第 31 卷 第 10 期
Vol. 31 No. 10

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 10 月
Oct. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 10-1757-08 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.1042

基于改进熵和新得分函数的区间直觉模糊多属性决策

高明美[1,2], 孙 涛[1], 朱建军[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211106；2. 青岛大学 数学科学学院，山东 青岛 266071)

摘 要: 针对决策信息为区间直觉模糊数且属性权重完全未知的多属性决策问题, 提出基于改进的区间直觉模糊熵和新得分函数的决策方法. 首先, 利用改进的区间直觉模糊熵确定属性权重; 然后, 利用区间直觉模糊加权算术平均算子集成信息, 得到各备选方案的综合属性值, 进而指出现有得分函数存在排序失效或排序不符合实际的不足, 同时给出一个新的得分函数, 并以此对方案进行排序; 最后, 通过实例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 多属性决策；区间直觉模糊集；区间直觉模糊熵；得分函数

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attribute decision-making method based on revised fuzzy entropy and new scoring function

GAO Ming-mei[1,2], *SUN Tao*[1], *ZHU Jian-jun*[1]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211106, China；2. College of Mathematics，Qingdao University，Qingdao 266071，China．Correspondent：GAO Ming-mei, E-mail：qdgaomingmei@126.com)

Abstract: An interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attribute decision-making model is proposed based on the revised entropy and a new scoring function. In this model, the attribute values are the interval-valued intuitionistic fuzzy numbers, and the attribute weights are completely unknown. Firstly, a revised definition of the interval-valued intuitionistic fuzzy entropy is introduced, and the objective attribute weights are determined by using the entropy weight method. Then, according to the decision matrix and attribute weight, the synthesized attribute value of each project is got by using the interval-valued intuitionistic fuzzy weighted arithmetic average operator. The deficiencies of the current scoring functions which fail to sort or could not conform to the reality are analyzed, and a new scoring function is proposed. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: multi-criteria decision-making；interval-valued intuitionistic fuzzy set；interval intuitionistic fuzzy entropy；scoring function

0 引 言

Atanassovd 等[1]于 1989 年便提出了区间直觉模糊集的概念. 区间直觉模糊集将直觉模糊集的隶属度和非隶属度由属于区间 $[0,1]$ 的一个精确数值推广为 $[0,1]$ 上的区间数, 故在处理不确定性信息时更为灵活. 近年来, 对区间直觉模糊多属性决策问题的研究引起了学者们广泛的关注.

在区间直觉模糊多属性决策问题中, 属性权重的确定是一个重要环节. 文献 [2-4] 和文献 [5-9] 分别针对属性权重已知的多属性决策问题和权重信息不完全已知的情形进行了研究; 而对于属性权重信息一无所知的多属性决策问题, 文献 [10-13] 建立了目标规划模型来获取属性权重, 文献 [14-19] 则利用区间直觉模糊熵确定属性权重. 区间直觉模糊熵是度量区间直觉模糊集“不确定性、模糊性”程度的工具, 信息量越大, 不确定性、模糊性程度越小, 熵值越小. 然而, 文献 [14-19] 中熵的定义不满足区间直觉模糊熵的基本约束条件, 尤其所给出的区间直觉模糊熵取得最值的充要条件不符合实际, 这便间接影响了属性权重的确定以及最终决策结果.

收稿日期: 2015-08-18；**修回日期:** 2015-12-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71571108, 71273148, 71503103)；山东省自然科学基金项目(ZR2014AM019)；江苏省高校研究生培养创新基金项目(CXLX12_0178).

作者简介: 高明美(1977–), 女, 副教授, 博士生, 从事模糊理论及应用、不确定决策分析的研究；孙涛(1959–), 男, 教授, 博士生导师, 从事环境治理、公司理财等研究.

为了比较两个区间直觉模糊数的优劣, 徐泽水[2]于 2007 年定义了区间直觉模糊数的得分函数与精确函数作为排序函数. 随后, 卫贵武[6]、Qi 等[13]、孙贵玲等[19]、刘勇等[20]和吴冲等[21]均直接将徐泽水[2]的得分函数或精确函数应用于区间直觉模糊决策过程中. 然而, 徐泽水[2]的排序规则对于某些区间直觉模糊数存在无法比较优劣的情况. 之后, 为了弥补徐泽水[5]的排序函数的缺陷, 部分学者陆续提出了新的排序函数. Wang 等[7]提出了 4 个得分函数指标作为排序区间直觉模糊数的方法, 但该方法涉及指标过多, 不易操作. 之后, 对于区间直觉模糊数的排序, Lakshmana 等[3]和 Ye[22]提出了新的得分函数, 但仍未能克服排序失效的情况. 王中兴等[4]、高建伟等[12]和康婧等[23]通过对犹豫度进行再分配, 提出了新的排序函数. 戚筱雯等[15]、谢海滨等[24]各自从几何角度给出得分函数, 但同样存在对某些区间直觉模糊数无法排序的情况. 魏翠萍等[25]考虑到决策者风险偏好, 给出了含参数的得分函数, 但参数的合理选取难以确定, 且对于风险中立者仍存在排序失效的情况.

针对现有方法存在的问题, 本文合理地规范了区间直觉模糊熵取得最值的充要条件, 给出一个改进的区间直觉模糊熵定义; 针对目前区间直觉模糊数的得分函数存在排序失效或者排序不符合实际的问题, 提出一个新得分函数, 在一定程度上能够弥补排序失效的缺陷; 基于改进的区间直觉模糊熵和新得分函数, 提出一种属性值为区间直觉模糊数且属性权重完全未知的多属性决策方法, 并通过案例阐明了该方法的有效性.

