

严格反馈极值搜索系统预设性能反演控制

张雷, 胡云安, 耿宝亮

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对一类目标函数受预设性能函数限定的严格反馈极值搜索系统的控制问题, 将极值搜索控制、预设性能控制、反演控制相结合, 提出一种预设性能反演控制器设计方法. 针对极值搜索系统的目标函数构造新型的性能函数; 利用性能函数对系统进行函数变换, 构建等效简单变换模型; 基于变换模型, 利用反演控制方法逐步递推选取适当的 Lyapunov 函数进行控制器设计, 以实现在对目标函数搜索到极值的同时保证预设性能指标. 最后通过数值仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: 严格反馈; 极值搜索; 预设性能; 反演控制

中图分类号: TP273+.23

文献标志码: A

Prescribed performance backstepping control of strict feedback extremum seeking systems

ZHANG Lei, HU Yun-an, GENG Bao-liang

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical Institute, Yantai 264001, China.

Correspondent: ZHANG Lei, E-mail: zhanglei090@aliyun.com)

Abstract: To solve control problems of the strict-feedback extremum seeking system with the objective function is limited by the prescribed performance function, extremum seeking control, prescribed performance control and backstepping control are combined, and a novel prescribed performance backstepping control method is proposed. The new performance function constructed for the objective function and functional transformation are used to construct the equivalent simple transformation model, the backstepping controller is designed based on the transformation model and the appropriate Lyapunov function selected by using the recurrence method, and the objective function extremum is searched and prescribed performance index is realized. Simulation result shows the effectiveness of the proposed design method.

Keywords: strict feedback; extremum seeking; prescribed performance; backstepping control

0 引言

许多实际系统的参考输入量与输出量之间存在着一定的极值关系, 极值搜索控制方法可以在极值关系未知的情况下使目标函数取得极值^[1]. 目前, 极值搜索控制方法已被广泛地应用到生化反应系统^[2]以及可变环境中极值功率输出控制系统^[3]等诸多方面. 非线性系统的跟踪控制问题一直是控制理论研究的热点和难点^[4], 文献[5]针对一类 SISO 系统提出了基于极值搜索控制的输出跟踪控制方法; 文献[6]针对一类极值搜索系统提出了一种基于滑模极值搜索控制的输出跟踪控制方法. 严格反馈非线性系统是一类很常见的非线性系统, 具有重要的研究意义. 20 世纪 90 年代初, Krstic 等^[7]提出了反演 (backstepping) 控制

方法, 对于严格反馈非线性系统, 反演控制器可以得到全局稳定或渐近收敛的结论^[8], 这便为本文的控制器设计提供了理论依据.

预设性能控制是希腊学者 Bechlioulis 等^[9]提出的一种新的控制器设计方法. 所谓预设性能是指在保证跟踪误差收敛到一个预先设定的任意小的区域的同时, 保证收敛速度及超调量满足预先设定的条件. 文献[10]针对一类单输入单输出系统完成了预设性能自适应控制器设计; 文献[11]进一步将对象推广到了多输入多输出反馈线性化系统, 变换后的误差最终一致有界且闭环系统内所有信号有界; 文献[12]对具有严格反馈形式的非线性系统的预设性能控制问题进行了讨论, 在一定假设的基础上初步解决了该类系

收稿日期: 2015-09-08; 修回日期: 2015-12-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674090); 中国博士后科学基金项目(2015M572693).

作者简介: 张雷(1988—), 男, 博士生, 从事极值搜索控制、预设性能控制的研究; 胡云安(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、智能控制等研究.

系统的控制性能问题. 本文则将极值搜索控制、预设性能控制、反演控制的方法相结合, 针对目标函数受预设性能函数限定的严格反馈极值搜索系统的控制问题, 受文献 [10] 的启发构建新的等效系统模型, 应用反演控制方法逐步递推选取适当的 Lyapunov 函数进行控制器设计, 使系统的目标函数在实现极值搜索, 即实现跟踪期望轨迹的同时满足预设性能.

