x 附近存在收敛的泰勒级数, 基本上可作为下面算法应用的概述.

贝叶斯滤波是非线性滤波的最优解^[1], 但很多情况下无法获得解析解, 需要对非线性的状态方程和观测方程进行线性近似. 常用的近似方法是对非线性函数进行一阶或两阶泰勒展开, 对应的非线性滤波方法为 EKF 和二阶 EKF^[2-3]. 但对于强非线性系统会导致估计精度不够, 甚至造成滤波器的发散, 且需要计算雅可比矩阵或海森矩阵, 限制了算法的应用. 文献 [4-6] 对 EKF 二阶近似的余项进行了补偿, 且对高斯近似的均值和方差进行补偿. 此外, 通过 Stirling 多项式插值方式近似非线性函数可以得到差分滤波器 (DDF), 通过一阶或二阶插值可以分别得到 DDF1 和 DDF2^[7-8], 其优势是可以克服局部线性化的缺陷, 相比 EKF 具有更好的精度. 采用多项式插值法得到的中间差分滤波器 (CDF) 本质上与 DDF 是等效的^[9]. Merwe 等^[10] 给出 DDF 与 UKF 具有几乎相同的精度. 相较于直接近似非线性函数, 研究人员采用加权采样点的方式对非线性函数的后验概率分布进行逼近, 这类算法统称为 Sigma 点滤波器^[11]. Arasaratnam 等^[12] 通过三阶球容积积分的方式近似高斯加权积分, 推导出容积卡尔曼滤波 (CKF) 算法及其变形^[13], 并指出 CKF 是无迹卡尔曼滤波 (UKF) 在特殊参数选取情形下的一个特例. 但 CKF 在滤波精度和数值稳定性方面具有特殊性质, 遗憾的是较少有文献作出详细论述.

文献 [14-15] 证明了 UKF 估算式 (2) 中非线性变换的近似条件. 为了传递状态和协方差, KF 和 EKF 的标准形式包括离散时间代数黎卡提微分方程 (DARE). 然而, UKF 提出的形式是基于不同的原则, 是线性的估计且没有显式的 DARE. 此外, UKF 仅是基于函数 $g(x)$ 的近似, 所以雅可比矩阵和海森矩阵也是不需要计算的. 在分析结果中, 核心的工具是对非线性映射 $y = g(x)$ 最基本的变换近似, 假设随机变量 y 的高斯近似为 $N(u_y, P_y)$, 通常认为无迹变换 (UT) 能给出准确的一阶和二阶近似为 $(u_y = E(y))$ 和 $(P_y = \text{Cov}(y))$, 即计算预测均值和协方差可以精确到二阶^[16].

EKF 算法、UKF 算法、CKF 算法和 DDF 算法均属于高斯类近似滤波器. 由于对非线性函数近似方式的不同, 难以使用统一的方法评价其近似精度的优劣. 本文试图从非线性变换逼近精度和数值稳定两个方面分析非线性滤波算法的性能, 为组合导航系统在状态估计中滤波算法的选择提供参考.

1 非线性滤波算法对比分析

本节比较非线性系统如何传播高斯近似状态分布的不同方法, 利用不同方法近似高斯变量 x 的非线性映射 $y = g(x)$ 的高斯分布

$$x \sim N(u_x, P_x) \rightarrow y \stackrel{\text{approx}}{\sim} N(u_y, P_y), \quad (3)$$

其中符号 $\stackrel{\text{approx}}{\sim}$ 表示近似分布. 下面利用不同方法近似 u_y 和 P_y , 基本思想是通过一个一般的非线性函数来近似分布, 不考虑分析 $g(x)$ 的分布.

考虑如下的非线性离散系统:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + v_k, \quad (4)$$

$$z_k = h(x_k, u_k) + n_k. \quad (5)$$

其中: $u_k \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为系统在第 k 时刻的状态; $u_k \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为系统在第 k 时刻的外部输入; $z_k \in \mathbf{R}^m$ 为系统在第 k 时刻的观测量; $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 分别为系统的状态方程和观测方程. 在高斯类滤波算法中假设系统的噪声 v_k 和 n_k 是零均值的高斯白噪声.

在贝叶斯迭代滤波算法的构建过程中, 存在如下假设.

假设 1 系统状态迭代满足一阶马尔可夫过程, 即

$$p(x_k | x_{1:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}). \quad (6)$$

假设 2 系统状态与观测值 z_k 不相关.