1 区间直觉模糊集的基本知识

定义 1 [1] 假设 $\mathrm{int}[0,1]$ 表示区间数 $[0,1]$ 的闭子集的全体, X 为某给定的论域, 称

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$$

为论域 X 上的区间直觉模糊集 (IVIFSs(X)). 其中

$$\mu_A(x):X\to \mathrm{int}[0,1],\ \nu_A(x):X\to \mathrm{int}[0,1],$$

且满足 $0\leqslant \sup\mu_A(x)+\sup\nu_A(x)\leqslant 1,\forall x\in X$. 区间数 $\mu_A(x)$、$\nu_A(x)$ 分别表示 X 中的元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度. 记

$$\mu_A(x)=[\mu_A^L(x),\mu_A^U(x)],$$

$$\nu_A(x)=[\nu_A^L(x),\nu_A^U(x)],$$

则区间直觉模糊集 A 可写成

$$A=\{\langle x,[\mu_A^L(x),\mu_A^U(x)],[\nu_A^L(x),\nu_A^U(x)]\rangle|x\in X\},$$

称 $\pi_A(x)=[\pi_A^L(x),\pi_A^U(x)]$ 为元素 x 属于 A 的犹豫度. 其中

$$\pi_A^L(x)=1-\mu_A^U(x)-\nu_A^U(x),$$

$$\pi_A^U(x)=1-\mu_A^L(x)-\nu_A^L(x).$$

特别地, 当 $\mu_A^L(x)=\mu_A^U(x)$, $\nu_A^L(x)=\nu_A^U(x)$ 时, 区间直觉模糊集退化成直觉模糊集.

为简化形式, 记 $\alpha=([a,b],[c,d])$ 为一个区间直觉模糊数. 其中 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$, $0\leqslant c\leqslant d\leqslant 1$, $0\leqslant b+d\leqslant 1$.

对于区间直觉模糊数 $\alpha=([0.1,0.2],[0.5,0.7])$, 可用投票模型解释, 即为: 对于某一个方案, 若有 100 人参加投票, 则有 $10\sim 20$ 人投了赞成票, $50\sim 70$ 人投了反对票, $10\sim 40$ 人犹豫不决 (弃权).

对于两个区间直觉模糊集

$$A=\{\langle x,[\mu_A^L(x),\mu_A^U(x)],[\nu_A^L(x),\nu_A^U(x)]\rangle|x\in X\},$$

$$B=\{\langle x,[\mu_B^L(x),\mu_B^U(x)],[\nu_B^L(x),\nu_B^U(x)]\rangle|x\in X\},$$

有以下关系:

1) $A\subseteq B\Leftrightarrow \mu_A^L(x)\leqslant\mu_B^L(x),\mu_A^U(x)\leqslant\mu_B^U(x)$, $\nu_A^L(x)\geqslant\nu_B^L(x),\nu_A^U(x)\geqslant\nu_B^U(x)$;

2) $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 同时成立;

3) $A^C=\{\langle x,[\nu_A^L(x),\nu_A^U(x)],[\mu_A^L(x),\mu_A^U(x)]\rangle|x\in X\}$.

对于任意的两个区间直觉模糊数 $\alpha_1=([a_1,b_1],[c_1,d_1])$, $\alpha_2=([a_2,b_2],[c_2,d_2])$, 有如下运算规则[5]:

$$\alpha_1\bigcap\alpha_2=$$
$$([\min(a_1,a_2),\min(b_1,b_2)],[\max(c_1,c_2),\max(d_1,d_2)]);$$

$$\alpha_1\bigcup\alpha_2=$$
$$([\max(a_1,a_2),\max(b_1,b_2)],[\min(c_1,c_2),\min(d_1,d_2)]);$$

$$\alpha_1+\alpha_2=$$
$$([a_1+a_2-a_1a_2,b_1+b_2-b_1b_2],[c_1c_2,d_1d_2]);$$

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=$$
$$([a_1a_2,b_1b_2],[c_1+c_2-c_1c_2,d_1+d_2-d_1d_2]);$$

$$\lambda\alpha_1=([1-(1-a_1)^\lambda,1-(1-b_1)^\lambda],[c_1^\lambda,d_1^\lambda]),\ \lambda>0;$$

$$\alpha_1^\lambda=([a_1^\lambda,b_1^\lambda],[1-(1-c_1)^\lambda,1-(1-d_1)^\lambda]),\ \lambda>0.$$

定义 2 [2] 设 $\alpha_j=([a_j,b_j],[c_j,d_j])(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组区间直觉模糊数. 则称

$$F_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^n w_j\alpha_j=\Big(\Big[1-\prod_{j=1}^n(1-a_j)^{w_j},1-\prod_{j=1}^n(1-b_j)^{w_j}\Big],\Big[\prod_{j=1}^n c_j^{w_j},\prod_{j=1}^n d_j^{w_j}\Big]\Big)\tag{1}$$

为区间直觉模糊加权算术平均算子; 称

$$G_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{w_j}=\left(\left[\prod_{j=1}^{n}a_j^{w_j},\prod_{j=1}^{n}b_j^{w_j}\right],\left[1-\prod_{j=1}^{n}(1-c_j)^{w_j},1-\prod_{j=1}^{n}(1-d_j)^{w_j}\right]\right)\tag{2}$$

为区间直觉模糊加权几何平均算子. 其中: $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 为 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量, 且 $0<w_j<1,\sum_{j=1}^{n}w_j=1$.

