

考虑可靠性与重要性的证据补偿协调融合方法

杜元伟, 权锡鉴

(中国海洋大学 管理学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 兼具可靠性和重要性的证据融合问题目前仅局限于折扣处理阶段, 尚未深入到融合规则的构建之中. 为解决此问题, 首先结合现有成果的解决思路分析其中存在的问题; 然后构建能够对基本信度分配函数进行可靠性/重要性双重折扣处理且满足交换律的证据折扣方法, 在此基础上, 基于 Dempster 规则和 Murphy 规则从非补偿性与补偿性协调视角构建可以平衡可靠性和重要性的补偿协调融合规则; 最后通过数值对比分析验证所提出方法的科学性.

关键词: 可靠性; 重要性; 证据理论; 融合规则; 补偿协调

中图分类号: C934

文献标志码: A

Compensation coordinated rule for fusing evidences by considering reliability and importance

DU Yuan-wei, QUAN Xi-jian

(School of Management, Ocean University of China, Qingdao 266100, China. Correspondent: DU Yuan-wei, E-mail: duyuanwei@ouc.edu.cn)

Abstract: The evidence fusion problem with both reliability and importance is limited to deal with it only in discount processing phase and not deeply into the fusion rule construction. In order to solve above problems, the existing problems in the current research are introduced by analyzing its solving thought firstly. Then an evidence discounting method that satisfies commutative law is established to discount the basic belief assignment function with both reliability and importance. A compensation coordinated rule for fusing evidences is constructed based on the Dempster rule and Murphy rule, which is used to balance the relationship between reliability and importance from the perspective of non-compensatory and compensatory coordination. The numerical comparison analysis shows the scientificity of the presented method.

Keywords: reliability; importance; evidence theory; fusion rule; compensative coordination

0 引言

证据理论是由 Dempster 和 Shafer 共同提出的一种用于开展不完备性信息融合的理论, 已在数据融合、智能决策、专家诊断等诸多领域得到了广泛应用. 然而, 该理论因其在证据高度冲突时容易产生直觉悖论而备受争议. 国内外许多学者认为证据之间高度冲突是因为其中存在错误信息, 故在开展证据融合之前应根据证据源(如传感器、专家等)的可靠性事先对证据进行修正. 沿此思路, 对证据折扣和可靠性确定两方面问题进行研究, 提出了一系列解决方法. 证据折扣方法包括应用折扣因子对证据信度进行折扣后将剩余支持赋值给识别框架的 Shafer 折扣方法^[1]、经过严格数学推导且能处理一般问题的语境折扣方

法^[2]、基于逆运算的去折扣运算方法^[3]、考虑广义折扣因子的扩展折扣方法^[4]等; 可靠性确定方法包括基于可传递信任模型和经典证据理论的传感器可靠性评估方法^[5-6]、依据当前证据源与所有证据源之间证据冲突程度的传感器动态可靠性评估方法^[7]、基于决策分析前后观点之间相似性的专家可靠性定义方法^[8]、以多传感器控制系统为对象并结合表现分析和投票过程的扩展传感器可靠性评估方法^[9]. 特别地, 一些研究成果认为证据源的重要性就是可靠性, 故采用与可靠性完全相同的证据折扣方法和确定方法处理重要性^[10-11]. 然而, 可靠性是证据源提供正确证据的能力, 重要性是其提供的证据对解决决策问题的贡献能力^[12], 上述成果武断地将二者等同处理, 其融合

收稿日期: 2015-08-17; 修回日期: 2016-01-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71462022, 71261011); 国家社科基金重点项目(16AJL007); 2016年度青岛市社会科学规划研究项目(QDSKL1601006).

作者简介: 杜元伟(1981—), 男, 教授, 博士生导师, 从事管理决策、运营管理等研究; 权锡鉴(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事运营管理、战略管理等研究.

结果的合理性显然是有待商榷的. 目前, 在 DSmT 理论和证据推理 (ER) 方法的最新成果中已注意到证据源可靠性与重要性的区别, 并各自提出了对证据进行可靠性与重要性折扣处理的方法^[12-13]. 上述成果无疑对进一步完善证据理论具有极其重要的作用, 更为关键的是证据源在可靠性和重要性方面的性质差异已开始受到业界学者的关注. 令人遗憾的是, 虽然 DSmT 理论和 ER 方法尝试着处理证据源同时存在可靠性和重要性的证据融合问题, 但目前仅局限于折扣处理阶段, 尚未深入到融合规则构建之中.

鉴于此, 本文从非补偿性和补偿性协调视角对证据源兼具可靠性与重要性的证据融合问题开展研究, 提出一种证据补偿协调融合方法. 首先结合现有成果的解决思路分析其中存在的问题; 然后构建能够对基本信度分配函数进行可靠性/重要性双重折扣处理且满足交换律的证据折扣方法, 在此基础上基于 Dempster 规则和 Murphy 规则从非补偿性与补偿性协调视角构建可以平衡可靠性和重要性的补偿协调融合规则; 最后通过数值对比分析验证了所提出方法的科学性.

1 相关定义与现有成果缺陷

证据理论用识别框架描述决策问题所有可能答案, 用基本信任分配 (BBA) 函数描述由证据源产生的证据. 下面依据相关文献给出以下定义^[13-14].

定义 1 设决策问题 Q 的所有可能答案可表示为互斥且可穷举的命题 θ_n ($n = 1, 2, \dots, N$), 其中有且仅有一个命题 θ_* 是 Q 的正确答案, 则称由所有命题构成的集合 $\Theta = \{\theta_n | n = 1, 2, \dots, N\}$ 为 Q 的识别框架.