贝叶斯滤波算法的核心思想是, 以系统当前时刻的观测序列估计系统的后验概率密度. 假设当前时刻观测序列 $D_k = [z_1^T \ z_2^T \ \dots \ z_k^T]^T$, 根据贝叶斯公式, 可得当前时刻状态 x_k 的后验概率密度为

$$p(x_k | D_k) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | D_{k-1})}{p(z_k | D_{k-1})}. \quad (7)$$

其中: $p(x_k | D_{k-1})$ 为系统的先验概率密度, 在假设 1 下, 根据查普曼-科尔莫戈罗夫 (C-K) 方程可得

$$p(x_k | D_{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | D_{k-1}) dx_{k-1}, \quad (8)$$

$p(x_k | x_{k-1})$ 为状态转移概率密度, 可由系统非线性状态方程 $f(\cdot)$ 计算得到; $p(z_k | x_k)$ 为似然概率密度, 可由系统非线性观测方程 $h(\cdot)$ 确定; $p(z_k | D_{k-1})$ 为归一化常量, 其值为

$$p(z_k | D_{k-1}) = \int p(z_k | x_k) p(x_k | D_{k-1}) dx_k. \quad (9)$$

式 (7)~(9) 构成了贝叶斯滤波算法的迭代计算公式. 由分析可知, 若已知前一时刻的后验概率密度 $p(x_{k-1} | D_{k-1})$, 当观测值 z_k 获取时, 则可由式 (7) 对先验概率密度 z_k 进行更新, 从而实现当前时刻状态 x_k 的后验概率密度估计. 然而, 贝叶斯滤波算法并不完美, 由于式 (4) 和 (5) 所构成的系统模型具有非线性特性, 算法中加权积分部分的计算变得异常困难.

针对这一问题, 研究人员相继提出了一系列的解决方法, 下面对在此基础上发展而来的典型非线性滤波方法一一介绍.

通过对 EKF 算法、DDF 算法、UKF 算法等典型高斯滤波算法及其高阶形式的了解, 由于该类算法均是从不同的角度、采用不同的非线性逼近方式实现对一般形式迭代算式中高斯加权积分的计算, 其在估计精度和数值稳定等性能表现上均有差异. 受文献 [16] 的启发, 本节从非线性逼近精度和数值稳定性两个角度来分析滤波算法的性能差异.

1.1 非线性逼近精度

考虑 n 维高斯随机变量 x , 服从均值为 u_x 、方差 P_x 的高斯分布. 假设随机变量 x 经非线性映射 $y = f(x)$ 后, y 近似服从均值为 u_y 、方差为 P_y 的高斯分布. 通过不同的近似方法逼近 u_y 和 P_y , 以此分析典型高斯滤波算法的性能.

1) EKF1 和 EKF2.

对 $f(x)$ 在 $x = u_x$ 处分别进行一阶泰勒展开和二阶泰勒展开, 得到

$${}^1y \approx f(u_x) + f'(u_x)(x - u_x), \quad (10)$$

$${}^2y \approx f(u_x) + f'(u_x)(x - u_x) + \left[\frac{1}{2}(x - u_x)^T f''_i(u_x)(x - u_x) \right]_i, \quad (11)$$

其中 $f'(\hat{x})$ 和 $f''_i(\hat{x})$ 分别为雅可比矩阵和海森矩阵. 由式 (10) 得

$$u_y^{\text{EKF1}} = f(u_x). \quad (12)$$

将式 (10) 和 (12) 代入 P_y^{EKF1} 中, 得到

$$P_y^{\text{EKF1}} = E\{(f(u_x) + f'(u_x)(x - u_x) - f(u_x))(\cdot)^T\}, \quad (13)$$

其中 (\cdot) 表示与前一项中内容相同. 对式 (13) 整理, 得到

$$P_y^{\text{EKF1}} = E\{f'(u_x)(x - u_x)(x - u_x)^T f'(u_x)^T\} = f'(u_x) P f'(u_x)^T. \quad (14)$$

由式 (11) 给出二阶泰勒展开下 u_y 和 P_y 的逼近结果^[16]为

$$u_y^{\text{EKF2}} = f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i, \quad (15)$$

$$P_y^{\text{EKF2}} = f'(u_x) P f'(u_x)^T + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x) P f''_j(u_x) P)]_{ij}. \quad (16)$$

2) DDF1 和 DDF2.

对函数 $f(x)$ 在 $x = u_x$ 处展开, 得到

$${}^1y \approx$$

$$f(u_x) + \sum_{d=1}^n (x - u_x)_d \frac{f(u_x + gS_d) - f(u_x - gS_d)}{2g}, \quad (17)$$

$${}^2y \approx$$

$$f(u_x) + \sum_{d=1}^n (x - u_x)_d \frac{f(u_x + gS_d) - f(u_x - gS_d)}{2g} + \sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 \frac{f(u_x + gS_d) + f(u_x - gS_d) - 2f(u_x)}{2g^2}. \quad (18)$$

由式 (17), 得到

$$u_y^{\text{DDF1}} = f(u_x). \quad (19)$$

将式 (17) 和 (19) 代入 P_y^{DDF1} 中, 得到

$$P_y^{\text{DDF1}} = E\left\{\left(\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d \frac{f(u_x + gS_d) - f(u_x - gS_d)}{2g}\right)(\cdot)^T\right\}. \quad (20)$$

对 $f(u_x + gS_d)$ 和 $f(u_x - gS_d)$ 在 $x = u_x$ 处一阶泰勒展开, 对式 (20) 整理, 得到

$$P_y^{\text{DDF1}} = E\left\{\left(\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d f'(u_x) S_d\right)(\cdot)^T\right\} = f'(u_x) P P_{ld} f'(u_x)^T, \quad (21)$$

$$u_y^{\text{DDF2}} =$$

$$E\left\{f(u_x) + \sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 \frac{f(u_x + gS_d) + f(u_x - gS_d) - 2f(u_x)}{2g^2}\right\} = f(u_x) + E\left\{\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 \frac{f(u_x + gS_d) + f(u_x - gS_d) - 2f(u_x)}{2g^2}\right\}, \quad (22)$$