两个算子的侧重点不同, 加权算术平均算子侧重于群体影响, 而对某个个体对象 α_j 的影响不是很敏感; 加权几何平均算子则侧重于个体影响.

2　基于改进的区间直觉模糊熵和新得分函数的模糊多属性决策

2.1　目前区间直觉模糊熵取得最值的充要条件的缺陷分析

以戚筱雯等[15]提出的区间直觉模糊熵的公理化定义为例, 分析目前文献所涉及到的熵定义的缺陷.

定义 3 [15]　若一个实值函数 $e:\mathrm{IVIFSs}(X)\to[0,1]$ 满足以下 4 条约束, 则称实值函数 e 为区间直觉模糊熵:

1) $e(A)=0\Leftrightarrow A=\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle|x\in X\}$ 或 $A=\{\langle x,[0,0],[1,1]\rangle|x\in X\}$;

2) $e(A)=1\Leftrightarrow A=\{\langle x,[0.5,0.5],[0.5,0.5]\rangle|x\in X\}$;

3) $e(A)=e(A^C)$;

4) $\forall\alpha_1=([a_1,b_1],[c_1,d_1])$、$\alpha_2=([a_2,b_2],[c_2,d_2])$, 若 $d(\alpha_1,([0.5,0.5],[0.5,0.5]))\geqslant d(\alpha_2,([0.5,0.5],[0.5,0.5]))$, 则 $e(A)\leqslant e(B)$.

缺陷分析: 对于区间直觉模糊熵取得最小值的充要条件, 定义 3 认为 "当且仅当集合 $A=\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle|x\in X\}$ 或 $A=\{\langle x,[0,0],[1,1]\rangle|x\in X\}$ 时, x 与 X 的关系最明朗, 不存在任何模糊性, 此时熵取得最小值". 这一充要条件是合理的, 与 Ye[14]、陈晓红等[16]、陈志旺等[18]、Zhang 等[26]、Zhang 等[27]的观点一致. 对于此条约束, 张英俊等[17]却认为 "$e_{\min}(A)=0\Leftrightarrow A$ 是 Fuzzy 集", 这显然忽视了 Fuzzy 集自身存在的模糊性.

在熵取得最大值的充要条件中, 定义 3 认为 "$e(A)=1\Leftrightarrow A=\{\langle x,[0.5,0.5],[0.5,0.5]\rangle|x\in X\}$", 该充要条件也出现在 Zhang 等[27]定义的区间直觉模糊熵中, 然而这是不符合实际直觉的. 事实上, 只有当 A 为 Fuzzy 集时, 即当 $A\in\mathrm{FSs}(X)$, $\mu_A(x)=0.5$ 时, x 与 X 关系最模糊, 此时毋庸置疑 Fuzzy 熵值最大; 而当 A 为区间直觉模糊集时, 若

$$\mu_A^L(x)=\mu_A^U(x)=\nu_A^L(x)=\nu_A^U(x)=0.5,$$

则尽管有 $\mu_A(x)=\nu_A(x)$, 但 $\mu_A(x)=\nu_A(x)=0.5$ 与 $\mu_A(x)=\nu_A(x)=0$ 相比, 前者蕴含的信息量更多一点. Ye[14]、陈晓红等[16]、张英俊等[17]、陈志旺等[18]、孙贵玲等[19]给出的区间直觉模糊熵取得最大值的充要条件是 "$e(A)=1\Leftrightarrow[\mu_A^L(x),\mu_A^U(x)]=[\nu_A^L(x),\nu_A^U(x)]$", 将诸如 $([0,0],[0,0])$、$([0.1,0.1],[0.1,0.1])$、$([0.5,0.5],[0.5,0.5])$ 等区间直觉模糊数的熵值视为相等, 这显然忽视了犹豫度对熵的贡献.

2.2　改进的区间直觉模糊熵

通过对区间直觉模糊熵取得最值的充要条件的分析可知, 文献 [14-19, 27] 均存在一定的缺陷, 故本文在借鉴文献 [14-16, 18, 26-27] 最小熵值的充要条件及文献 [28] 最大熵值的充要条件的基础上, 提出如下区间直觉模糊熵公理化定义.

定义 4　对于一个实值函数 $e:\mathrm{IVIFSs}(X)\to[0,1]$, 如果满足如下约束要求, 则称实值函数 e 为区间直觉模糊熵:

1) $e(A)=0\Leftrightarrow A$ 为分明集;

2) $e(A)=1\Leftrightarrow A=\{\langle x,[0,0],[0,0]\rangle|x\in X\}$;

3) $e(A)=e(A^C)$;

4) 对于任意的两个区间直觉模糊集 A、B, 若当 $\mu_B^L(x)\leqslant\nu_B^L(x)$、$\mu_B^U(x)\leqslant\nu_B^U(x)$ 时, 有 $A\subseteq B$, 或当 $\mu_B^L(x)\geqslant\nu_B^L(x)$、$\mu_B^U(x)\geqslant\nu_B^U(x)$ 时, 有 $B\subseteq A$, 则 $e(A)\leqslant e(B)$.