定义 2 设识别框架 Θ 所有子集集合为 2^Θ , θ 的任意非空子集和可信度分别为 θ 和 $m(\theta)$, 若映射函数 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ 能满足

$$m(\emptyset) = 0, \sum_{\theta \subseteq \Theta} m(\theta) = 1, \quad (1)$$

则称其为 Θ 上的 BBA 函数. 若 $m(\theta) > 0$, 则称 θ 为决策问题 Q 的焦点.

定义 3 设由证据源 s_i 产生的 BBA 函数为 m_i , s_i 的折扣系数为 κ_i , $0 \leq \kappa_i \leq 1$, 称

$$m'_i(\theta) = \begin{cases} \kappa_i m_i(\theta), & \theta \subset \Theta; \\ \kappa_i m_i(\theta) + 1 - \kappa_i, & \theta = \Theta \end{cases} \quad (2)$$

为 Shafer 折扣, 其中 $1 - \kappa_i$ 为剩余支持.

定义 4 设由证据源 s_i 产生的 BBA 函数为 m_i , 焦点为 $X_i \in 2^\Theta$, $i = 1, 2, \dots, I$, 若将冲突因子表示为 $K = \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \left[\prod_i m_i(X_i) \right]$, 则融合所有 BBA 函数

的 Dempster 规则可表示为

$$m(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset; \\ \frac{1}{1-K} \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i(X_i), & \theta \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3)$$

定义 5 设由证据源 s_i 产生的 BBA 函数为 m_i , $i = 1, 2, \dots, I$, 其对应的信度函数为 $\text{Bel}_i(\theta)$, $\theta \in 2^\Theta$, 则用于开展证据融合的 Murphy 规则可表示为

$$\text{Bel}(\theta) = \sum_i \text{Bel}_i(\theta) / I, \theta \neq \emptyset. \quad (4)$$

定义 6 设在识别框架 Θ 下焦点 X 的 BBA 函数为 $m(X)$, 命题 θ 的信度函数为 $\text{Bel}(\theta)$, $|\theta - X|$ 为命题 θ 与 X 的差集中含有元素的个数, 二者相互定义为

$$\begin{cases} \text{Bel}(\theta) = \sum_{X \subseteq \theta} m(X), \\ m(\theta) = \sum_{X \subseteq \theta} (-1)^{|\theta - X|} \text{Bel}(X). \end{cases} \quad (5)$$

定义 7 设在识别框架 Θ 下, 焦点 X 的 BBA 函数为 $m(X)$, 则命题 θ 的 Pignistic 概率为

$$P(\theta) = \text{Bel}(\theta) + \varepsilon \text{Pl}(\theta). \quad (6)$$

其中: $\varepsilon = \left[1 - \sum_{\theta \subseteq \Theta} \text{Bel}(\theta) \right] / \sum_{\theta \subseteq \Theta} \text{Pl}(\theta)$, 似然函数

$$\text{Pl}(\theta) = \sum_{\theta \cap X \neq \emptyset} m(X), \text{Bel}(\theta) \text{ 含义同式 (5).}$$

注意到, Dempster 规则用 BBA 函数形式表示, Murphy 规则用信度函数表示, 二者虽表达方式不同, 但都能利用定义 6 进行相互转化. 另外, 一般情况下经过融合得到的 BBA 函数要转化为 Pignistic 概率才能开展最终决策, 转化方式如定义 7 所示.

目前, 仅有 DSmT 理论和 ER 方法尝试着处理证据源同时存在可靠性和重要性的证据融合问题. DSmT 理论是将“似是而非”和“自相矛盾”推理方法用于证据融合而提出的一种新理论, 其特点是能够处理识别框架中命题界限模糊和高冲突下的证据融合问题. 解决此类问题的思路是^[12]: 先将可靠性代入 Shafer 折扣对证据进行初次折扣处理, 后将重要性代入 SD 折扣对经过初次折扣的证据进行二次折扣处理, 在此基础上利用 PCR5_∅ 规则开展证据融合; 在折扣处理方法保持不变的条件下, 改变对可靠性和重要性的折扣顺序得到经过二次折扣的证据, 同样利用 PCR5_∅ 规则开展证据融合; 对上述两种融合结果进行算术平均得到最终融合结果. 其中: SD 折扣是本文为描述方便, 以两位作者姓氏首写字母组合进行的命名, 该折扣与 Shafer 折扣区别之处是将式 (2) 中剩余支持赋值给空集; ER 方法是将证据理论应用于解决多属性决策问题的一种新方法, 构建了一种能够保持证据性质且对所有证据开展递归融合的 ER 规则. 解决此类问题的思路是^[8,13]: 先利用式 $c_{\lambda w, i} =$

$1/(1+w_i-\lambda_i)$ 集成可靠性 λ_i 和重要性 w_i , 再将 $c_{\lambda w, i}$ 作为折扣系数代入 ER 方法进行递归融合.

上述两种方法对可靠性和重要性的处理全部都集中在证据折扣阶段, 而在融合规则方面都是基于合取一致原理, 采用正交和算子对证据进行集成, 均未考虑可靠性和重要性之间的性质差异. 由此构建的融合规则虽然形式有所不同, 但都是非补偿性的, 其特点是如果某个命题被一个可靠证据源拒绝, 则不管其他证据源对其支持程度有多强, 该命题依然会被拒绝. 显然, 在可靠性方面, 由一个绝对可靠的证据源给出的信息是 100% 准确的, 倘若其拒绝某个命题, 那么在经过融合规则合成之后该命题最终被拒绝也是理所应当的; 但是, 在重要性方面, 由一个非常重要的证据源给出的信息只能说是其相对于由其他证据源给出的信息在份量上会更重些, 并不能代表是 100% 准确的, 倘若融合规则因为该证据源拒绝某个命题而在不考虑其他证据源证据的条件下就直接拒绝该命题, 则在逻辑上有悖常理. 为此, 本文认为对于证据源可靠性和重要性的处理并不能只停留在证据折扣阶段, 而应该结合二者性质差异深入到融合规则之中.