其中 P_{ld} 为 P 主对角元素构成的对角矩阵. 将 $f(u_x + gS_d)$ 和 $f(u_x - gS_d)$ 的二阶泰勒展开形式代入式 (22), 整理可得

$$u_y^{\text{DDF2}} = f(u_x) + E\left\{\sum_{d=1}^n \frac{(x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x) (S_d)]_i}{2}\right\}, \quad (23)$$

进一步对式 (23) 整理, 得到

$$u_y^{\text{DDF2}} = f(u_x) + E\left\{\sum_{d=1}^n \frac{(x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x) (S_d)]_i}{2}\right\} = f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x) P P)]_i. \quad (24)$$

将式(18)和(24)代入 P_y^{DDF2} 中,并对 $f(u_x + gS_d)$ 和 $f(u_x - gS_d)$ 进行二阶泰勒展开,整理后得

$$P_y^{DDF2} = E\left\{\left(\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d (f'(u_x)S_d) - \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP)]_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x)(S_d)]_i (\cdot)^T\right\}. \quad (25)$$

对式(25)右侧展开,得到

$$P_y^{DDF2} = E\left\{-\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d (f'(u_x)S_d) \left(\frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP)]_i\right)^T + \sum_{d=1}^n (x - u_x)_d (f'(u_x)S_d) (\cdot)^T + \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP)]_i (\cdot)^T\right]_{ij} + \sum_{d=1}^n (x - u_x)_d (f'(u_x)S_d) \times \left(\frac{1}{2}\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x)(S_d)]_i\right)^T - \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP)]_i \left(\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d (f'(u_x)S_d)\right)^T - \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP)]_i \times \left(\frac{1}{2}\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x)(S_d)]_i\right)^T + \frac{1}{2}\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x)(S_d)]_i \times \left(\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d (f'(u_x)S_d)\right)^T - \frac{1}{4}\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x)(S_d)]_i [\text{tr}(f''_j(u_x)PP)]_j + \frac{1}{4}\sum_{d=1}^n (x - u_x)_d^2 [(S_d)^T f''_i(u_x)(S_d)]_i (\cdot)^T\right\}. \quad (26)$$

整理后得

$$P_y^{DDF2} = f'(u_x)PP_l d f'(u_x)^T - \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP)]_i \text{tr}(f''_j(u_x)PP)]_{ij}. \quad (27)$$

3) UKF.

对于UKF算法,以变量 x 的均值 \hat{x} 和协方差 P 构建Sigma点,其集合 $\{X_d\}$ 满足

$$\begin{aligned} X_0 &= \hat{x}; \\ X_d &= \hat{x} + (\sqrt{(n+\lambda)P})_d, \quad d = 1, 2, \dots, n; \\ X_d &= \hat{x} - (\sqrt{(n+\lambda)P})_{d-n}, \\ &\quad d = n+1, n+2, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (28)$$

其中: $(\sqrt{(n+\lambda)P})_d$ 为取矩阵的第 d 列; λ 为尺度因

子,通常取为 $\lambda = \alpha^2(n+k) - n$, α 为生成的Sigma点与 \hat{x} 之间的距离,通常取为 $1 \leq \alpha \leq 10^{-4}$; k 为次要尺度参数,通常取为 $k = 3 - n$. 则有

$$y \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^m f(X_i), \quad (29)$$

$$P_y \approx \sum_{d=0}^{2n} W_d^c (f(X_d) - y)(f(X_d) - y)^T. \quad (30)$$

给出关于 u_y 和 P_y 的逼近结果^[16]为

$$u_y^{UKF} = f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i, \quad (31)$$

$$P_y^{UKF} = f'(u_x)P f'(u_x)^T + \frac{\beta - \alpha^2}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)\text{tr}(f''_j(u_x)P)]_{ij}. \quad (32)$$

4) CKF.

根据三阶球径容积法则, $I_N(f)$ 可近似为

$$I_N(f) = \sum_{d=1}^{2n} w f(S\xi_d + \hat{x}). \quad (33)$$

其中: S 为方差矩阵 P 的平方根矩阵; w 为权重因子,取值为 $w = 1/2n$; ξ_d 为容积点集合 u 的第 d 列. 容积点集合 $\{\xi_d\}$ 可定义为

$$\{\xi_d\} = \{\pm\sqrt{n}e_i : i = 1, 2, \dots, n\},$$

即

$$\{\xi_d\} = \sqrt{n} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

CKF算法是以三阶球径容积法则来逼近非线性高斯积分,相比UKF算法,采样点数量减少到 $2n$ 个容积点. 但估计过程与UKF算法类似.