实际上, 定义 4 是对文献 [14-19, 26-27] 提出的熵公理化定义进行了合理的整合. 条件 1) 规范了熵取得最小值的充要条件, 指出 "当且仅当一个区间直觉模糊集退化为分明集时, 元素与集合之间的关系没有丝毫模糊性, 信息量最大, 熵值此时取得最小值" 是合理的; 条件 2) 规范了熵取得最大值的充要条件, 指出 "当且仅当 $A=\{\langle x,[0,0],[0,0]\rangle|x\in X\}$ 时, A 熵取得最大值", 若用投票模型解释, 即当且仅当支持票为 0、反对票为 0、人们全部弃权时, 该候选对象的模糊性、不确定性程度达到最大, 熵值取得最大值, 这是符合实际的; 对于条件 3), 因为一个集合和其补集的模糊程度完全相同, 故熵值相等; 条件 4) 认为 "当 A 是 B 的锐化集合时, 集合 A 的模糊性比集合 B 的模糊性要小", 这与文献 [28-29] 给出的两个集合的熵值大小比较的充分条件是一致的, 而戚筱雯等[15]提出的定义 3 中的条件 4) 是从两个区间直觉模糊集合之间的距离角度给出的熵值大小比较的充分条件, 然而选取不同的距离公式可能会影响熵值大小

比较的结果.

下面构造一个满足上述定义 4 的区间直觉模糊熵计算公式.

定理 1 假设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A\in$ IVIFSs(X), 则

$$e(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{4-[|\mu_A^L(x_i)-\nu_A^L(x_i)|+|\mu_A^U(x_i)-\nu_A^U(x_i)|]^2+[\pi_A^L(x_i)+\pi_A^U(x_i)]^2\}/8 \tag{3}$$

是满足改进的区间直觉模糊熵定义 4 的一个区间直觉模糊熵公式.

对于定理 1 的证明, 只要证明式 (3) 满足定义 4 的条件 1) ∼ 条件 4) 即可, 限于篇幅, 证明过程略.

当 $\mu_A^L(x)=\mu_A^U(x)$、$\nu_A^L(x)=\nu_A^U(x)$时, 式 (3) 退化为文献 [28] 的直觉模糊熵公式.

定义 5 在区间直觉模糊多属性决策问题中, 有 n 个备选方案, m 个属性, 若第 i 方案第 j 个属性值 r_{ij} 可表示为

$$r_{ij}=([\mu_{ij}^L,\mu_{ij}^U],[\nu_{ij}^L,\nu_{ij}^U]),$$

$$i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m,$$

则第 $j\,(j=1,2,\cdots,m)$ 个属性的区间直觉模糊熵为

$$E_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e(r_{ij})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{4-[|\mu_{ij}^L-\nu_{ij}^L|+|\mu_{ij}^U-\nu_{ij}^U|]^2+[\pi_{ij}^L+\pi_{ij}^U]^2}{8}, \tag{4}$$

第 j 个属性的权重可表示为

$$w_j=\frac{1-E_j}{m-\sum_{j=1}^{m}E_j}. \tag{5}$$

当每个方案的属性信息数据是区间直觉模糊数时, 从体现原始决策信息的视角看, 属性信息越模糊、越不确定, 该属性对于方案的可用信息量越少, 熵值越大, 应赋予较小的权重, 反之亦然. 故利用区间直觉模糊熵确定属性指标权重, 既能减少评价信息的流失, 又能真实地反映决策者的意愿.

2.3 现有得分函数的不足

区间直觉模糊数的优劣排序是区间直觉模糊决策中一个非常重要的内容.

对于区间直觉模糊数 $\alpha=([a,b],[c,d])$ 优劣排序的研究越来越受到学者们的关注. 2007 年, 徐泽水[2]将 Chen 等[30]定义的直觉模糊集的得分函数以及 Hong 等[31]定义的精确函数推广到区间直觉模糊集中, 分别定义了得分函数和精确函数

$$s(\alpha)=\frac{1}{2}[(a+b)-(c+d)],$$

$$h(\alpha)=\frac{1}{2}[(a+b)+(c+d)],$$

并给出如下排序规则: 得分值 $s(\alpha)$越大, 区间直觉模糊数越优; 当得分值 $s(\alpha)$ 相同时, 再看精确函数值 $h(\alpha)$, $h(\alpha)$ 越大, 该区间直觉模糊数越优. 但是, 该排序法不仅区分不出很多区间直觉模糊数的大小, 而且也存在着片面性.

例 1 $\alpha_1=([0.35,0.45],[0.2,0.3])$, $\alpha_2=([0.3,0.5],[0.15,0.35])$.

利用徐泽水[2]的排序函数, 得

$$s(\alpha_1)=s(\alpha_2)=0.15,\ h(\alpha_1)=h(\alpha_2)=0.65,$$

此时, 无法判断 α_1 和 α_2 的优劣, 该排序方法失效.

卫贵武[6]、Qi 等[13]、孙贵玲等[19]、刘勇等[20]和吴冲等[21]均直接将 $s(\alpha)$、$h(\alpha)$ 应用于区间直觉模糊多属性决策过程中, 有时会影响最终决策的正确排序.

2009 年, Ye[22]在指出徐泽水[2]的缺陷后, 从犹豫度视角提出如下得分函数:

$$M(\alpha)=\frac{a-(1-a-c)+b-(1-b-d)}{2}=a+b-1+\frac{c+d}{2}.$$

然而, 对于例 1 中的 α_1、α_2, 有 $M(\alpha_1)=0.05$, $M(\alpha_2)=0.05$, 仍然不能判断谁优谁劣, 该排序方法失效, 且在下例中出现不符合实际决策的排序.