1 系统描述与预备知识

1.1 系统描述

考虑具有一般形式的严格反馈极值搜索系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + f_1(x_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + f_i(\bar{x}_i(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t)) + g(\mathbf{x}(t))u, \\ y(t) = (x_1(t) - x_d(t))^2. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in R^n$, $u \in R$ 和 $y(t) \in R$ 分别为系统的状态量、输入量和输出量; 定义 $\bar{x}_i(t) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_i]^T \in R^i$, $f_i(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 为已知连续光滑函数且 $g(\mathbf{x}(t))$ 可逆; 令期望输出轨迹为 $x_d(t)$, 不失一般性, 为了便于分析和推理, 极值搜索系统的目标函数选取为含唯一极小值的函数 $y(t) = (x_1(t) - x_d(t))^2 = e^2(t)$ 的形式.

控制目标如下:

1) 设计反演控制器, 保证目标函数 $y(t) = (x_1(t) - x_d(t))^2 = e^2(t)$ 搜索到极小值点且满足预先设定的性能要求;

2) 闭环系统中的所有信号有界.

通过构造损失函数形成极值搜索系统, 从极值搜索角度实现预设性能控制问题, 进行控制器设计. 在设计之前先进行如下假设:

假设 1 初始误差 $|y(0)| = |x_1(0) - x_d(0)|^2$ 有界且上界为已知常数.

假设 2 期望轨迹 $x_d(t)$ 及其高阶导数 $x_d^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为已知连续有界函数.

1.2 性能函数

采用文献 [12] 中的性能函数对目标函数 $y(t)$ 的瞬态和稳态性能进行设定. 连续函数 $\varpi(t) : R_+ \rightarrow R_+$ 称为性能函数, 如果满足: 1) $\varpi(t)$ 是正的且严格递减; 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varpi(t) = \varpi_\infty > 0$.

在初始误差 $y(0)$ 已知的前提下, 给出如下形式的不等式约束:

$$0 < y(t) = e^2(t) < \varpi(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (2)$$

性能函数选取为

$$\varpi(t) = (\varpi_0 - \varpi_\infty)e^{-lt} + \varpi_\infty. \quad (3)$$

严格反馈极值搜索系统 (1) 搜索极值的过程即

是对期望输出轨迹实现跟踪控制的过程, 如果不等式 (2) 满足, 则目标函数将在函数 $\varpi(t)$ 的夹逼作用下迅速收敛到目标函数极小值的一个较小邻域内. 常数 ϖ_∞ 表示预先设定的稳态误差的上界, $\varpi(t)$ 的衰减速度为目标函数 $y(t) = e^2(t)$ 收敛速度的下界, 目标函数的最大值不会大于 $\varpi(0)$. 对比已有的性能函数, 该性能函数始终为正, 且无需切换, 简化了性能函数设计. 通过选择适当的性能函数 $\varpi(t)$ 便可对目标函数进行不等式约束, 从而限制其稳态和瞬态性能. 上述过程可参考图 1 进行说明.

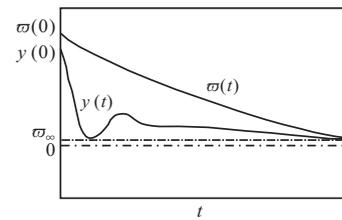


图 1 目标函数与性能函数的关系

1.3 函数变换

在进行控制器设计时, 直接对不等式约束 (2) 进行处理的难度非常大. 为此, 考虑将其变换为等式约束再进行处理, 定义如下误差变换函数 $S(\cdot)$:

$$y(t) = \varpi(t)S(z_1), \quad (4)$$

其中 z_1 为变换误差. $S(z_1)$ 满足下述性质:

1) $S(z_1)$ 光滑可逆且严格递增, 因此可以将式 (3) 等效变换为

$$z_1 = S^{-1}\left(\frac{e^2(t)}{\varpi(t)}\right); \quad (5)$$

2) $0 < S(z_1) < 1$;

$$3) \begin{cases} \lim_{z_1 \rightarrow -\infty} S(z_1) = 0, \\ \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} S(z_1) = 1. \end{cases}$$

由性能函数性质可知 $\varpi(t) > 0$, 则进一步有

$$0 < \varpi(t)S(z_1) < \varpi(t). \quad (6)$$

因此, 不等式约束 (6) 得以满足.

