

基于多面体可达集的时间最优模型预测控制

程奇峰, 马奥运

(辽宁工程技术大学 电气与控制工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105)

摘要: 针对有界状态干扰下的线性时变系统, 提出一种新的时间最优模型预测控制算法. 在离线情况下通过求解一系列的线性优化问题确定次优的多面体 N 步可达集, 根据这些可达集在线优化计算得到的输入量使系统状态尽快收敛到稳定区域. 离线求解多面体可达集的方法可处理非对称约束, 相比于以往的方法避免了在 N 增加时顶点数可能呈指数增多的问题, 同时省去了过多复杂的多面体间的运算, 因而便于在实际问题中应用.

关键词: 线性时变系统; 有界状态干扰; 时间最优模型预测控制; 多面体可达集; 非对称约束

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Time optimal model predictive control based on polyhedral reachable set

CHENG Qi-feng, MA Ao-yun

(School of Electrical and Control Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China. Correspondent: CHENG Qi-feng, E-mail: chengqifeng@tsinghua.org.cn)

Abstract: A new time optimal model predictive control paradigm is proposed for the linear time-varying system with bounded state disturbance. The suboptimal polyhedral N -step reachable sets are determined offline by solving a series of linear programs, and then the inputs are optimized online to render the states into the terminal set as fast as possible. This method can handle asymmetric constraints. Compared with previous methods, it avoids the possibility that the number of vertices increases exponentially with the step N , and thus eliminates excessive complex polytope operations. The results show that the proposed approach is convenient for practical purposes.

Keywords: linear time-varying system; bounded state disturbance; time optimal MPC; polyhedral reachable set; asymmetric constraints

0 引言

模型预测控制(MPC)因为其处理约束的强大能力被广泛应用到各个行业, 并且针对不同的控制要求发展出了不同类型的MPC^[1-5]. 近年来, 针对一些要求快速反应的系统(如机电系统), 时间最优MPC受到了研究界越来越多的关注^[4-5]. 时间最优MPC是指通过在线优化得到输入序列, 使得系统状态能在最短的时间里稳定到目标区域. 对于没有干扰的名义系统, 目标区域指的是确定的稳定点; 对于存在有界干扰的系统, 系统状态不可能收敛到单个稳定点, 而只能收敛到相应名义系统稳定点附近的一个区域内.

文献[4]提出了一种计算最优时间的方法, 它通过逐个测试不同控制时域的优化问题是否有可行解来选取一个时间最短的解作为时间最优解. 它因为要在每个采样时间求解很多不同时间长度的可行性

优化问题, 所以需要很大的在线计算量. 文献[5]在文献[4]的基础上提出了一种新的牛顿迭代求根法, 它相比于文献[4]中的方法的每一步计算量少了很多, 但它仍需要求解一系列的可行解问题.

文献[1]针对线性时不变系统提出了一种鲁棒时间最优控制策略, 它离线求解系统满足约束条件情况下的 N 步可达集, 然后通过在线确定当前状态所在的可达集, 并由此计算时间最优控制输入. 这种方法在求解可达集过程中需要重复使用 Minkowski 和 ($A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$) 与 Minkowski 差 ($A \ominus B = \{x \in \mathbf{R}^n | x + B \in A\}$), 这两种运算的工作量随着集合 A 、 B 顶点的急剧增多会随比例增加, 且得到的可达集顶点数会随着 N 的增大而一直增加. 文献[6]提出使用椭圆不变集离线计算系统的一系列可达集, 这种方法离线计算量小, 每步在线计算时只

收稿日期: 2015-08-18; **修回日期:** 2015-11-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304090); 辽宁省教育厅高等学校科学研究项目(L2013132).

作者简介: 程奇峰(1985—), 男, 副教授, 从事模型预测控制理论及应用、大数据理论及算法等研究; 马奥运(1992—), 男, 硕士生, 从事模型预测控制理论的研究.

需要比较一系列的不等式即可确定最小所需的步长, 进而确定约束条件, 并优化得到系统的控制输入. 它是一种便于实际应用的时间最优模型预测控制, 但仍受制于椭圆不变集难以处理非对称约束的限制, 而且没有考虑加法噪声干扰.