对于三阶球径容积法则的变换精度,文献[17]给出了相关结果,本节从二阶泰勒展开的角度出发,获取对 u_y 和 P_y 的非线性逼近. 围绕 u_x 构造容积点,有

$$y \approx \sum_{d=1}^{2n} w f(S\xi_d + u_x). \quad (34)$$

对式(34)两边取期望,得到

$$u_y^{CKF} = E\left\{\sum_{d=1}^{2n} w f(S\xi_d + u_x)\right\}. \quad (35)$$

对 $f(S\xi_d + u_x)$ 取二阶泰勒展开,代入式(35)中,得到

$$u_y^{CKF} = E\left\{\sum_{d=1}^{2n} w \left(f(u_x) + f'(u_x)S\xi_d + \left[\frac{1}{2}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i\right)\right\}. \quad (36)$$

由于集合 $\{\xi_d\}$ 是正负对称的容积点构造, 有

$$E\left\{\sum_{d=1}^{2n} w(f'(u_x)S\xi_d)\right\} = 0, \tag{37}$$

$$E\left\{\sum_{d=1}^{2n} w\left(\left[\frac{1}{2}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i\right)\right\} = \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i. \tag{38}$$

此外有

$$E\left\{\sum_{d=1}^{2n} wf(u_x)\right\} = f(u_x). \tag{39}$$

将式(37)~(39)代入(36), 得到

$$u_y^{\text{CKF}} = f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i. \tag{40}$$

将式(34)和(40)代入 P_y^{CKF} , 得到

$$P_y^{\text{CKF}} = E\left\{\left(\sum_{d=1}^{2n} wf(S\xi_d + u_x) - f(u_x) - \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i(\cdot)^T\right)\right\}. \tag{41}$$

对 $f(S\xi_d + u_x)$ 取二阶泰勒展开, 并代入式(41), 得到

$$P_y^{\text{CKF}} = E\left\{\left(\sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d) + \sum_{d=1}^{2n} w\left[\frac{1}{2}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i - \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i(\cdot)^T\right)\right\}. \tag{42}$$

对式(42)右侧展开, 得到

$$P_y^{\text{CKF}} = \sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d) \times$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{d=1}^{2n} w\left[\frac{1}{2}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i\right)^T + \\ & \sum_{d=1}^{2n} w\left[\frac{1}{2}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i \left(\sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d)\right)^T - \\ & \sum_{d=1}^{2n} w\left[\frac{1}{4}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i ([\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i)^T - \\ & \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i \left(\sum_{d=1}^{2n} w[(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)]_i\right)^T - \\ & \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i \left(\sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d)\right)^T - \\ & \sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d) \left(\frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i\right)^T + \\ & \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i \text{tr}(f''_i(u_x)P)_{ij} + \\ & \sum_{d=1}^{2n} w\left[\frac{1}{2}(S\xi_d)^T f''_i(u_x)(S\xi_d)\right]_i (\cdot)^T + \\ & \sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d)(\cdot)^T. \end{aligned} \tag{43}$$

由于

$$\sum_{d=1}^{2n} wf'(u_x)(S\xi_d)(\cdot)^T = f'(u_x)Pf'(u_x)^T, \tag{44}$$

将式(37)、(38)和(44)代入(43), 得到

$$P_y^{\text{CKF}} = f'(u_x)Pf'(u_x)^T - \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i \text{tr}(f''_i(u_x)P)_{ij}. \tag{45}$$

综上所述, 各典型高斯滤波算法的近似精度如表

1所示.

表 1 典型高斯滤波算法近似精度

滤波算法	一阶矩	二阶矩
EKF1	$f(u_x)$	$f'(u_x)Pf'(u_x)^T$
EKF2	$f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i$	$f'(u_x)Pf'(u_x)^T + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)Pf''_j(u_x)P)]_{ij}$
DDF1	$f(u_x)$	$f'(u_x)PP_{ld}f'(u_x)^T$
DDF2	$f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP_{ld})]_i$	$f'(u_x)PP_{ld}f'(u_x)^T - \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)PP_{ld})\text{tr}(f''_j(u_x)PP_{ld})]_{ij}$
UKF	$f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i$	$f'(u_x)Pf'(u_x)^T + \frac{(\beta - \alpha^2)}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)\text{tr}(f''_j(u_x)P)]_{ij}$
CKF	$f(u_x) + \frac{1}{2}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i$	$f'(u_x)Pf'(u_x)^T - \frac{1}{4}[\text{tr}(f''_i(u_x)P)\text{tr}(f''_j(u_x)P)]_{ij}$

由表1可见, EKF1和DDF1算法的一阶矩逼近精度相同, 但与其他4种算法相比忽略了高阶项 $[\text{tr}(f''_i(u_x)P)]_i/2$, 因此精度较低. DDF2与EKF2、UKF和CKF算法相比, 其一阶矩的高阶项中含有 P_{ld} , 尽管

矩阵 P 为正定阵, 但是并不能保证主对角元素均大于1, 因此, DDF2的一阶近似精度并不确定, 矩阵 P 的主对角元素大于1为其精度高于其他算法的充分条件. 此外, EKF2、UKF和CKF算法的一阶矩近似形式相

同,故其精度相同.在二阶矩比较上,EKF1相比于EKF2具有明显的截断误差,且前者的二阶矩形式与DDF1相似,因此EKF1和DDF1算法的二阶矩逼近精度较低,且矩阵 P 的主对角元素均大于1为DDF1逼近精度高于EKF1逼近精度的充分条件.EKF2、DDF2、UKF和CKF算法四者的二阶矩形式近似,其偏差主要集中在高阶项.若矩阵 P 的主对角元素均等于1,则其逼近精度与CKF相同,但均低于EKF2算法.此外,通过调整 β 和 α 的取值,可使UKF算法二阶矩逼近精度与CKF相同.另一方面,通过对 β 和 α 取值的调节,也可使前者的二阶矩逼近精度高于后者,甚至高于EKF2.综上可知,相比于泰勒展开、斯特林多项式插值和球径容积法则,无迹变换是一种更为灵活的逼近方式,通过调节尺度因子,可使UKF算法估计精度高于其他5种非线性估计算法.