显然, 如果能够满足 $z_1(t) \in \ell_\infty, \forall t \in [0, \infty)$, 则可推出不等式约束 (2) 成立, 进一步可以保证目标函数满足预设性能要求. 结合性能函数 $\varpi(t)$ 的衰减特性, 系统稳定后目标函数将被限制在以下区域:

$$\Xi = \{y \in R_+ : |y(t)| \leq \varpi_\infty\}.$$

将式 (5) 对时间求导, 可得

$$\dot{z}_1 = \gamma(-v + 2x_2(t) + 2f_1(x_1(t))). \quad (7)$$

其中: $\gamma = \frac{\partial S^{-1}}{\partial \left(\frac{y(t)}{\varpi(t)}\right)} \frac{e(t)}{\varpi(t)}$, $v = 2\dot{x}_d(t) + \frac{e(t)\dot{\varpi}(t)}{\varpi(t)}$, 两

式均包含与跟踪的预设性能密切相关的性能函数, 且是已知的, 可直接用于控制设计. 由转换函数的性质可知, 当 $z_1(t) \in \ell_\infty, \forall t \in [0, \infty)$, 且 γ 和 v 有界时, 经函数变换后的系统动态模型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -\gamma v + 2\gamma x_2(t) + 2\gamma f_1(x_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + f_i(\bar{x}_i(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t)) + g(\mathbf{x}(t))u. \end{cases} \quad (8)$$

引理 1 [10] 考虑系统(1), 其目标函数满足性能函数(2), 经变换函数(4)进行函数变换后得到系统(8), 则以下结果成立: 1) 系统(1)经变换函数转换到系统(4)的过程是等效变换; 2) 当经函数变换后的系统(8)稳定时, 系统(1)稳定且满足预设性能要求。

由系统(8)可知, 该等效模型仅需对输出状态 x_1 进行变换, 与已有方法的转换模型相比有了很大简化。

2 预设性能反演控制器设计

采用反演设计方法, 针对变换后的系统(8)进行控制器设计。首先, 针对系统(8)的第1个子系统 z_1 构造 Lyapunov 函数 $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$, 对时间求一阶导数后得到虚拟控制量 x_2^r , 进而得到新的误差状态量 $z_2 = x_2 - x_2^r$ 。进一步构造新的 Lyapunov 函数 $V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$, 对其求导后得到虚拟控制量 x_3^r , 进而得到新的误差状态量 $z_3 = x_3 - x_3^r$ 。以此类推, 通过构造最终 Lyapunov 函数 V_n 可得到确保系统(8)稳定的控制输入 u 的设计。为表达方便, 省略系统(8)中的时间变量 t 。

Step 1 考虑系统(8)中的第1个子系统, 构造 $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$, 对时间求导, 可得

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1(-\gamma v + 2\gamma x_2 + 2\gamma f_1(x_1)). \quad (9)$$

针对式(9)设计虚拟控制量

$$x_2^r = \frac{1}{2}(v - 2f_1(x_1) - k_1 z_1 \cdot \text{sgn}(\gamma)), \quad (10)$$

其中 $k_1 > 0$ 为设计参数。

由式(8)~(10), 可得

$$\dot{z}_1 = \gamma(2z_2 - k_1 z_1 \cdot \text{sgn}(\gamma)), \quad (11)$$

其中 $z_2 = x_2 - x_2^r$ 。当 z_2 趋近于零时, x_2 能准确跟踪 x_2^r 。

Step 2 对系统(8)中的第 $l-2$ 个子系统, 构造 $V_2 = V_1 + (1/2)z_2^2$, 求导并代入式(11), 可得

$$\dot{V}_2 = z_2(x_3 + f_2(\bar{x}_2) - \dot{x}_2^r + 2z_1\gamma) - k_1 z_1^2 \gamma \cdot \text{sgn}(\gamma). \quad (12)$$