本文在文献 [1] 的基础上提出了一种新的通过离线求解一系列线性优化问题得到满足系统约束的 N 步可达集的方法, 避免了集合间复杂的 Minkowski 和与差运算, 同时可达集顶点数不会随着 N 的增加而一直增大. 使用离线求解确定的一系列可达集, 通过在线计算求解线性优化问题得到时间最优控制策略, 最终使系统状态快速稳定到目标区域.

1 问题描述

考虑一类带有界干扰的线性时变系统

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + w_k. \quad (1)$$

其中: 状态变量 $x_k \in \mathbf{R}^n$, 输入变量 $u_k \in \mathbf{R}^m$, 状态干扰 $w_k \in \mathbf{R}^n$, $F_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $G_k \in \mathbf{R}^{n \times m}$; $[F_k \ G_k] \in \text{Co}\{[F^{(1)} \ G^{(1)}], \dots, [F^{(L)} \ G^{(L)}]\}$. 状态变量、输入变量和状态干扰满足约束条件

$$x_k \in E = \{A_x x_k \leq b_x\}, \quad (2)$$

$$u_k \in \Omega = \{A_u u_k \leq b_u\}, \quad (3)$$

$$w_k \in W = \{A_w w_k \leq b_w\}. \quad (4)$$

其中: E 为包含原点的闭集, Ω 和 W 为包含原点的紧集.

对系统 (1) 使用一个准闭环控制律^[3]进行控制, 即

$$u_{k+i|k} = Kx_{k+i|k} + c_{k+i|k}, \quad c_{k+N+i|k} = \mathbf{0}, \quad i \geq 0. \quad (5)$$

其中: $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $c_{k+i|k} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{0} = 0_{m \times 1}$.

在式 (5) 中, 前 N 个控制量是在模态 1 中使状态量尽快到达终端集内, 而模态 2 中的控制量为 $u = Kx$, 其中 K 是使得系统状态方程凸集内所有系统都能稳定的线性状态反馈矩阵, 即保证谱半径 $\rho(F_k + G_k K) < 1$. 时间最优 MPC 的目标就是在最多 N 步的控制策略下将状态作用到原点(稳定点)附近的终端集 X_0 内, 并保证此后状态始终处于 X_0 内, 这里的 X_0 就是系统 (1) 的最小鲁棒正不变集.

定义 1 最小鲁棒正不变集. 对于存在约束 (2) ~ (4) 的系统 (1), 如果对于 $\forall x_k \in X \subseteq E, \forall w_k \in W$ 都存在输入 $u_k = Kx_k \in \Omega$ 使得

$$x_{k+1} = (F_k + G_k K)x_k + w_k \in X,$$

则称集合 X 为系统 (1) 的最小鲁棒正不变集.

最小鲁棒正不变集是包含原点的紧集^[1,7-8].

定义 2 N 步可达集. 对于系统 (1), 如果在 k

时刻, $\forall x_k \in X_N \subseteq E$ 对于任意状态干扰序列 $\{w_{k+i} | w_{k+i} \in W, i = 0, 1, \dots, N-1\}$, 都存在输入序列 $\{u_{k+i} | u_{k+i} \in \Omega, i = 0, 1, \dots, N-1\}$ 使得 $x_{k+N} \in X_0$, 则称集合 X_N 为 X_0 的 N 步可达集.

注 1 集合 X_0 是自身的 0 步可达集.

注 2 记 $\Phi_k = F_k + G_k K$, X_0 为存在约束 (2) ~ (4) 时系统 (1) 的终端不变集, 由最小鲁棒正不变集的定义可知, 终端集 X_0 应当满足 $\Phi_k X_0 \oplus W \subseteq X_0$. 对于线性时不变系统 ($L = 1$), 其终端集 X_0 可以满足 $\Phi X_0 \oplus W = X_0$; 而对于线性时变系统 ($L \geq 2$), 等式 $\Phi^{(l)} X_0 \oplus W = X_0$ ($l = 1, 2, \dots, L$) 无法保证一定同时成立, 所以 $\Phi^{(l)} X_0 \oplus W \subseteq X_0, l = 1, 2, \dots, L$.