1.2 数值稳定性

对于状态估计算法而言,数值稳定性是除估计精度外,另一个衡量算法性能优劣的重要指标.在构建采样点的过程中,均要求求取协方差的平方根矩阵.一旦方差矩阵负定,那么算法将失去稳定性.通过对协方差矩阵的计算可知,权重系数为正,且采样点在积分区间内,可以有效保证协方差矩阵的正定.由于DDF、UKF与CKF算法均采用确定性的解析算式来构建采样点,采样点可有效保持在积分区间内.然而,对于DDF2和UKF算法而言,其权重因子存在为负的可能.

鉴于此,文献[18]提出一种稳定性因子,用以分析非线性变换方法的稳定性.该因子构成如下:

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n |w_i|}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (46)$$

F_s 的值越趋近于1,表明稳定性越好.在该因子下,DDF2和UKF算法的稳定因子为

$$F_s^{\text{DDF2}} = F_s^{\text{UKF}} = \begin{cases} 1, & n \leq 3; \\ 2n/3 - 1, & n > 3. \end{cases} \quad (47)$$

此外,由于EKF算法为均值运算,DDF1算法和CKF算法权重系数在不同采样点处取值相同,其稳定性因子为1.结合上节给出的滤波算法精度分析结果,当估计高维非线性系统的状态时,EKF2算法和CKF算法均能保持较好的估计精度和较高的数值稳定性,但后者具有无需计算雅可比矩阵和海森矩阵的优势,因此相比于其他算法,在高维状态估计中,CKF算法是一种更好的选择.

2 仿真分析

以典型非线性测试模型^[19]和修改的Mackey-Glass时间序列模型^[20]对比分析EKF1、EKF2、DDF1、DDF2、UKF和CKF算法的性能差异.

情况1 系统模型维数较低情况下的滤波算法性能对比.

带有三角和指数函数的非线性模型为

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \sin^2(2x_{2,k}) \\ x_{1,k} + e^{-r_2 x_{3,k}} + 10 \\ r_3 x_{1,k}(x_{2,k} + x_{3,k}) \end{bmatrix} + v_k, \quad (48)$$

$$y_k = \cos(x_{1,k}) + x_{2,k} x_{3,k} + n_k. \quad (49)$$

其中: v_k 和 n_k 分别为均值为零、协方差阵为 $Q_k = 0.65I_{3 \times 3}$ 和 $R = 1.0$ 的高斯白噪声;系数设定为 $r_1 = 3$, $r_2 = 0.05$, $r_3 = 0.2$;初始真实状态 $x_0 = [-0.8 \ 1 \ 1]^T$,初始估计状态和协方差阵取为 $\hat{x}_{0|0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ 和 $P_{0|0} = I_{3 \times 3}$.

选择状态估计的均方根误差(RMSE)来比较滤波算法的性能,定义为

$$\text{RMSE}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_{*,k}^{(n)} - \hat{x}_{*,k|k}^{(n)})^2}, \quad 1 \leq k \leq 200. \quad (50)$$

其中: $(x)_{*,k}^{(n)}$ 和 $(\hat{x})_{*,k|k}^{(n)}$ 分别为第 n 次蒙特卡洛仿真下状态 x_* 的真值和估计值,仿真次数 $N = 100$.

数值仿真结果如图1~图6和表2所示.

图1~图3给出了各滤波算法的状态估计误差曲线,图4~图6给出了状态估计的RMSE曲线.首先,相比于其他5种算法,DDF1算法性能表现最差,其在图2和图5中均出现了连续的大幅度震荡.在优劣比较中,EKF算法紧随其后,图3和图6中,RMSE曲线均出现大幅的跳跃.DDF1算法和EKF算法在非线性的测试模型中的仿真结果较差,造成二者性能下降的原因,主要是其处理系统模型非线性的能力较弱,从而导致滤波算法出现不稳定情况,进而导致蒙特卡罗仿真结果较差.在图1~图6中,EKF2算法、DDF2算法和CKF算法性能差异较小,但在表2中DDF2算法所需时间却是CKF算法的两倍多.此外,尽管本质上CKF算法是UKF算法的特例,但由于其采样点个数的下降和采样权重的取值不同,在滤波算法时间消耗和数值稳定性的表现存在较大差异.由表2可见,CKF算法时间仅相当于UKF算法的一半,且由图1

~图6可见, 前者的数值稳定性要远好于后者.