2 证据折扣方法

可靠性是事物本身在一段时间内和一定条件下无故障地执行特定功能的能力或可能性^[15], 通常按照统计或实验等方法进行确定, 具有绝对性和客观性. 重要性一般用权重进行衡量, 是某一事物相对于另一事物的重要程度, 一般根据决策问题的特征由人进行确定, 具有相对性和主观性. 结合本文问题, 可靠性可以理解为证据源针对特定决策问题给出无误信息的能力或可能性, 若设用于描述证据源 s_i 可靠性的可靠系数为 λ_i , 则有 $0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, I$. 重要性可以理解为在产生的证据方面一个证据源相对于另一个证据源的重要程度; 若设用于描述证据源 s_i 重要性的重要权重为 w_i , 则有 $\sum_i w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, I$. 显然, λ_i 越大表明 s_i 越可靠, 其值不会因其他证据源而改变, w_i 越大表明 s_i 越重要, 其值会受其他证据源影响. 如: 新增一个证据源 $s_{i'} (i' \neq i)$ 不会影响 s_i 的可靠系数, 反而可能会改变(此例是削弱) s_i 的重要权重 (因证据源新增前有 $\sum_i w_i = 1$, 增后为 $w_{i'} + \sum_i w_i = 1$).

无论是对于可靠性还是对于重要性, 在折扣处理方面都可以采用 Shafer 折扣对由证据源产生的证据予以处理. 由式(2)可知, 折扣后的剩余支持被赋值给识别框架, 若折扣系数是可靠系数, 则可以将 $\lambda_i m_i(\theta) + 1 - \lambda_i$ 理解为“不知道”^[1]. 若折扣系数是

重要权重, 则可以将 $w_i m_i(\theta) + 1 - w_i$ 理解为允许其他证据信息在融合中发挥的作用程度^[13]. 特别地, 不管是 DSMT 理论还是 ER 方法, 都通过各自的折扣方法将可靠性和重要性同时融入于证据之中(详见前文). 本文遵从此种思路, 采用双重折扣方法进行处理. 具体而言: 设由证据源 s_i 产生的证据是 m_i , 基于可靠系数 λ_i 和重要权重 w_i , 应用 Shafer 折扣对 m_i 分别进行折扣后得到的证据记为 m_i^λ 和 m_i^w , 那么 m_i^λ 可以被视为是剔除失误几率后绝对可靠的证据, m_i^w 可以被视为是消除量纲影响后同等重要的证据. 在此基础上, 基于重要权重 w_i , 应用 Shafer 折扣对 m_i^λ 进行再次折扣得到 $m_i^{\lambda, w}$, 基于可靠系数 λ_i , 应用 Shafer 折扣对 m_i^w 进行再次折扣得到 $m_i^{w, \lambda}$.

定理 1 若设先基于重要权重 w_i 再基于可靠系数 λ_i 对证据 m_i 进行双重 Shafer 折扣得到的证据为 $m_i^{w, \lambda}$, 改变上述折扣顺序进行双重折扣得到的证据为 $m_i^{\lambda, w}$, 则有 $m_i^{w, \lambda} = m_i^{\lambda, w}$.

证明 将重要权重 w_i 和证据 m_i 代入式(2)可得

$$m_i^w(\theta) = \begin{cases} w_i m_i(\theta), & \theta \in \Theta; \\ w_i m_i(\theta) + 1 - w_i, & \theta = \emptyset. \end{cases} \quad (7a)$$

再将可靠系数 λ_i 和经折扣的 $m_i^w(\theta)$ 代入式(2)可得

$$m_i^{w, \lambda}(\theta) = \begin{cases} \lambda_i w_i m_i(\theta), & \theta \in \Theta; \\ \lambda_i [w_i m_i(\theta) + 1 - w_i] + (1 - \lambda_i), & \theta = \emptyset. \end{cases} \quad (7b)$$

同理, 改变上述可靠系数与重要权重的折扣顺序所得到的 $m_i^{\lambda, w}$ 与式(7b)完全相同. \square

由上述结论可知 $m_i^{w, \lambda} = m_i^{\lambda, w}$, 表明此种折扣方法满足交换率, 即折扣结果不会因折扣次序的改变而改变. 为便于表述, 记经过双重折扣后得到的证据为 $m_i = m_i^{\lambda, w} = m_i^{w, \lambda}$, 可以将其理解为绝对可靠的且同等重要的证据信息. 特别地, 若构建一个综合折扣系数——可靠系数和重要权重的乘积 $\lambda_i w_i$, 用 $\lambda_i w_i$ 对证据源 s_i 产生的证据 m_i 进行 Shafer 折扣, 折扣结果显然与式(7b)完全相同. 上述将两次折扣系数的乘积作为综合折扣系数的结论已在文献[21]的引理 2.2 中提及, 之所以再次指出, 一是为了强调该种折扣方式与折扣次序无关, 二是为了强调可靠系数与重要权重是两种不同性质的参数, 其与文献中提及的仅针对一种参数开展两次折扣的问题是存在区别的. 另外, 证据源的重要权重 w_i 一般以 $w_i \geq 0$ 且 $\sum_i w_i = 1$ 的形式给出, 建议在对其进行 Shafer 折扣之前, 应先按 $w'_i = w_i / \max(w_i | \forall i) (\forall i)$ 的方式进行标准化处理, 以此来规避因折扣后全局不确定 ($m_i(\theta) =$

$w_i m_i(\theta) + 1 - w_i$) 过大导致的合成结果不合理问题. 本文采纳该种处理方式, 建议使用经过标准化处理后的 w'_i 计算综合折扣系数.