文献 [8] 给出了线性时变系统终端集的求解方法, 即

$$\begin{aligned} X_0 = & W \oplus \text{Conv}\{(F_i + G_i K)W, \forall i \in 1, 2, \dots, L\} \oplus \\ & \text{Conv}\{(F_i + G_i K)(F_j + G_j K)W, \forall i, j \in 1, 2, \dots, L\} \oplus \\ & \text{Conv}\{(F_i + G_i K)(F_j + G_j K)(F_k + G_k K)W, \\ & \forall i, j, k \in 1, 2, \dots, L\} \oplus \dots \end{aligned} \quad (6)$$

结合文献 [7] 中的方法, 可根据式 (6) 求解终端集 X_0 的任意近似. 注意到在 X_0 内 $u_k = Kx_k$, 则需保证 $\forall x_k \in X_0, Kx_k \in \Omega$. 因此对于给定的线性时变系统 (F, G, E, Ω, W), 只有在系统参数凸集 $\text{Co}\{[F^{(1)} \ G^{(1)}], \dots, [F^{(L)} \ G^{(L)}]\}$ 尽量小、 Ω 足够大, 且状态干扰集 W 较小时, 终端集 X_0 才存在^[1].

2 改进的求 N 步可达集的方法

假设终端集 X_0 为多面体, 其某一个顶点为 x , 沿着原点与顶点的连线方向寻找一个新的点 x' , 即 $x' = \varepsilon x$ ($\varepsilon \geq 1$)^[9]. 对于系统 (1), 如果点 x' 对任意的 $w \in W$, 都存在满足输入约束 (3) 的 u , 使得 $x'^+ \in X_0$, 其中 $x'^+ = F_k x' + G_k u + w$, 则点 x' 可以一步进入终端集 X_0 .

不妨设 X_0 顶点集合为 $\{X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(M)}\}$, 记

$$\begin{aligned} \varepsilon^* = & \max\{\varepsilon | F_k \varepsilon x + G_k u + w \in X_0, \\ & \exists u \in \Omega, \forall w \in W\}. \end{aligned} \quad (7)$$

根据式 (7) 对 X_0 的所有顶点求取对应的 $\{\varepsilon^{*(1)}, \varepsilon^{*(2)}, \dots, \varepsilon^{*(M)}\}$, 则由点 $\{\varepsilon^{*(1)} X_0^{(1)}, \varepsilon^{*(2)} X_0^{(2)}, \dots, \varepsilon^{*(M)} X_0^{(M)}\}$ 构成的集合 X_1^* 内的点都可以一步进入终端集 X_0 . 同时考虑到系统状态约束 (2) 的限制, 一步可达集 $X_1 = X_1^* \cap E$.

对于 $N \geq 2$ 的可达集 X_N , 按照同样的方法求解一系列的优化问题即可得到 $\varepsilon_N^{(i)}$. 此时采用逐步后退法进行求解, 即要求可达集 X_N 内的状态在任意可能

的状态干扰下存在合适的输入使得系统状态在一步之内进入到可达集 X_{N-1} 内.

算法 1 求出系统的终端集 X_0 ^[7-8], 令 $N = 1$.

Step 1: 将 $N - 1$ 步可达集表达为不等式形式

$$X_{N-1} = \{x | A_{X_{N-1}} x \leq b_{X_{N-1}}\}.$$

Step 2: 求解一系列关于 $\varepsilon_N^{(i)}$ 的最优问题 ($i = 1, 2, \dots, M$)

$$\varepsilon_N^{*(i)} = \arg \max_{\{\varepsilon_N^{(i)}, c_N^{(i)}\}} \varepsilon_N^{(i)}.$$

$$\text{s.t. } A_{X_{N-1}}(\varepsilon_N^{(i)} \Phi^{(l)} X_0^{(i)} + G^{(l)} c_N^{(i)} + W^{(j)}) \leq b_{X_{N-1}},$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, V_W, l = 1, 2, \dots, L; \quad (8)$$

$$A_u(\varepsilon_N^{(i)} K X_0^{(i)} + c_N^{(i)}) \leq b_u. \quad (9)$$

其中: V_W 为干扰集 W 的顶点数, $X_0^{(i)}$ 为终端集 X_0 的第 i 个顶点, $W^{(j)}$ 为状态干扰集 W 的第 j 个顶点.

Step 3: 记集合

$$X'_N = \text{Co}\{\varepsilon_N^{*(1)} X_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{*(M)} X_0^{(M)}\},$$

系统的 N 步可达集为 $X_N = X'_N \cap E$.

Step 4: 如果 $N = N^*$, 则停止计算; 否则 $N = N + 1$, 返回 Step 1, N^* 为要计算的最大可达集步数.