例 2 $\alpha_3=([0.1,0.2],[0.6,0.8])$, $\alpha_4=([0.4,0.5],[0.01,0.02])$, 显然 $\alpha_3\subset\alpha_4$, α_4 明显优于 α_3. 而 $M(\alpha_3)=0$, $M(\alpha_4)=-0.085$, $M(\alpha_3)>M(\alpha_4)$, 即 $\alpha_3\succ\alpha_4$, 这显然不符合实际.

2009 年, Wang 等[7]为了解决在某些区间直觉模糊数排序失效的情况, 在 $s(\alpha)$、$h(\alpha)$ 基础上增添了两个排序函数, 即

$$t(\alpha)=b+c-a-d,$$

$$g(\alpha)=b+d-a-c.$$

其排序规则是: $s(\alpha)$ 越大, 区间直觉模糊数越优; 当 $s(\alpha)$ 相等时, 再看 $h(\alpha)$, $h(\alpha)$ 越大, 区间直觉模糊数越优; 当 $h(\alpha)$ 相等时, 再看 $t(\alpha)$, $t(\alpha)$ 越大, 区间直觉模糊数越优; 当 $t(\alpha)$ 相等时, 再看 $g(\alpha)$, $g(\alpha)$ 越大, 区间直觉模糊数越优. 虽然 Wang 等[7]的排序函数能够比较优劣, 但排序函数有 4 个, 计算量较大.

2009 年, 魏翠萍等[25]根据决策者对风险的不同偏好, 给出了一个带两个参数的得分函数. 但是, 在实际决策中参数的选取不好确定, 且在风险中立的情况下也存在排序失效的情况.

2011 年, Lakshmana 等[3]指出徐泽水[2]的精确函

数 $h(\alpha)$ 及 Ye[22] 的精确函数 $M(\alpha)$ 的不足后, 提出了如下得分函数:

$$L(\alpha)=\frac{a+b-d(1-b)-c(1-a)}{2},$$

但仍存在排序失效的情况.

例 3　$\alpha_5=([0.5,0.5],[0.2,0.4])$, $\alpha_6=([0.5,0.5],[0.25,0.35])$, 利用 Lakshmana 等[3] 的得分函数得 $L(\alpha_5)=0.35, L(\alpha_6)=0.35, L(\alpha_5)=L(\alpha_6)$, 无法判断 α_5、α_6 优劣, 排序失效.

2011 年, 戚筱雯等[15] 从区间直觉模糊数的几何意义出发, 提出如下一种排序方法:

$$v(\alpha)=\lambda\frac{bd-ac}{2}+(1-\lambda)\frac{bd+ac}{2}.$$

其中 λ 反映了 $S=\dfrac{bd-ac}{2}$ 相对于 $s=\dfrac{bd+ac}{2}$ 的重要程度, 一般情况下 $\lambda=0.5$.

戚筱雯等[15] 认为: 若将区间直觉模糊熵值大小和区间直觉模糊数的优劣反映在几何图形中, 就是某区域所对应的面积大小. 但是, 戚筱雯等[15] 在该得分函数的推导分析中, 利用的是区间直觉模糊熵 $e(\alpha)$ 取得最大值的充要条件为

$$\alpha=([0.5,0.5],[0.5,0.5]),$$

这显然是不符合实际的, 已在前文指出. 另外, 当 $\lambda=0.5$ 时, 有

$$\nu(\alpha)=\frac{bd}{2},$$

显然, 此得分函数值仅依赖 b 和 d 的取值, 必然分辨不出很多区间直觉模糊数的优劣, 比如 $\alpha_7=([0.8,0.8],[0.2,0.2])$, $\alpha_8=([0,0.4],[0.4,0.4])$, α_7 明显优于 α_8, 然而, 有 $\nu(\alpha_7)=\nu(\alpha_8)=0.08$, 排序失效.

2012 年, 谢海斌等[24] 在分析了徐泽水[2]、Lakshmana 等[3]、Wang 等[7] 的得分函数的不足后, 也从几何角度提出了如下得分函数:

$$M(\alpha)=\frac{a+b-c-d}{2}+\frac{a-ad-a^2}{2(c-bc-c^2+1)},$$

但同样对于某些区间直觉模糊数, 该排序函数失效. 例如, 对于 $\alpha_9=([0,0.4],[0,0.4])$, $\alpha_{10}=([0,0.5],[0,0.5])$, 有 $M(\alpha_9)=M(\alpha_{10})$, 该排序函数失效.

2014 年, 高建伟等[12] 提出了如下精确得分函数:

$$S_P(\alpha)=\frac{a+b-c-d}{(1-b-d)+(1-a-c)+2}=\frac{a+b-c-d}{4-(a+b+c+d)}.$$

显然, 只要某些区间直觉模糊数的 $a+b$ 及 $c+d$ 的值相等, 所对应的得分函数值就相等. 此时, 该得分函数失效, 如对于例 1 的两个区间直觉模糊数, $S_P(\alpha_1)=S_P(\alpha_2)$, 无法区分优劣.