注意到, DSMT 理论中的二次折扣处理方法结果会受折扣次序影响 (否则不必进行算术平均处理), ER 方法中的综合折扣系数构建方法必须按照先对重要性折扣、后对可靠性折扣的次序构建才有 $c_{\lambda w, i} = 1/(1 + w_i - \lambda_i)$ (但原文中并未说明按此次序进行折扣的原因). 显然, 当折扣次序改变时, 折扣系数 $c_{\lambda w, i}$ 也会改变. 由此可见, 本文方法能够克服 DSMT 理论和 ER 方法中折扣处理方法不满足交换律的缺陷, 从而使折扣结果更具科学性.

3 补偿协调融合规则

融合策略分为非补偿性融合和补偿性融合. 两种融合策略最早提出于多属性决策领域. 非补偿性融合策略认为方案在各个属性上的表现是无法相互替代的, 依据某些属性作出的决策无法被其他属性所颠覆^[16-18]; 补偿性融合策略认为方案在各个属性上的表现是可以按照属性权重而相互替代的, 认为最优方案在所有属性上的加权效用要大于其他方案的加权效用, 是一种“理性”的或者“警惕性”的选择^[18-19]. 拓展至本文问题, 非补偿性策略可以理解为某命题一旦被一个证据源 (绝对可靠的) 拒绝, 则因证据源之间不能相互补偿, 故即使该命题被其他证据源支持但最终亦应被拒绝^[13, 20]; 补偿性策略可以理解为某命题虽被某一证据源拒绝, 但因证据源之间能够相互补偿, 故该命题在被其他证据源支持的情况下最终亦可能被支持. 可见, 非补偿性和补偿性两种策略不仅适用条件不同, 而且决策结果也存在显著差异.

本文认为基于可靠性开展的证据融合 (简称可靠性融合) 应该采用非补偿性融合策略. 如: 有一嫌疑人被其他证人 (证据源) 怀疑案发时有可能在现场, 但是一个绝对可靠的证人可以证明其不在现场 (拒绝在现场的假设), 那么最终结论应该是该嫌疑者不在现场. 而基于重要性开展的证据融合 (简称重要性融合) 应该采用补偿性融合策略. 类似于多属性决策中方案评价价值是属性权重与属性表现值的累积之和, 重要性融合是要集成各个证据源在不同侧面对决策问题的证据信息, 从而形成系统全面的判断. 在重要性融合中, 如果某假设被一证据源拒绝, 但又被其他证据源支持, 则在综合集成所有证据之后该假设最终被支持也不是不可能的. 如: 某学生被数学老师 (证据源) 给出的成绩不是优秀, 但被语文、外语、物理等其他老师给出的成绩是优秀, 那么该同学最后的综合成绩也有可能是优秀.

现有的证据融合规则绝大多数都是遵循非补

偿性策略构建的, 遵循补偿性策略构建的比较少见. 如 Dempster 规则、Smets 组合规则、Yager 组合规则、PCR 系列组合规则、ER 组合规则等都是非补偿性的^[21-22], 仅有 Murphy 规则、加权证据合成规则、Tin 合成规则等少数是补偿性的^[23-24]. 考虑到具有非补偿性的 Dempster 规则具有满足交换律、结合律等优良性质, 具有补偿性的 Murphy 规则其有效性已得到了诸多成果的证实^[22], 故本文以上述规则为依据构建能够平衡可靠性融合和重要性融合的补偿协调融合规则. 设证据源 s_1, s_2, \dots, s_I 产生的证据为 m_1, m_2, \dots, m_I , 基于可靠系数和重要权重对上述证据进行双重折扣后得到 m'_1, m'_2, \dots, m'_I , 因为它们是绝对可靠的且同等重要的, 故可以直接开展融合. 设用于协调可靠性融合和重要性融合相对重要程度的协调系数为 γ , 构建补偿协调融合规则为

$$m(\theta) = \gamma f(\theta) + (1 - \gamma)g(\theta). \quad (8)$$

其中: γ 和 $1 - \gamma$ 分别为可靠性融合和重要性融合的相对重要程度, $0 \leq \gamma \leq 1$; $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 分别为由 Dempster 规则和由 Murphy 规则融合得到的以 BBA 函数形式存在的结果.

定理 2 设

$$\alpha = \frac{\gamma}{1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m'_i(X_i)},$$

$$\beta = (1 - \gamma)/I,$$

式 (8) 所示的补偿协调融合规则可以转化为

$$m(\theta) = \alpha \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m'_i(X_i) + \beta \sum_{i, X_i = \theta} m'_i(X_i). \quad (9)$$

证明 由式 (3) 可知, 式 (8) 中 $\gamma f(\theta)$ 可以展开为

$$\gamma f(\theta) = \frac{\gamma}{1 - K} \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m'_i(X_i) = \frac{\gamma \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m'_i(X_i)}{1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m'_i(X_i)} = \alpha \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m'_i(X_i).$$

由式 (4) 可知 $\text{Bel}(\theta) = \sum_i \text{Bel}_i(\theta)/I$, 由式 (5) 可

知

$$m_i(\theta) = \sum_{X \subseteq \theta} (-1)^{|\theta - X|} \text{Bel}_i(X),$$

$$\beta = (1 - \gamma)/I,$$

故式 (8) 中 $(1 - \gamma)g(\theta)$ 可以展开为

$$(1 - \gamma)g(\theta) = (1 - \gamma) \sum_{X \subseteq \theta} (-1)^{|\theta - X|} \text{Bel}(X) = (1 - \gamma) \sum_{X \subseteq \theta} (-1)^{|\theta - X|} \sum_i \text{Bel}_i(X)/I =$$

$$(1-\gamma)\sum_i\sum_{X\subseteq\theta}(-1)^{|\theta-X|}\text{Bel}_i(X)/I =$$

$$(1-\gamma)\sum_i m_i^*(\theta)/I = \beta\sum_i m_i^*(\theta) =$$

$$\beta\sum_{i, X_i=\theta} m_i^*(X_i).$$

将 $\gamma f(\theta)$ 和 $(1-\gamma)g(\theta)$ 的推导结果代入式(8)即可得到(9). \square

定理3 由补偿协调融合规则开展证据融合, 最终得到的结果必满足BBA函数的定义, 即 $m(\theta) \geq 0$ 且 $\sum_{\theta \subseteq \Theta} m(\theta) = 1$.