针对式(12)设计虚拟控制量

$$x_3^r = (-f_2(\bar{x}_2) + \dot{x}_2^r - 2z_1\gamma - k_2 z_2), \quad (13)$$

其中 $k_2 > 0$ 为设计参数。

定义 $z_3 = x_3 - x_3^r$, 则由式(13)可得

$$\dot{z}_2 = z_3 - k_2 z_2 - 2z_1\gamma. \quad (14)$$

Step 3 考虑系统(8)中的第 $l-3$ 个子系统, 构造 Lyapunov 函数 $V_3 = V_2 + \frac{1}{2}z_3^2$, 对时间求导数并代入式(11)和(14), 可得

$$\dot{V}_3 = -k_1 z_1^2 \gamma \cdot \text{sgn}(\gamma) - k_2 z_2^2 + z_3(x_4 + f_3(\bar{x}_3) - \dot{x}_3^r + z_2). \quad (15)$$

针对式(15)设计虚拟控制量

$$x_4^r = (-f_3(\bar{x}_3) + \dot{x}_3^r - z_2 - k_3 z_3), \quad (16)$$

其中 $k_3 > 0$ 为设计参数。

定义 $z_4 = x_4 - x_4^r$, 则由式(15)和(16)可得

$$\dot{z}_3 = z_4 - k_3 z_3 - z_2. \quad (17)$$

以此类推, 针对第 $n-1$ 步构造 Lyapunov 函数为 $V_{n-1} = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{n-1}^2$, 设计的虚拟控制量为

$$x_n^r = (-f_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + \dot{x}_{n-1}^r - z_{n-2} - k_{n-1}z_{n-1}), \quad (18)$$

其中 $k_{n-1} > 0$ 为设计参数。

定义 $z_n = x_n - x_n^r$, 则由式(18)可得

$$\dot{z}_{n-1} = z_n - k_{n-1}z_{n-1} - z_{n-2}. \quad (19)$$

Step n 考虑系统(8)中的第1至第 n 个子系统, 构造 Lyapunov 函数 $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2$, 对时间求一阶导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 + \dots + z_n \dot{z}_n = \\ &= -k_1 z_1^2 \gamma \cdot \text{sgn}(\gamma) - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 - \dots - \\ &= k_{n-1} z_{n-1}^2 + z_n(f_n(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \dot{x}_n^r + z_{n-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

设计实际控制量

$$u = g^{-1}(\mathbf{x})(-k_n z_n - f_n(\mathbf{x}) + \dot{x}_n^r - z_{n-1}), \quad (21)$$

其中 $k_n > 0$ 为设计参数。

当采用所设计的实际控制量(21)时, 存在

$$\dot{V}_n = -k_1 z_1^2 \gamma \cdot \text{sgn}(\gamma) - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 - \dots - k_n z_n^2. \quad (22)$$

综上所述, 可以得到如下定理。

定理 1 考虑式(1)描述的严格反馈极值搜索系统, 在假设1和假设2成立的前提下, 采用所设计的虚拟控制器(10)、(13)、(16)、(18)和控制器(21), 可以得到如下结论: 1) 目标函数 $y(t) = (x_1 - x_d)^2 = e^2(t)$ 搜索到其极小值点便实现了对期望输出轨迹的有效跟踪, 且满足预先设定的瞬态和稳态性能要求; 2) 闭环系统中的所有信号有界。

3 数值仿真

仿真对象的数学模型描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 \sin x_1 + 2u, \\ y = (x_1 - x_d)^2. \end{cases} \quad (23)$$

期望输出轨迹信号为 $x_d = \sin t + 0.5 \sin 2t$; 初始状态为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$; 性能函数选择为 $\varpi(t) = (1 - 10^{-3})e^{-t} + 10^{-3}$; 变换函数选取为 $S(z_1) = e^{z_1}/(e^{z_1} + e^{-z_1})$; 控制器参数选取为 $k_1 = 1, k_2 = 2$; 控制量设计如式(21)所示。仿真结果如图2~图5所示。

由图2可以看出, 系统状态 x_1 在短时间内便实现了对期望输出轨迹的稳定跟踪, 跟踪效果良好; 由图3可以看出, 目标函数迅速搜索到了其极小值0处, 满足了预设性能函数的约束要求; 由图4可以看出, 跟踪误差响应速度快, 超调小且稳态误差始终保持在