2.4　新的得分函数

徐泽水[2] 的得分函数 $s(\alpha)$ 强调了隶属度和非隶属度的绝对差距而忽略了犹豫度对决策的影响, 精确函数 $h(\alpha)$ 强调了有用信息对决策的贡献. 然而, $s(\alpha)$、$h(\alpha)$ 均没有考虑弃权部分对决策结果的影响. 张恩瑜等[32] 将有用信息和弃权信息进行了整合, 提出了 Vague 集 (与直觉模糊集等价) 环境下的得分函数. 然而, 文献 [33] 指出, 张恩瑜等[32] 的得分函数遇到多个备选方案的隶属度和非隶属度相等时, 其得分函数值均为 0, 本质上仍是忽视了有用信息对排序结果的影响, 故文献 [33] 将 Hong 等[31] 定义的精确函数以及张恩瑜等[32] 的得分函数二者结合、优势互补, 提出了一个新的排序函数. 本文将文献 [33] 的思想应用于区间直觉模糊集中, 考虑到区间直觉模糊数中隶属度、非隶属度的绝对差距和有用信息以及弃权信息对决策的影响, 提出如下的区间直觉模糊数的得分函数.

定义 6　对于区间直觉模糊数 $\alpha=([a,b],[c,d])$, 令

$$G(\alpha)=\frac{1}{4}(a-c+b-d)\Big(1+\frac{1}{a+b-ac+bd}\Big) \tag{6}$$

为区间直觉模糊数 α 的得分函数. 其排序规则是: $G(\alpha)$ 越大, 区间直觉模糊数越优; 当 $G(\alpha)$ 相等时, 再看有用信息量 $h(\alpha)$, $h(\alpha)$ 越多, 区间直觉模糊数越优.

下面利用定义 6 的得分函数对前面例子中的区间直觉模糊数进行排序.

在例 1 中, $G(\alpha_1)>G(\alpha_2)$, 故 α_1 优于 α_2;

在例 2 中, $G(\alpha_3)<G(\alpha_4)$, 故 α_4 优于 α_3;

在例 3 中, $G(\alpha_5)>G(\alpha_6)$, 故 α_5 优于 α_6, 而对于 α_7、α_8, 有 $G(\alpha_7)>G(\alpha_8)$, 从而 α_7 优于 α_8;

在例 4 中, $G(\alpha_9)=G(\alpha_{10})$, $h(\alpha_9)<h(\alpha_{10})$, α_{10} 优于 α_9, 符合实际.

2.5　决策步骤

综上, 在属性权重完全未知的情况下, 提出一种基于改进的区间直觉模糊熵及新得分函数的多属性模糊决策, 其决策步骤如下.

Step 1: 对于某区间直觉模糊多属性决策问题, 决策者对于方案 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 关于属性 $C_j(j=1,2,\cdots,m)$ 进行测度, 给出 A_i 关于属性 C_j 的属性值为区间直觉模糊数 $r_{ij}=([a_{ij},b_{ij}],[c_{ij},d_{ij}])$, 从而得到决策矩阵

$$R=(r_{ij})_{m\times n},\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m.$$

Step 2: 根据决策矩阵信息, 利用改进的区间直觉模糊熵的计算式 (4) 和 (5) 求出属性 C_j 的权重 $w_j, j=1,2,\cdots,m$.

Step 3: 为突出所有属性对于方案的影响, 利用式 (1) 求出决策方案 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的综合属性值 r_i, $i=1,2,\cdots,n$, 其中

$$r_i=([a_i,b_i],[c_i,d_i])=$$
$$\Big(\Big[1-\prod_{j=1}^{m}(1-a_{ij})^{w_j},1-\prod_{j=1}^{m}(1-b_{ij})^{w_j}\Big],$$
$$\Big[\prod_{j=1}^{m}c_{ij}^{w_j},\prod_{j=1}^{m}d_{ij}^{w_j}\Big]\Big).$$

Step 4: 利用新得分函数(6), 求出各方案 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的综合属性值 r_i 的得分函数值 $G(r_i)$.

Step 5: 根据得分函数值 $G(r_i)$ 的大小对备选方案进行排序.

3 实例分析

为了便于比较, 本文采用文献[3]和文献[22]中的常用数据. 某家风险投资公司欲对4家可供选择的企业(汽车公司 A_1, 食品公司 A_2, IT公司 A_3, 武器配备公司 A_4)进行风险评估, 投资公司依据3个评价属性(风险分析 C_1, 成长分析 C_2 和环境影响分析 C_3)从4家公司选择最佳投资公司. 通过统计处理后, 决策者给出的每个备选公司在各属性下的评价信息可表示为区间直觉模糊数, 如表1所示.

表1 备选公司在各属性下的评价信息

备选企业	C_1	C_2	C_3
A_1	$([0.4,0.5],[0.3,0.4])$	$([0.4,0.6],[0.2,0.4])$	$([0.1,0.3],[0.5,0.6])$
A_2	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.4,0.8],[0.1,0.2])$
A_3	$([0.3,0.6],[0.3,0.4])$	$([0.5,0.6],[0.3,0.4])$	$([0.4,0.5],[0.1,0.3])$
A_4	$([0.7,0.8],[0.1,0.2])$	$([0.6,0.7],[0.1,0.3])$	$([0.3,0.4],[0.1,0.2])$

利用改进的区间直觉模糊熵的计算公式(4)和(5)求出属性 $C_j(j=1,2,3)$ 的权重分别为
$$w_1=0.334,\ w_2=0.402,\ w_3=0.264.$$

利用式(1)求出决策方案 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的综合属性值 r_i 分别为
$$r_1=([0.332,0.501],[0.292,0.445]),$$
$$r_2=([0.555,0.73],[0.167,0.27]),$$
$$r_3=([0.413,0.576],[0.225,0.371]),$$
$$r_4=([0.579,0.685],[0.1,0.235]).$$

利用新的记分函数式(6), 求出 $r_i(i=1,2,3,4)$ 的记分函数值 $G(r_i)$ 分别为
$$G(r_1)=0.049,\ G(r_2)=0.365,$$
$$G(r_3)=0.187,\ G(r_4)=0.402,$$
从而有
$$G(r_4)>G(r_2)>G(r_3)>G(r_1).$$
故 $A_4\succ A_2\succ A_3\succ A_1$, 方案 A_4 是最佳方案.