证明 由Dempster规则可知

$$\sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i(X_i) = \sum_{X_i \in \Theta, \forall i} \prod_i m_i(X_i) =$$

$$\prod_i \sum_{X_i \in \Theta} m_i(X_i) = 1.$$

因上式中可能 $\theta = \emptyset$, 也可能 $\theta \neq \emptyset$, 故存在

$$\sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i(X_i) =$$

$$\sum_{\theta \neq \emptyset} \sum_{\cap_i X_i = \theta} \left[\prod_i m_i(X_i) \right] + \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i(X_i) = 1.$$

此时有 $\sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i^*(X_i) \leq 1$. 当 $\theta \neq \emptyset$ 时, 针对式(9)中 $\alpha \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i^*(X_i)$, 有

$$\sum_{\theta \in \Theta} \alpha \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i^*(X_i) =$$

$$\alpha \sum_{\theta \neq \emptyset} \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i^*(X_i) =$$

$$\alpha \left[1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i(X_i) \right] =$$

$$\gamma \left[1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i^*(X_i) \right]$$

$$\frac{\gamma \left[1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i^*(X_i) \right]}{1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i^*(X_i)} = \gamma.$$

当 $\theta \neq \emptyset$ 时, 针对式(9)中 $\beta \sum_{i, X_i = \theta} m_i^*(X_i)$, 有

$$\sum_{\theta \in \Theta} \beta \sum_{i, X_i = \theta} m_i^*(X_i) = \beta \sum_{\theta \in \Theta} \sum_i m_i(\theta) =$$

$$\beta \sum_i \sum_{\theta \in \Theta} m_i(\theta) = \beta I = (1-\gamma)I/I = 1-\gamma.$$

由此可知, 当 $\theta \neq \emptyset$ 时, 有

$$\sum_{\theta \in \Theta} \left[\alpha \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i^*(X_i) + \beta \sum_{i, X_i = \theta} m_i^*(X_i) \right] =$$

$$\sum_{\theta \in \Theta} \alpha \sum_{\cap_i X_i = \theta} \prod_i m_i^*(X_i) + \sum_{\theta \in \Theta} \beta \sum_{i, X_i = \theta} m_i^*(X_i) =$$

$$\gamma + 1 - \gamma = 1.$$

因为

$$\sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i^*(X_i) \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1,$$

所以

$$\beta = (1-\gamma)/I \geq 0,$$

$$\alpha = \gamma / \left[1 - \sum_{\cap_i X_i = \emptyset} \prod_i m_i^*(X_i) \right] \geq 0,$$

又因 $\forall m_i^*(X_i) \geq 0$, 故式(9)中必有 $m(\theta) \geq 0$. \square

注意到, 用于协调可靠性融合和重要性融合的协调系数 γ 可以根据决策问题的实际需要予以确定. 当在实际中无法确定时, 本文从均衡性视角给出一种建议性的协调系数确定方法. 就整体情况而言, 证据源的可靠系数越大, 分布越均衡, 表明证据的准确性越高, 可靠性融合越重要. 证据源的重要权重分布越均衡表明所有证据都在融合中发挥着重要作用, 重要性融合越重要. 为此协调系数 γ 的取值与证据源的可靠系数和重要权重密切相关. 本文采用 $\sum_i w_i / \max(w_i | \forall i)$ 和 $\sum_i \lambda_i / \max(\lambda_i | \forall i)$ 对二者予以处理, 一方面是使二者具有可比性, 另一方面是反映各个证据源在可靠性和重要性上的均衡性. 为了将证据源的可靠系数 λ_i 反映其中, 本文令 $\sum_i \lambda_i \lambda_i / \max(\lambda_i | \forall i)$. 遵循上述思想, 协调系数为

$$\gamma = \frac{\sum_i [(\lambda_i)^2 / \max(\lambda_i | \forall i)]}{\sum_i [w_i / \max(w_i | \forall i)] + \sum_i [(\lambda_i)^2 / \max(\lambda_i | \forall i)]}. \quad (10)$$

定理4 在利用式(10)确定协调系数时: 1) 当所有证据源都绝对可靠也都同等重要时, 有 $\gamma = 0.5$; 2) 当所有证据源都绝对可靠但重要程度未必相同时, 有 $0.5 \leq \gamma \leq 1$; 3) 当所有证据源都同等重要但可靠程度未必相同时, 有 $0 \leq \gamma \leq 0.5$.

证明 1) 当所有证据源都绝对可靠也都同等重要时, 有 $\lambda_i = 1(\forall i)$ 且 $w_i = w_{i'}(i \neq i')$, 将上述参数代入式(10)可得 $\gamma = 0.5$.