较小的范围内;图5给出了控制输入 u 的变化情况,结合式(21)可知控制曲线平滑且有界,能够满足控制性能要求,确保了系统的稳定性,设计方法有效可行。

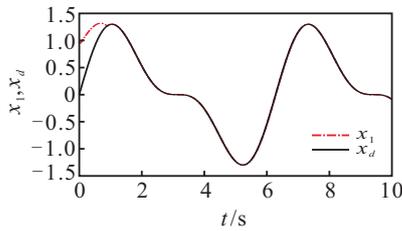


图2 x_1 跟踪期望轨迹 x_d

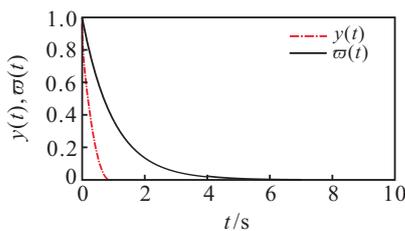


图3 目标函数 $y(t)$ 和性能函数 $w(t)$ 轨迹

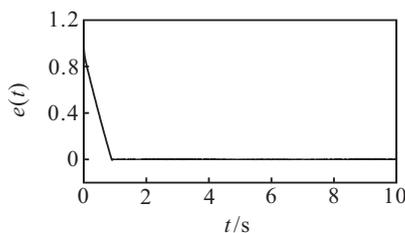


图4 跟踪误差 $e(t)$ 变化轨迹

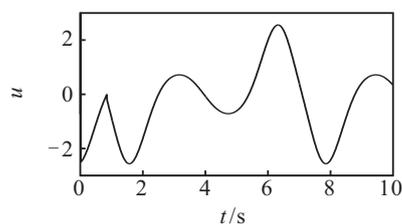


图5 控制输入 u 轨迹

4 结论

本文针对一类目标函数受预设性能函数限定的严格反馈极值搜索系统的控制问题,将极值搜索控制、预设性能控制、反演控制的方法相结合,并利用预设性能函数和函数变换构建了如式(8)所示的新型等效系统模型.针对等效系统模型,应用反演控制方法逐步递推选取适当的Lyapunov函数进行控制器设计.该控制器可使极值搜索系统的目标函数按预设性能搜索到极值处,保证了极值搜索系统对期望轨迹的有效跟踪;同时,目标函数的引入也降低了性能函数的选取难度,为预设性能控制在极值搜索系统中的研究提供了新的思路。

参考文献(References)

[1] Krstic M, Wang H H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems[J]. Automatica, 2000, 36(4): 595-601.

- [2] Dewasme L, Vande W A. Adaptive extremum-seeking control applied to productivity optimization in yeast fed-batch cultures[C]. Proc of the 17th World Congress and the Int Federation of Automatic Control. Seoul: IEEE Press, 2008: 9713-9718.
- [3] Zhong Z D, Huo H B, Zhu X J, et al. Adaptive maximum power point tracking control of fuel cell power plants[J]. J of Power Sources, 2008, 176(1): 259-269.
- [4] Chang Y C. Robust tracking control for nonlinear MIMO systems via fuzzy approaches[J]. Automatica, 2000, 36(6): 1535-1545.
- [5] 左斌, 李静. SISO非仿射非线性系统的极值搜索控制方法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2011, 39(11): 56-60.
(Zuo B, Li J. Extremum seeking control method for SISO nonaffine nonlinear systems[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2011, 39(11): 56-60.)
- [6] Oliveira T R, Peixoto A J, Hsu L. Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes[J]. J of the Franklin Institute, 2012, 349(4): 1397-1415.
- [7] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley, 1995.
- [8] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(11): 1241-1253.
- [9] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Prescribed performance adaptive control of SISO feedback linearizable systems with disturbances[C]. The 16th Mediterranean Conf on Control and Automation. Ajaccio: IEEE Press, 2008: 1035-1040.
- [10] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems[J]. Automatica, 2009, 45(2): 532-538.
- [11] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(9): 2090-2099.
- [12] 胡云安, 耿宝亮, 赵永涛. 严格反馈非线性系统预设性能 backstepping 控制器设计[J]. 控制与决策, 2014, 29(8): 1509-1512.
(Hu Y A, Geng B L, Zhao Y T. Prescribed performance backstepping control of strict feedback nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2014, 29(8): 1509-1512.)