这一排序结果与文献[3,22]的排序 $A_2\succ A_4\succ A_3\succ A_1$ 不一致: 本文最优投资方案是武器配备公司, 其次是食品公司; 而文献[3,22]的最优是食品公司, 其次是武器配备公司.

从理论角度分析, 虽然本文与文献[3,22]都是采用加权算术平均算子对每个方案的各个属性信息进行信息集成, 但与文献[3,22]有以下两点不同:

1) 文献[3,22]均是事先人为给出属性权重为 $w_1=0.35, w_2=0.25, w_3=0.40$, 而本文给出的 $w_1=0.334$, $w_2=0.402, w_3=0.264$ 是从初始决策信息出发, 基于数据自身利用熵权法确定的属性权重. 实例中"成长分析 C_2"的属性值模糊性程度最小, 从而熵值最小, 提供的信息量最大, 应赋予最大权重; 而属性 C_3 熵值最大, 应赋予最小权重, 这一点与文献[3,22]正好相反, 由此导致了信息集成后各方案的综合属性值不同. 实例中"武器配备公司"信息集成后的综合属性值相对其他备选方案来看, 其支持度最高、反对度最低.

2) 文献[3,22]采用的得分函数存在一定的缺陷, 这一点已在前文指出. 因此, 武器配备公司要优于食品公司.

4 结 论

针对区间直觉模糊多属性决策问题中属性权重信息完全未知的情形, 本文给出了一个改进的区间直觉模糊熵定义以及一个熵公式, 克服了现有区间直觉模糊熵在取得最值约束条件中存在的缺陷, 从而基于改进的区间直觉模糊熵获得属性权重; 然后, 采用侧重于整体影响的区间直觉模糊加权算术平均算子对区间直觉模糊数信息进行集结, 进而根据新的得分函数对备选方案进行排序; 最后进行了实例分析比较. 本文的研究成果改进了现有的区间直觉模糊熵的定义, 所提出的得分排序函数能够在一定程度上克服其他排序函数存在的不足, 更忠于决策信息, 且更真实地反映了决策者的意愿.

参考文献(References)

[1] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[2] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregation interval-valued

intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[3] Lakshmana G N V, Murali Krishnan S, Sivraman G. Multi-criteria decision-making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(3): 1464-1467.

[4] 王中兴, 牛利利. 区间直觉模糊数的新得分函数及其在多属性决策中的应用[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(4): 167-172.
(Wang Z X, Niu L L. A new scoring function of interval-valued intuitionistic fuzzy number and its application in multi-attribute decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(4): 167-172.)

[5] 王坚强. 信息不完全确定的多准则区间直觉模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2006, 21(11): 1253-1256.
(Wang J Q. Multi-criteria interval intuitionistic fuzzy decision-making approach with incomplete certain information[J]. Control and Decision, 2006, 21(11): 1253-1256.)

[6] 卫贵武. 权重信息不完全的区间直觉模糊数多属性决策方法[J]. 管理学报, 2008, 5(2): 208-211.
(Wei G W. A method of interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attributes decision making with incomplete attribute weight information[J]. Chinese J of Management, 2008, 5(2): 208-211.)

[7] Wang Z J, Kevin W Li, Wang W Z. An approach to multi-attribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights[J]. Information Sciences, 2009, 179(17): 3026-3040.

[8] Wei G W, Wang H J, Lin R. Application of correlation coefficient to interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attribute decision-making with incomplete weight information[J]. Knowledge Information System, 2011, 26(2): 337-349.

[9] Wan S P, Xu G L, Wang F, et al. A new method for Atanassov's interval-valued intuitionistic fuzzy MAGDM with incomplete attribute weight information[J]. Information Sciences, 2015, 316(C): 329-347.

[10] 袁宇, 关涛, 闫相斌, 等. 基于区间直觉模糊数相关系数的多准则决策模型[J]. 管理科学学报, 2014, 17(4): 11-17.
(Yuan Y, Guan T, Yan X B, et al. Multi-criteria decision making model based on interval-valued intuitionistic fuzzy number correlation coefficient[J]. J of Management Sciences in China, 2014, 17(4): 11-17.)

[11] 王中兴, 唐芝兰, 牛利利. 基于相对优势度的区间直觉模糊多属性决策方法[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(9): 92-97.
(Wang Z X, Tang Z L, Niu L L. Multi-criteria fuzzy decision-making method with interval-valued intuitionistic fuzzy sets based on relative superiority[J]. J of Shandong University: Natural Science, 2012, 47(9): 92-97.)