2) 当所有证据源都绝对可靠但重要程度不相同, 有 $\lambda_i = 1(\forall i)$ 且 $\exists w_{i'} \leq \max(w_i | i \neq i')$, 此时

$$\begin{cases} \sum_i [(\lambda_i)^2 / \max(\lambda_i | \forall i)] = I, \\ \sum_i [w_i / \max(w_i | \forall i)] = w_{i'} / \max(w_i | i \neq i') + \\ \sum_{i \neq i'} [w_i / \max(w_i | i \neq i')] \leq I - 1. \end{cases}$$

若设 $\sum_i [w_i / \max(w_i | \forall i)] = I'$, 则有 $I' \leq I$. 将上述结果代入式(10), 有 $\gamma = I / (I' + I)$, 其中 $I' \leq I$. 因 $I / (I + I) \leq \gamma \leq I / (0 + I)$, 故 $0.5 \leq \gamma \leq 1$.

3) 当所有证据源都同等重要但可靠程度不相同

时, 有 $w_i = 1/I(\forall i)$ 且 $\exists \lambda_{i'} \leq \max(\lambda_i | i \neq i')$, 此时

$$\begin{cases} \sum_i [w_i / \max(w_i | \forall i)] = I, \\ \sum_i [(\lambda_i)^2 / \max(\lambda_i | \forall i)] = \\ (\lambda_{i'})^2 / \max(\lambda_i | i \neq i') + \sum_{i \neq i'} [(\lambda_i)^2 / \max(\lambda_i | i \neq i')]. \end{cases}$$

若设 $\sum_i [(\lambda_i)^2 / \max(\lambda_i | i \neq i')] = I''$, 则 $I'' \leq I - 1$. 将上述结果代入式 (10), 有 $\gamma = I'' / (I'' + I)$, 其中 $0 \leq I'' \leq I$. 因 $0 / (0 + I) \leq \gamma \leq I / (I + I)$, 故 $0 \leq \gamma \leq 0.5$. \square

4 数值对比分析

设要评价方案 a 的优劣程度, 评价等级 (识别框架) 为 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) =$ (差, 较差, 中, 较好, 好), 由从事不同领域研究的 3 位专家 (证据源) $\{s_i | i = 1, 2, 3\}$ 开展评价, 他们的重要权重为 $w_1 = 0.5, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2$, 可靠系数为 $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 1.0, \lambda_3 = 0.8$. 下面借鉴科学研究中经常使用的一种对比方式, 在假设存在客观数据的情况下, 分别采用本文方法和现有方法对上述问题进行模拟求解, 通过对比二者结果与客观数据结果的差异验证方法的科学性.

4.1 客观数据与客观结果

设需从 3 个方面 (可以理解为属性或者指标, 表示为 $c_i (i = 1, 2, 3)$) 对方案的表现进行评价. 在每个方面对方案隶属于各个评价等级的情况进行前期 1 000 次观测, 观测结果见表 1.

方面	评价等级				
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
c_1	400	300	200	50	50
c_2	100	400	250	100	150
c_3	300	350	150	200	0

概率论中常基于频率定义事件的发生概率, 类似地, 方案在每个方面的表现隶属于特定评价等级的频率即可近似为其发生概率. 若设方案在 c_i 方面表现隶属于评价等级 θ_n 的次数为 Q_i^n , 则方案在 c_i 方面表现为 θ_n 的概率为

$$p_i^n = \frac{Q_i^n}{\sum_n Q_i^n}, i = 1, 2, 3, n = 1, 2, \dots, 5. \quad (11)$$

如: 方案在 c_1 方面表现为差、较差、中、较好、好的概率分别为 0.40、0.30、0.20、0.05、0.05.

类似于期望效用理论, 方案在 3 个方面的综合表现隶属于评价等级 θ_n 的概率可由其在每个方面的发生概率与该方面的重要权重进行加权平均得到, 即

$$p_n = \frac{\sum_i w_i p_i^n}{\sum_i w_i p_i^n}, n = 1, 2, \dots, 5.$$

因后文假设证据源 s_i 负责观测方案在 c_i 方面的表现, 故此处将 s_i 的重要权重 w_i 作为 c_i 方面的重要权重.

表 1 中数据由实际观测得到, 称为客观数据, 方案综合表现隶属于 θ_n 的概率源于对客观数据的分析, 称为客观结果. 因客观条件和决策成本的限制, 上述客观数据与客观结果在现实中是很难或无法得到的. 本文之所以假设给出上述数据, 一是为生成现有方法和本文方法的模拟输入数据, 二是为判别两种方法求解结果的优劣提供参照依据.

4.2 模拟数据生成

现有方法与本文方法的输入数据只有具有同源性, 二者的求解结果才具有可比性. 为了生成两种方法的模拟输入数据, 设专家 s_i 的专业领域为 c_i , 由其负责推断方案在 c_i 方面的表现情况. 推断数据的生成过程如下.

Step 1: 模拟专家经验知识有限. 考虑到在决策过程中专家经验知识总是有限的, 设每位专家仅观测到了其所在专业领域的 300 次数据 (客观数据有 1 000 次), 利用随机抽样方法从方案在 c_i 方面表现情况的所有观测数据中随机抽取 300 次模拟专家 s_i 所积累的经验知识, $i = 1, 2, 3$.

Step 2: 模拟专家可靠性. 专家的可靠系数越大, 其推断信息的准确性便越高. 结合 s_i 的可靠系数 λ_i , 将其观测到的 300 次数据中随机抽取 $300(1 - \lambda_i)$ 条数据并改变这些数据的取值, 实现对现实决策中可能存在错误推断的模拟. 在此基础上, 以上述 300 条数据为基础, 按照式 (11) 可得到专家 s_i 对方案表现为 θ_n 的概率形式的推断信息 (见表 2).