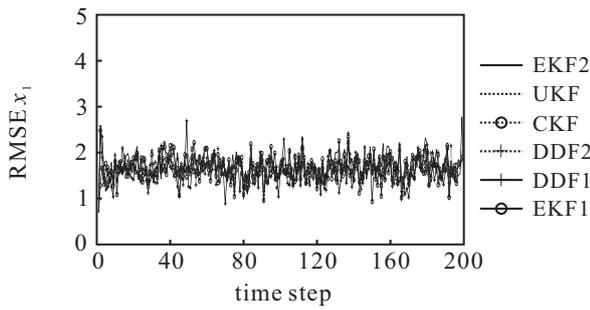


图1 状态 x_1 的估计误差 (情况1)

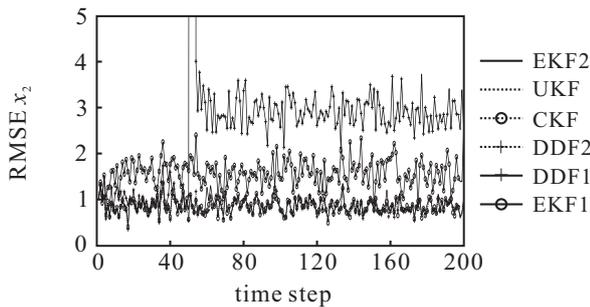


图2 状态 x_2 的估计误差 (情况1)

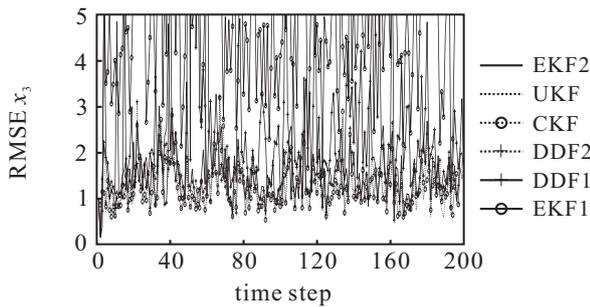


图3 状态 x_3 的估计误差 (情况1)

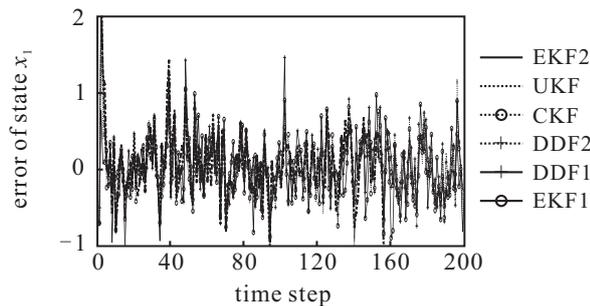


图4 状态 x_1 的均方根估计误差 (情况1)

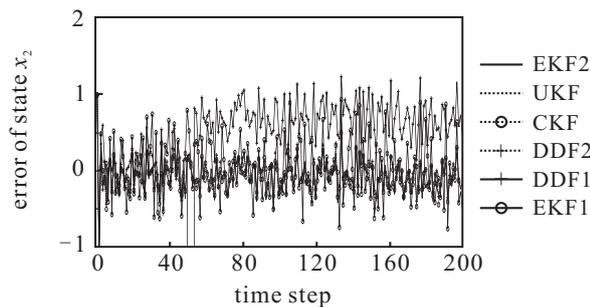


图5 状态 x_2 的均方根估计误差 (情况1)

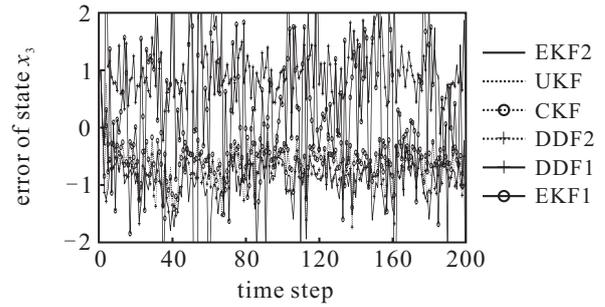


图6 状态 x_3 的均方根估计误差 (情况1)

表2 滤波算法不稳定次数和耗时对比

算法	不稳定/次	用时/s
EKF1	0	1.8748
EKF2	0	6.6417
DDF1	1	6.7718
DDF2	0	11.1437
UKF	4	9.4441
CKF	0	5.4795

情况2 系统模型维数较高情况下的滤波算法性能对比.

为增加系统模型的非线性特性, 对标准 Mackey-Glass 时间序列模型进行修改, 模型内容如下:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{20,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{20,k}e^{-0.3x_{10,k}} - 0.2x_{2,k} \\ \cos(x_{2,k-1}) \\ \cos(x_{3,k-1}) \\ \vdots \\ \cos(x_{20,k-1}) \end{bmatrix} + v_k, \quad (51)$$

$$y_k = x_{1,k}x_{2,k} + x_{2,k}x_{3,k} + \dots + x_{19,k}x_{20,k} + n_k. \quad (52)$$

其中: 系统状态 $x_k \in \mathbf{R}^{20}$; v_k 和 n_k 分别为均值为零、协方差阵为 $Q_k = I_{20 \times 20}$ 和 $R = 0.5$ 的高斯白噪声.