定理 1 按照算法 1 计算的一系列 N ($N \geq 1$) 步可达集 X_N 都是凸集.

证明 假设 $N - 1$ 步可达集 X_{N-1} 为凸集, 并且可以表示成 Step 1 中的线性不等式的形式, 由 Step 2 可计算得到点集 $\{\varepsilon_N^{*(1)} X_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{*(M)} X_0^{(M)}\}$ 和相应的控制参量 $\{c_N^{*(1)}, \dots, c_N^{*(M)}\}$. 令

$$\tilde{x} = \lambda_1 \varepsilon_N^{*(1)} X_0^{(1)} + \lambda_2 \varepsilon_N^{*(2)} X_0^{(2)} + \dots + \lambda_M \varepsilon_N^{*(M)} X_0^{(M)},$$

$$\tilde{c} = \lambda_1 c_N^{*(1)} + \lambda_2 c_N^{*(2)} + \dots + \lambda_M c_N^{*(M)},$$

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M \leq 1, \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1.$$

式 (8) 和 (9) 所定义的约束都是线性不等式, 因而用 $\{\tilde{x}, \tilde{c}\}$ 代替约束 (8) 和 (9) 中的 $\{\varepsilon_N^{*(i)} X_0^{(i)}, c_N^{*(i)}\}$, 约束 (8) 和 (9) 也成立, 由此 $\tilde{x} \in X'_N$. 于是 Step 3 中的 X'_N 可以表示为由点集 $\{\varepsilon_N^{*(1)} X_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{*(M)} X_0^{(M)}\}$ 构成的凸集. 而集合 E 也是一个多面体表示的凸集, 两个多面体凸集的交集仍是多面体凸集, 所以可达集 X_N 是凸集.

终端集 X_0 是多面体表示的凸集, 因此所有的 N 步可达集 X_N 都是多面体凸集. \square

定理 2 按照算法 1 计算的 X_N ($N \geq 1$) 是鲁棒正不变集, 并且满足 $X_{N-1} \subseteq X_N$.

证明 假设 $X_{N-1} \subseteq X_N$, 需证明 $X_N \subseteq X_{N+1}$. 算法 1 求解 X_{N+1} 时的优化问题如下:

$$\varepsilon_{N+1}^{*(i)} = \arg \max_{\{\varepsilon_{N+1}^{(i)}, c_{N+1}^{(i)}\}} \varepsilon_{N+1}^{(i)}.$$

$$\text{s.t. } A_{X_N}(\varepsilon_{N+1}^{(i)} \Phi^{(l)} X_0^{(i)} + G^{(l)} c_{N+1}^{(i)} + W^{(j)}) \leq b_{X_N},$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, V_W, l = 1, 2, \dots, L; \quad (10)$$

$$A_u(\varepsilon_{N+1}^{(i)} K X_0^{(i)} + c_{N+1}^{(i)}) \leq b_u. \quad (11)$$

假设 $\{\varepsilon_N^{*(i)}, c_N^{*(i)}\}$ 是优化问题 (8) 和 (9) 的最优解, 则有 $\{\varepsilon_N^{*(i)}, c_N^{*(i)}\}$ 满足约束 (9), 所以它也满足约束 (11); 记 $x_{jl}^* = \varepsilon_N^{*(i)} \Phi^{(l)} X_0^{(i)} + G^{(l)} c_N^{*(i)} + W^{(j)}, \forall j, l$, 有 $x_{jl}^* \in X_{N-1}$, 从而 $x_{jl}^* \in X_N$, 所以 $\{\varepsilon_N^{*(i)}, c_N^{*(i)}\}$ 满足约束 (10). 于是 $\{\varepsilon_N^{*(i)}, c_N^{*(i)}\}$ 是式 (10) 和 (11) 的一个可行解, 所以

$$\varepsilon_{N+1}^{*(i)} \geq \varepsilon_N^{*(i)}, \forall i = 1, 2, \dots, M,$$

因而 $X'_N \subseteq X'_{N+1}$, 于是 $(X'_N \cap E) \subseteq (X'_{N+1} \cap E)$, 即 $X_N \subseteq X_{N+1}$.