Step 3: 模拟信息不完备性. 在现实决策中专家的推断信息往往是不完备的——存在局部不确定或全局不确定, 因此为了模拟生成具有一般性的 BBA 函数形式的推断信息, 首先找到专家 s_i 给出的最为接近的概率推断 p_i^n 和 $p_i^{n'}$, 然后将二者对应的 θ_n 和 $\theta_{n'}$ 予以合并得到 $\{\theta_n, \theta_{n'}\}$, 最后随机选择 p_i^n 和 $p_i^{n'}$ 其中之一作为 $\{\theta_n, \theta_{n'}\}$ 的信度 (反映局部不确定性)、另一个作为识别框架的信度 (反映全局不确定). 由上述过程模拟生成如下式所示的专家推断证据 $m_i (i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} m_1 = \{(\theta_1, 0.357), (\theta_2, 0.311), (\theta_3, 0.199), \\ \quad ((\theta_4, \theta_5), 0.073), (\Theta, 0.060)\}, \\ m_2 = \{((\theta_1, \theta_4), 0.157), (\theta_2, 0.382), \\ \quad (\theta_3, 0.237), (\theta_5, 0.126), (\Theta, 0.099)\}, \\ m_3 = \{(\theta_1, 0.288), (\theta_2, 0.334), ((\theta_3, \theta_4), 0.176), \\ \quad (\theta_5, 0.029), (\Theta, 0.173)\}. \end{cases} \quad (12)$$

表2 方案在评价等级上表现的模拟概率

专家	评价等级				
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
s_1	0.357	0.311	0.199	0.073	0.060
s_2	0.157	0.382	0.236	0.099	0.126
s_3	0.288	0.334	0.176	0.173	0.029

4.3 融合结果与对比分析

按照DSmT理论和ER方法对重要权重和可靠系数的处理过程,基于3位专家模拟给出的证据 m_i ($i = 1, 2, 3$)、重要权重和可靠系数进行融合,得到以BBA形式存在的融合结果.为了使该结果与客观结果具有可比性,将上述融合结果按照式(6)转化为Pignistic概率,并与客观结果进行对比得到各个评价等级上的偏差(与客观结果之差的绝对值),见表3第3~6列.本文方法基于式(12)数据进行求解,首先按照前文证据折扣方法对式(12)数据进行折扣得到 m_1, m_2, m_3 ,然后按式(10)计算协调系数 $\gamma = 0.55$,再将 m_1, m_2, m_3 和 $\gamma = 0.55$ 代入式(9)进行融合得到 m ,最后将 m 按照式(6)转化为Pignistic概率,并计算其与客观结果的偏差,见表3第7~8列.

表3 融合结果对比分析

等级	客观概率	DSmT理论		ER方法		本文方法	
		概率	偏差	概率	偏差	概率	偏差
θ_1	0.290	0.319	0.029	0.197	0.093	0.288	0.002
θ_2	0.340	0.462	0.122	0.479	0.139	0.369	0.029
θ_3	0.205	0.185	0.020	0.218	0.013	0.212	0.007
θ_4	0.095	0.004	0.091	0.038	0.057	0.058	0.037
θ_5	0.070	0.030	0.040	0.068	0.002	0.073	0.003
合计	1.000	1.000	0.302	1.000	0.304	1.000	0.078

由表3可见,现有方法和本文方法求解得到的方案在各个评价等级上的概率都与客观结果之间存在一定的偏差.其中:DSmT理论的累计偏差是0.302、ER方法是0.304、本文方法是0.078.因为3种方法的输入数据是经过模拟专家经验知识有限、模拟专家可靠性、模拟信息不完备性3个步骤生成的,得到的模拟输入数据均与客观数据存在差异,所以由此求解得到的结果与客观结果之间存在一定的偏差是合理的.显然,就累计偏差而言,本文方法要明显优于现有的两种方法.

注意到,本文模拟生成的专家推断证据(式(12))并未考虑协调系数 γ 的影响.为了测试协调系数取值对融合结果的影响程度,令 γ 按步长0.1遍历取值区间[0,1],由此得到的系列融合结果和偏差如图1和图2所示.由图1和图2可见,当 γ 取值逐渐增大时,由本文方法融合得到的方案在各个评价等级上的概率,总体上先逐渐趋近于客观结果然后又远离客观结

果,并且本文方法计算结果与客观结果的总偏差先减小后逐渐增大,当 γ 取值在0.5附近时总偏差最小.由式(8)可知,当 $\gamma = 0$ 时,本文的补偿协调融合规则转化为具有补偿性的Murphy规则,当 $\gamma = 1$ 时变化为具有非补偿性的Dempster规则.由上述变化趋势可知,协调系数 γ 取值并非越大越好,也并非越小越好,这表明单一的补偿性规则或者非补偿性规则都难以获得接近于客观结果的满意结果,只有将二者协调融合才可能实现,本文方法恰好能够实现这一目的.另外,本文按式(10)计算协调系数 $\gamma = 0.55$,与模拟得到的当 γ 取值在0.5附近时总偏差最小的结论基本一致,这表明协调系数计算方法是有效的.由此可见,本文方法较现有方法更具科学性.