系统模型初始真值取为

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & -0.1 & 0.2 & 0.4 & -0.6 & -0.7 & \rightarrow \\ \leftarrow 0.6 & 0.1 & 0.8 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0.6 & \rightarrow \\ \leftarrow 0.8 & 0.9 & 0.1 & 1.2 & 1.3 \end{bmatrix}^T.$$

滤波算法的初始估计状态和初始协方差分别取为 $\hat{x}_{0|0} = 0.1I_{20 \times 1}$ 和 $P_{0|0} = 0.5I_{20 \times 20}$. 以式(51)定义的 RMSE 对比各滤波算法性能, 仿真周期设为 $T = 200$, 蒙特卡洛仿真次数 $N = 100$. 数值仿真结果如图7~图12和表3所示.

图7~图9对比了各滤波算法的状态估计误差曲线,图10~图12对比了各滤波算法的状态估计

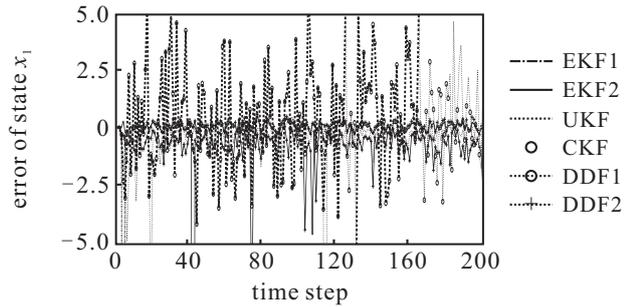


图 7 状态 x_1 的估计误差 (情况 2)

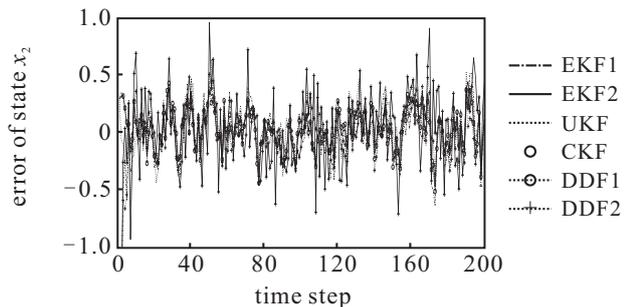


图 8 状态 x_2 的估计误差 (情况 2)

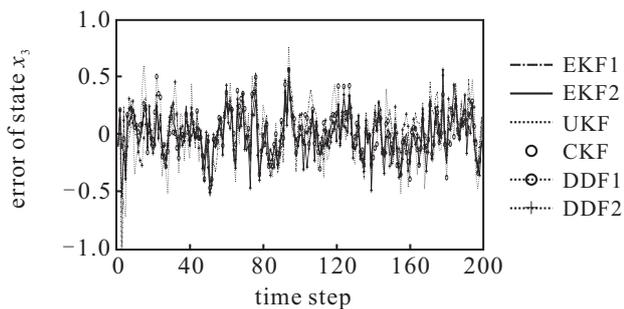


图 9 状态 x_3 的估计误差 (情况 2)

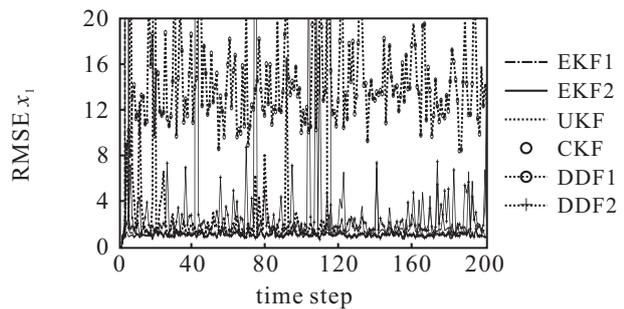


图 10 状态 x_1 的均方根估计误差 (情况 2)

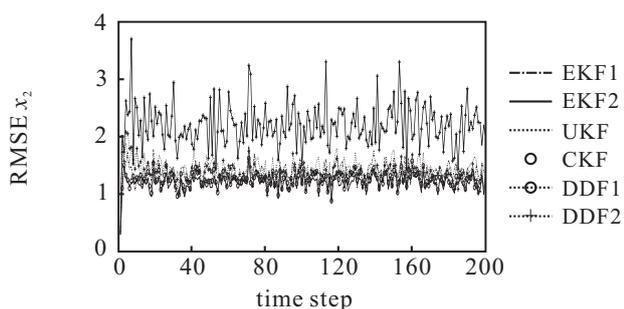


图 11 状态 x_2 的均方根估计误差 (情况 2)

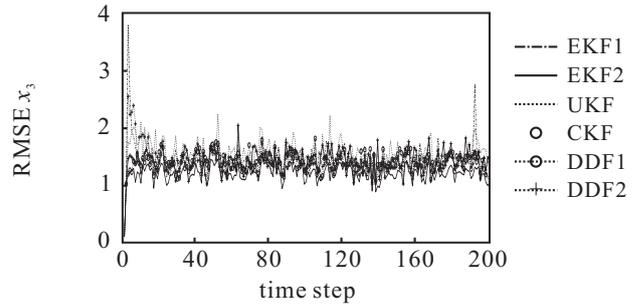


图 12 状态 x_3 的均方根估计误差 (情况 2)