考虑到 X_0 是鲁棒正不变集, 用上面同样的推导方法很容易证明 $X_0 \subseteq X_1$, 所以命题得证. \square

注 3 求解得到的 N 步可达集 X_N 的顶点数不一定与终端集 X_0 的顶点数相等, 并且这些顶点也不一定都在原点与终端集顶点的延长线上. 这是由于点集 $\{\varepsilon_N^{*(1)} X_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{*(M)} X_0^{(M)}\}$ 可能存在多点共面的情况, 求凸集 X'_N 时会合并一些顶点; 另外, 由于 $X_N = X'_N \cap E$, X_N 要同时满足系统状态约束集合 E . 两个凸集的交集可能会产生一些新顶点, 所以 X_N 的顶点个数只与集合 E 和 X'_N 的顶点数及其相交情况有关, 与 N 无关.

算法 1 在计算每一步可达集时都需使用 M 个点, 而文献 [1] 的算法在求解第 1 步可达集时需要用到 rLM^2 个点 (r 为系统输入集合 Ω 的顶点数), 并且这些点的个数最多可能会随着可达集步数 N 的增加而指数式增长. 假设在求解可达集过程中所有的点都不是冗余的, 即都是凸集的顶点, 则可达集 X_N 的顶点数为 $M(rLM)^N$, 呈指数式增长. 但在实际中并不是所有的点都是顶点, 顶点增长方式根据具体情形而定. 无论是本文还是文献 [1] 的算法, 求得的点不一定是凸集的顶点, 所以需要先求出包含这些点的最小凸集, 再求解出对应的不等式表示形式. 求取包含一系列点的最小凸集速度最快的算法是分而治之算法, 算法的时间复杂度为 $O(n_p \log n_p)$ ^[10], 其中 n_p 表示点的个数. 文献 [11] 给出了将凸集的顶点表示形式转换为不等式表示形式的算法, 这个算法的时间复杂度为 $O(s^2nv)$, 其中 s 为凸集顶点的个数, n 为凸集所在的空间维数, v 为凸集的超平面个数. 算法 1 每一步都只需考虑 M 个点, 相比于文献 [1] 中的方法, 使用的点的个数大为减少, 所以离线计算的复杂度小.

3 一步模型预测控制

按照前一节的方法可以方便地线下求解出带状态干扰的线性时变系统的一系列 N 步可达集, 根据这些可达集可以计算出合适的输入使得系统的状态稳定到终端集内. 本文使用文献 [1] 中提供的一步模型预测控制方法, 首先确定一个最小的整数 N , 使得当前状态 $x_k \in X_N \setminus X_{N-1}$; 然后通过求解线性优化问题得到一个输入 u_k , 使得对于任意 $[F_k, G_k, w_k]$ 都能保证将系统状态作用到可达集 X_{N-1} 内.

算法 2 使用算法 1 求解的一系列的可达集, 令 $k = 0, N_{\max} = N^*$.

Step 1: 令 $N = N_{\max}, N_{\max} - 1, \dots, 0$, 通过比较一系列的线性不等式确定最小的整数 N_k , 使得当前状态 $x_k \in X_{N_k} \setminus X_{N_k-1}$.

Step 2: 如果 $N_k = 0$, 即此时状态位于系统终端集内, 则算法终止, 否则执行 Step 3.

Step 3: 求解线性优化问题

$$\min \nu.$$

$$\text{s.t. } A_{X_{N_k-1}}(\Phi^{(l)}x_k + G^{(l)}c_k + W^{(j)}) \leq b_{X_{N_k-1}} + \nu, \\ \forall j = 1, 2, \dots, V_W \quad l = 1, 2, \dots, L; \quad (12)$$

$$A_u(Kx_k + c_k) \leq b_u. \quad (13)$$

其中: ν 为非正实数, $c_k \in \mathbf{R}^m$. 根据优化结果得到当前时刻的输入 $u_k = Kx_k + c_k$.

Step 4: 计算出下一时刻的状态 $x_{k+1} = F_kx_k + G_ku_k + w_k$, 令 $N_{\max} = N_k - 1, k = k + 1$, 返回 Step 1.

定理 3 按照算法 2 优化得到的控制序列, 可以使系统的初始状态 x_0 在 N_0 步之内进入终端集 X_0 内.