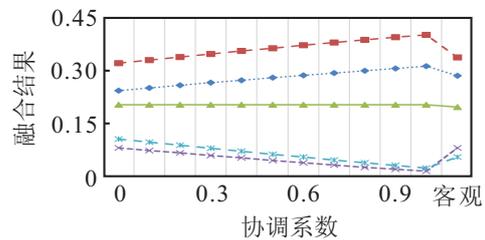


图1 融合结果的变化趋势

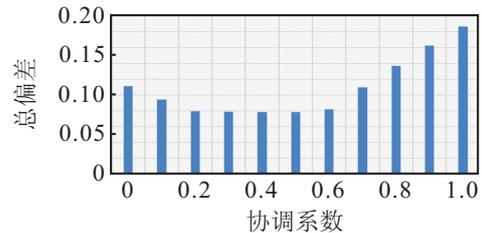


图2 结果总偏差的变化趋势

5 结论

虽然DSmT理论和ER方法关注到了证据源在可靠性和重要性两个方面的性质差异,也尝试着处理证据源同时存在可靠性和重要性的证据融合问题,但目前仅局限于折扣处理阶段,尚未深入到融合规则的构建之中.为了解决上述问题,本文首先阐述了DSmT理论和ER方法处理该类问题的解决思路,分析其中存在的问题;然后构建能够对基本信度分配函数进行可靠性/重要性双重折扣处理且满足交换律的证据折扣方法,在此基础上基于Dempster规则和Murphy规则从非补偿性与补偿性协调视角构建可以平衡可靠性和重要性的补偿协调融合规则;最后通过数值对比分析验证了所提出方法较现有两种方法更具科学性.本文创新之处在于:不仅从绝对与相对、客观与主观双重视角对证据源的可靠性与重要性予以区分,而且从证据折扣处理、融合规则构建等方面解决了证据源兼具可靠性和重要性的证据融合问题.需要说明的是:本文仅研究了基于Dempster规则和Murphy规则构建协调融合规则的问题,其他融合规则是否也

适用于此类规则构建是下一步的研究重点。

参考文献(References)

- [1] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976: 15-28.
- [2] Mercier D, Quost B, Den U T. Refined modeling of sensor reliability in the belief function framework using contextual discounting[J]. Information Fusion, 2008, 9(2): 246-258.
- [3] Denoeux T, Smets P. Classification using belief functions: The relationship between the case-based and model-based approaches[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2006, 36(6): 1395-1406.
- [4] Zhu H W, Basir O. Extended discounting scheme for evidential reasoning as applied to MS lesion detection[C]. Proc of the 7th Int Conf on Information Fusion. Waterloo, 2004: 280-287.
- [5] Elouedi Z, Mellouli K, et al. Assessing sensor reliability for multisensor data fusion within the transferable belief model[J]. IEEE Trans on System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 782-787.
- [6] Guo H, Shi W, Deng Y. Evaluating sensor reliability in classification problems based on evidence theory[J]. IEEE Trans System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2006, 36(5): 970-981.
- [7] 付耀文, 贾宇平, 杨威, 等. 传感器动态可靠性评估与证据折扣[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(1): 212-216. (Fu Y W, Jia Y P, Yang W, et al. Sensor dynamic reliability evaluation and evidence discount[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(1): 212-216.)
- [8] Fu C, Yang J, Yang S. A group evidential reasoning approach based on expert reliability[J]. European J of Operational Research, 2015, 246(3): 886-893.
- [9] Pawel B, Andrzejczak A, Pietrzak P, et al. Extended sensor reliability evaluation method in multi-sensor control systems[J]. Microelectronics Reliability, 2015, 55(3/4): 671-678.
- [10] Malcolm B. DS/AHP method: A mathematical analysis, including an understanding of uncertainty[J]. European J of Operational Research, 2002, 140(1): 148-164.
- [11] Malcolm J B. A method of aggregation in DS/AHP for group decision-making with the non-equivalent importance of individuals in the group[J]. Computers & Operations Research, 2005, 32(7): 1881-1896.
- [12] Smarandache F, Dezert J. Fusion of sources of evidence with different importances and reliabilities[C]. The 13th Conf on Information Fusion. Edinburgh: IEEE, 2010: 1-8.
- [13] Yang J, Xu D. Evidential reasoning rule for evidence combination[J]. Artificial Intelligence, 2013, 205(205): 1-29.
- [14] 杜元伟, 段万春, 黄庆华, 等. 基于头脑风暴原则的主观证据融合决策方法[J]. 中国管理科学, 2015, 23(3): 130-140. (Du Y W, Duan W C, Huang Q H, et al. Decision making method for integrating subjective evidences based on brain storming principles[J]. Chinese J of Management Science, 2015, 23(3): 130-140.)
- [15] Mkrtchyan L, Podofilini L, Dang V N. Bayesian belief networks for human reliability analysis: A review of applications and gaps[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2015, 139(139): 1-16.
- [16] Zhu W, Harry T. Modelling pedestrian go-home decisions: A comparison of linear and nonlinear compensatory, and conjunctive non-compensatory specifications[J]. J of Retailing and Consumer Services, 2009, 16(3): 227-231.
- [17] Shiloh S, Koren S, Zakay D. Individual differences in compensatory decision-making style and need for closure as correlates of subjective decision complexity and difficulty[J]. Personality and Individual Differences, 2001, 30(4): 699-710.
- [18] Elrod T, Johnson R D, White J. A new integrated model of noncompensatory and compensatory decision strategies[J]. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 2004, 95(1): 1-19.
- [19] Janis I, Mann L. Decision making: A psychological analysis of conflict, choice and commitment[M]. New York: The Free Press, 1977: 35-50.
- [20] Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. J of the Royal Statistical Society, 1977, 39(1): 1-38.
- [21] Philippe S. Analyzing the combination of conflicting belief functions[J]. Information Fusion, 2007, 8(4): 387-412.
- [22] Smarandache F, Dezert J. Advances and applications of DSmt for information fusion[M]. American Research Press, 2009: 40-46.
- [23] Murphy C K. Combining belief functions when evidence conflicts[J]. Decision Support Systems, 2000, 29(1): 1-9.
- [24] 杨风暴, 王晓霞. D-S 证据理论的冲突证据合成方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 131-153. (Yang F B, Wang X X. Conflicting evidence combination method for D-S evidence theory[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2010: 131-153.)

(责任编辑: 郑晓蕾)