表 3 滤波算法不稳定次数和耗时对比

算法	不稳定/次	用时/s
EKF1	1	3.433 1
EKF2	0	917.572 8
DDF1	0	40.571 9
DDF2	0	46.174 1
UKF	2	43.923 7
CKF	0	37.702 4

RMSE 曲线. 首先, 相比其他算法, EKF1 算法和 UKF 算法结果表现最差, 尤其在图 7 和图 10 中, 均出现了大幅值的偏差. 与测试模型 (49) 的仿真结果相比, 由于修改的 Mackey-Glass 模型非线性特性较高, EKF1 算法难以处理, 在仿真过程中出现了 1 次不稳定现象, 从而导致统计结果较差. 此外, 虽然 UKF 算法具有较强的非线性处理能力, 但由于仿真中采用的是 20 维的高维系统模型, UKF 算法的稳定性出现下降, 估计结果较差. 在图 7 中, CKF 算法估计结果略低于 EKF2 算法、DDF1 算法和 DDF2 算法, 但在图 8 和图 9 中, CKF 算法同性能表现最好的 EKF2 算法的估计结果相近. 此外, 虽然 EKF2 算法的估计结果较好, 但由于系统维数的增加, 用时达到了惊人的 917.5728s, 远大于其他算法. 最后, 通过对非线性测试模型和修改的 Mackey-Glass 模型的仿真结果, 综合考虑滤波算法的估计精度和稳定性, 并结合工程中的实际需求可以得出, 相比于其他算法, 无论是低维系统还是高维系统, CKF 算法均是一种表现较为优越的非线性滤波算法, 且能够满足实际工程中对精度、稳定性和实时性等方面的需求.

3 结 论

本文介绍了贝叶斯滤波框架下的 EKF 算法、DDF 算法、UKF 算法和 CKF 算法等几种典型非线性高斯滤波算法, 并以泰勒展开为工具, 对构建上述滤波算法所对应的非线性函数进行逼近, 从非线性变换精度和数值稳定性两个角度进行了对比分析. 分析和仿真结果表明, 综合考虑估计精度、数值稳定性和算法耗时 3 方面因素, 相比于其他算法, 在实际工程应用中, CKF 算法是一种较优的选择.

参考文献(References)

- [1] Ho Y C, Lee R C K. A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1964, 9(4): 333-339.
- [2] Anderson B, Moore J B. Optimal filtering[M]. London: Prentice-Hall, 1979: 193-222.
- [3] Henriksen R. Truncated second-order nonlinear filter revisited[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(1): 247-251.
- [4] Athans M, Wishner R, Bertolini A. Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1968, 13(5): 504-514.
- [5] Maybeck P S. Stochastic models, estimation and control[M]. New York: Academic Press, 1982: 102-112.
- [6] Bar-Shalom Y, Li X, Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms and software[M]. New York: John Wiley Sons, 2001: 381-394.
- [7] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems[R]. Lyngby: University of Technical, 2000.
- [8] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [9] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.
- [10] Van Der Merwe R, Wan E A. Efficient derivative-free Kalman filters for online learning[C]. European Symposium on Artificial Neural Networks. Bruges: Citeseer, 2001: 205-210.
- [11] Van Der Merwe R. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[D]. Portland: College of Electrical and Computer Engineering, Oregon Health Science University, 2004: 49-126.
- [12] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [13] 张秋昭, 张书毕, 刘志平, 等. 基于奇异值分解的鲁棒容积分卡尔曼滤波及其在组合导航中的应用[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 341-346.
(Zhang Q Z, Zhang S B, Liu Z P, et al. Robust cubature Kalman filter based on SVD and its application to integrated navigation[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 341-346.)
- [14] Teixeira Bruno O S, Trres Leonardo A B, Aguirre Luis A, et al. Unscented filtering for interval-constrained nonlinear systems[C]. IEEE Conf on Decision and Control. Mexico: IEEE, 2008: 5116-5121.
- [15] Julier S, Uhlmann J. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [16] Gustafsson F, Hendeby G. Some relations between extended and unscented kalman filters[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2013, 60(2): 545-555.
- [17] 魏喜庆. 航天器相对导航中的非线性滤波问题研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学航天学院, 2013.
(Wei X Q. Research on nonlinear filtering for relative navigation of spacecraft[D]. Harbin: Institute of Technology, Harbin Institute of Technology, 2013.)
- [18] Romm Y E. Computer-oriented stability analysis based on recurrent transformation of difference solutions of ordinary differential equations[J]. Cybernetics and Systems Analysis, 2015, 51(3): 416-431.
- [19] Wang Xiao-xu, Liang Yan, Pan Quan, et al. A Gaussian approximation recursive filter for nonlinear systems with correlated noises[J]. Automatica, 2012, 5(48): 2290-2297.
- [20] Djuric P M, Bugallo M F. Particle filtering for high-dimensional systems[C]. IEEE Int Workshop on Computational Advances in Multi-sensor Adaptive Processing. Martin: IEEE, 2013: 352-355.

(责任编辑: 郑晓蕾)