[12] 高建伟, 刘慧晖, 谷云东. 基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(12): 3175-3181.
(Gao J W, Liu H H, Gu Y D. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on prospect theory[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(12): 3175-3181.)

[13] Qi X W, Liang C Y, Zhang J L. Generalized cross-entropy based group decision making with unknown expert and attribute weights under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 79(1): 52-64.

[14] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method using entropy weights-based correlation coefficients of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(12): 3864-3870.

[15] 戚筱雯, 梁昌勇, 张恩桥, 等. 基于熵最大化的区间直觉模糊多属性群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(10): 1940-1948.
(Qi X W, Liang C Y, Zhang L Q, et al. Approach to interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attributes group decision-making based on maximum entropy[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2011, 31(10): 1940-1948.)

[16] 陈晓红, 戴子敬, 刘翔. 基于熵和关联系数的区间直觉模糊决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(4): 791-795.
(Chen X H, Dai Z J, Liu X. Approach to interval-valued intuitionistic fuzzy decision making based on entropy and correlation coefficient[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(4): 791-795.)

[17] 张英俊, 马培军, 苏小红, 等. 属性权重不确定条件下的区间值直觉模糊多属性决策[J]. 自动化学报, 2012, 38(2): 220-228.
(Zhang Y J, Ma P J, Su X H, et al. Multi-attribute decision making with uncertain attribute weight information in the framework of interval-valued intuitionistic fuzzy set[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(2): 220-228.)

[18] 陈志旺, 陈林, 杨七, 等. 用区间直觉模糊集方法对属性权重未知的群求解其多属性决策[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1025-1033.
(Chen Z W, Chen L, Yang Q, et al. Interval-valued intuitionistic fuzzy set method for group multi-

attribute decision-making with unknown attribute weights[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(8): 1025-1033.)

[19] 孙贵玲, 张建华. IVIFS 环境下基于模糊熵和得分函数的多准则决策[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(1): 113-117.

(Sun G L, Zhang J H. Decision-making method based on fuzzy entropy and score function under IVIFS environment[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(1): 113-117.)

[20] 刘勇, Jeffrey Forrest, 刘思峰, 等. 基于区间直觉模糊的动态多属性灰色关联决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1303-1308.

(Liu Y, Jeffrey Forrest, Liu S F, et al. Dynamic multiple attribute grey incidence decision making method based on interval valued intuitionisitc fuzzy number[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1303-1308.)

[21] 吴冲, 万翔宇. 基于改进熵权法的区间直觉模糊TOPSIS 方法[J]. 运筹与管理, 2014, 23(5): 42-47.

(Wu C, Wan X Y. Extended TOPSIS with interval-valued intuitionistic fuzzy information based on advanced entropy-weighted method[J]. Operations Research and Management Science, 2014, 23(5): 42-47.)

[22] Ye J. Multicriteria fuzzy decision making method based on a novel accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy invirenment[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(3): 6899-6902.

[23] 康婧, 兰蓉, 王莎莎. 区间直觉模糊数的精确函数及其在决策中的应用[J]. 西安邮电大学学报, 2015, 20(3): 86-91.

(Kang J, Lan R, Wang S S. A new accuracy function of interval-valued intuitionistic fuzzy numbers and its application in decision making[J]. J of Xi'an University of Posts and Telecommunications, 2015, 20(3): 86-91.)

[24] 谢海斌, 王中兴, 谢国榕, 等. 基于精确函数的区间直觉模糊多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(22): 182-188.

(Xie H B, Wang Z X, Xie G R, et al. Multi-criteria fuzzy decision making method with interval-valued intuitionistic fuzzy sets based on a novel accuracy function[J]. J of Mathematics in Practice and Theory, 2012, 42(22): 182-188.)

[25] 魏翠萍, 夏梅梅, 张玉忠. 基于区间直觉模糊集的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1230-1234.

(Wei C P, Xia M M, Zhang Y Z. Multi-criteria decision-making methods based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1230-1234.)

[26] Zhang Q S, Jiang S Y, Jia B G, et al. Some information entropy measures for interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(24): 5130-5145.

[27] Zhang Q S, Xing H Y, Liu F C, et al. Some new entropy measures for interval-valued intuitionistic fuzzy sets based on distances and their relationships with similarity and inclusion measures[J]. Information Sciences, 2014, 283(21): 55-69.

[28] 高明美, 孙涛, 朱建军. 一种改进的直觉模糊熵的公理化定义和构造公式[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 470-474.

(Gao M M, Sun T, Zhu J J. An revised axiomatic definition and structural formula of intuitionistic fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 470-474.)

[29] Sun M, Liu J. New entropy an similarity measures for interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. J of Information & Computational Science, 2012, 18(9): 5799-5806.

[30] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[31] Hong D H, Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

[32] 张恩瑜, 王珏, 汪寿阳. 一种新的 Vague 集多准则决策评分函数[J]. 系统科学与数学, 2011, 31(8): 961-974.

(Zhang E Y, Wang J, Wang S Y. A new scoring function in multi-criteria decision-making based on Vague set[J]. J of System Science and Mathematical Science, 2011, 31(8): 961-974.)

[33] 高明美, 孙涛, 朱建军. 基于 Vague 集多准则决策的新的评分函数[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(1): 96-105.

(Gao M M, Sun T, Zhu J J. A new scoring function in multi-criteria decision-making based on Vague set[J]. J of System Science and Mathematical Science, 2014, 34(1): 96-105.)

(责任编辑：曹洪武)