证明 因为根据算法 1 计算得到的一系列可达集可以保证 $\forall x \in X_N \setminus X_{N-1}$, 对于所有满足约束的系统和状态干扰, 存在控制输入, 使得 x 可以一步进入可达集 X_{N-1} 内. 所以算法 2 中的优化问题 (12) 和 (13) 总存在可行解, 并且使系统下一时刻的状态尽可能地接近或进入终端集 X_0 , 所以在可达集 X_{N_0} 内的初始点 x_0 可以在 N_0 步之内进入终端集 X_0 内. \square

4 数值仿真

给出线性时变系统

$$[F_k \ G_k] \in \text{Co}\{[F_1 \ G_1], [F_2 \ G_2], [F_3 \ G_3]\},$$

$$E = \{x_k \in \mathbf{R}^2 \mid \|x_k\|_\infty \leq 1\},$$

$$\Omega = \{u_k \in \mathbf{R} \mid \|u_k\|_\infty \leq 1\},$$

$$W = \{w_k \in \mathbf{R}^2 \mid \|w_k\|_\infty \leq 0.02\}.$$

其中

$$K = [-0.7195 \ 0.2898], \quad G_1 = G_2 = G_3 = G,$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.9756 & -0.2638 \\ 0.1319 & 0.6799 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.9756 & -0.2638 \\ 0.1319 & 0.4799 \end{bmatrix}, \\ F_3 = \begin{bmatrix} 0.9756 & -0.2638 \\ 0.2319 & 0.4799 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.3371 \\ 0.0244 \end{bmatrix},$$

首先求解出数值例子的终端集 X_0 ; 然后根据算法 1 计算出系统的一系列可达集 X_N , 并将其绘制在图 1 中. 此处求取包含一系列点的最小凸集是使用 Matlab 中的函数 `convhulln`, 将凸集的顶点形式转换为不等式形式使用函数 `vert2lcon`.

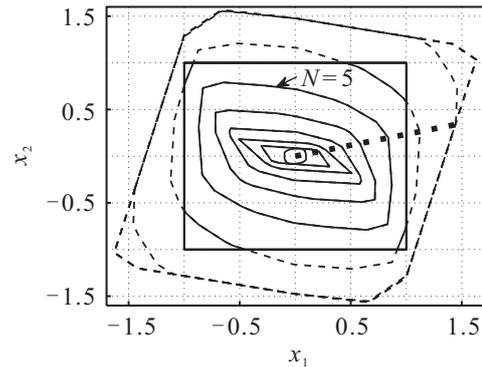


图 1 N 步可达集

图 1 中的集合分为两类, 由虚线绘制的集合是按照算法 1 求解得到的一系列集合 X'_N , 实线绘制的集合则是系统的 N 步可达集 X_N . 实线集合从内到外依次为系统的终端集 X_0 、1 步可达集、2 步可达集直至 7 步可达集, 随后可达集的大小不再随着 N 的增加而增大 (可达集 $X_8 = X_7$), 这是由于系统状态约束的限制, 可达集 X_N 已经与状态约束集 E 的大小相等. 同时可以看出, 集合 X'_1, X'_2, \dots, X'_8 的顶点是在原点与终端集顶点的连线上, 点线即是其中一组顶点所在的连线. 而可达集 X_1, \dots, X_8 因为状态约束集的限制, 其顶点不一定都在原点与终端集顶点的连线上, 并且顶点数也不一定相等, 如可达集 X_7, X_8 只有 4 个顶点.

给定一个初始状态 $x_0 = [0.95, -0.95]^T$, 按照算法 2 将状态稳定到终端集 X_0 内, 共进行 10 次仿真, 其结果绘制在图 2 中.

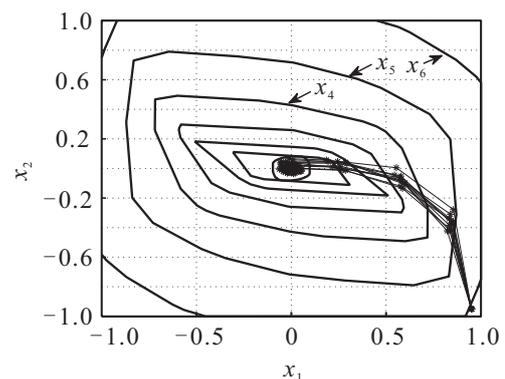


图 2 系统状态轨迹

由图2可以看出,算法2在系统线性时变以及存在有界状态干扰时都能保证状态最终进入到集合 X_0 内,并且稳定在终端集内. x_0 位于集合 $X_7 \setminus X_6$ 内,表1给出了10次仿真过程中状态所处可达集的变化情况.由表1可以看出,虽然系统的状态变化不是完全相同,但是都在第4步时进入终端集,由此始终保持保持在终端集内.

表1 10次仿真中每一步测试得到的 N_k

时间	仿真次数									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第1步	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
第2步	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
第3步	1	2	2	2	2	1	2	1	2	2
第4步	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
第4步之后	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

注意到初始状态位于系统的可达集 X_7 内,这表示状态可以在7步以内稳定到终端集,而实际上系统状态只经过4步就进入到终端集.造成两者存在很大差别的原因在于,系统求解的一系列可达集是要满足线性时变系统的所有可能,同时还要满足所有可能的有界状态干扰,这对于MPC在线算法中针对每一步具体某个“干扰值”求解的可达集相对保守.

图3给出的是系统分别进行10次仿真2000步时状态进入终端集 X_0 后的情况.从中可以看出,带状态干扰的线性时变系统的状态在进入终端集后,在控制律 $u_k = Kx_k$ 的作用下始终稳定在终端集内,并且状态位置与终端集的边界仍有一定的距离,这与注2是一致的 ($\Phi_k X_0 \oplus W \subseteq X_0$).

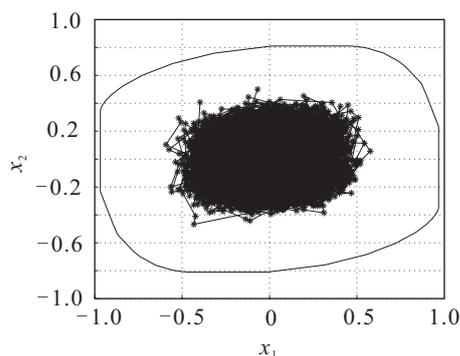


图3 系统状态在终端集内

5 结 论

本文针对带有有界状态干扰的线性时变系统提出了一种新的时间最优模型预测控制方法,离线计算部分使用求解一系列线性规划问题的方法替代复杂的集合运算,计算每步可达集过程中所需优化的顶点数保持不变;然后在线计算时只需要比较一系列不等式,并求解一个线性优化问题即可确定系统最优输入.

这种方法方便地离线构造了次优的多步可达集,并且能够处理非对称的线性约束,而且在线计算量小,也能保证系统的快速稳定,可方便应用于实际问题中.最后通过数值仿真验证了算法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Mayne D Q, Schroeder W R. Robust time-optimal control of constrained linear systems[J]. Automatica, 1997, 33(12): 2103-2118.
- [2] 席裕庚,李德伟,林姝.模型预测控制——现状与挑战[J].自动化学报,2013,39(3):222-236.
(Xi Y G, Li D W, Lin S. Model predictive control — status and challenges[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(3): 222-236.)
- [3] Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(8): 1545-1549.
- [4] Van den Broeck L, Diehl M, Swevers J. A model predictive control approach for time optimal point-to-point motion control[J]. Mechatronics, 2011, 21(7): 1203-1212.
- [5] Janssens P, Van Loock W, Pipeleers G, et al. An efficient algorithm for solving time-optimal point-to-point motion control problems[C]. Mechatronics(ICM). Vicenza: IEEE Press, 2013: 682-687.
- [6] Cheng Qifeng, Ma Aoyun, Wu Zhou, et al. Time optimal MPC based on offline construction of ellipsoidal sets[C]. Chinese Control Conf. Hangzhou: IEEE Press, 2015: 4145-4150.
- [7] Raković S V, Kerrigan E C, Kouramas K I, et al. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 406-410.
- [8] Bumroongsri P. Tube-based robust MPC for linear time-varying systems with bounded disturbances[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2015, 13(3): 620-625.
- [9] Rossi F Q, Waschburger R, Galvao R K H. Determination of the domain of attraction and regions of guaranteed cost for robust model predictive controllers based on linear matrix inequalities[C]. UKACC Int Conf on Control. Cardiff: IEEE Press, 2012: 982-987.
- [10] Preparata F P, Hong S J. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions[C]. Communications of the ACM. New York: ACM, 1977: 87-93.
- [11] Bremner D, Fukuda K, Marzetta A. Primal-dual methods for vertex and facet enumeration[J]. Discrete Computational Geometry, 1998, 20(3): 333-357.