第 31 卷 第 10 期
Vol. 31 No. 10

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 10 月
Oct. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 10-1903-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1121

基于互逆分数阶算子的离散灰色模型及阶数优化

孟 伟, 曾 波

(重庆工商大学 a. 电子商务及供应链系统重庆市重点实验室，b. 商务策划学院，重庆 400067)

摘 要: 针对现有灰色预测模型主要以一阶累加生成序列为建模序列这一现象, 在互逆的分数阶累加生成算子与分数阶累减生成算子的基础上, 建立分数阶算子离散灰色模型, 并给出最小平均相对误差下最优阶数的自适应粒子群优化算法. 多个实例表明, 通过阶数优化, 分数阶算子离散灰色模型相对于灰色模型 GM(1,1) 和离散灰色模型 DGM(1,1) 表现出更优的拟合精度.

关键词: 灰色预测模型；分数阶算子；离散灰色模型

中图分类号: N941 **文献标志码:** A

Discrete grey model with inverse fractional operators and optimized order

MENG Wei, *ZENG Bo*

(a. Chongqing Key Laboratory of Electronic Commerce & Supply Chain System，b. College of Business Planning, Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China. Correspondent：MENG Wei，E-mail: mongvi@126.com)

Abstract: Differing from the existing grey prediction model mainly using one order accumulating generation sequence, a discrete grey model based on the inverse fractional order accumulating generation operator and the reducing generation operator is built, and the genetic algorithm for the optical order with the minimum average relative error is proposed. Case study shows that the discrete grey model with fractional operators can achieve better fitting precision than GM(1,1) and DGM(1,1).

Keywords: grey prediction model；fractional order operator；discrete grey model

0 引 言

灰色系统理论以部分信息已知、部分信息未知的小样本、贫信息不确定性系统为研究对象, 主要通过对部分已知信息的生成和开发提取有价值的信息, 实现对系统运行行为、演化规律的正确描述, 进而实现对其未来变化的定量预测[1-3]. 灰色预测模型作为灰色系统理论的重要组成部分, 其建模方法研究一直非常活跃. 研究人员提出了离散法[4-5]、累加生成改进法[6]、离散指数函数优化法[7]、缓冲算子法[8]、初始值优化法[9]、区间灰数建模法[10-11]、直接建模法[12], 以及 GM(1,1) 模型的几种基本形式和适用范围[13].

这些建模和优化方法都是基于一阶累加生成序列建模, 再一阶累减还原得到预测值. 文献 [14] 利用分数阶泰勒展开式定义了分数阶累加算子; 文献 [15-18] 使用二项式系数定义了分数阶累加生成算子, 阶数 $r \in (0,1]$, 定义 $\alpha^{(r)}X^{(0)} = \alpha^{(1)}X^{(1-r)}$, 即先求 $X^{(0)}$ 的 $1-r$ 阶累加生成序列 $X^{(1-r)}$, 再求 $X^{(1-r)}$ 的 1 阶累减生成序列, 得到 r 阶累减生成序列 $X^{(-r)}$; 文献 [18] 提出了基于分数阶累加的离散灰色模型, 给出分数阶累加生成算子的表达式, 但未给出分数阶累减生成算子的解析表达式, 也未研究分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的互逆性等重要性质, 在建立分数阶 DGM(1,1) 模型时, 只是简单地将阶数设定为 1/2 和 2/3, 阶数取值缺少依据, 未给出阶数取值的优化算法; 文献 [19-20] 利用二次项系数与阶乘形式定义了分数阶累加生成算子矩阵 $A^r = (a_{ij}^r)_{n\times n}$, 再通过逆

收稿日期: 2015-09-08；**修回日期:** 2015-11-30.

基金项目: 欧盟委员会第 7 研究框架“玛丽·居里国际智力引进计划”项目(FP7-PIIF-GA-2013-629051)；国家自然科学基金项目(91324003, 71271226)；教育部人文社科基金项目(12YJC630140, 14YJAZH033)；重庆市科委前沿与应用基础研究项目(cstc2014jcyjA00024, cstc2013jcyjA0998)；重庆市教委科技项目(KJ1400606)；重庆市社会科学规划博士项目(2012BS15)；电子商务及供应链系统重庆市重点实验室基金项目(2012ECSC0220).

作者简介: 孟伟 (1979−), 男, 副教授, 博士, 从事灰色系统理论、系统建模与仿真等研究；曾波 (1975−), 男, 教授, 博士, 从事灰色系统理论等研究.

矩阵方式 $A^r A^{-r} = E$ 得到分数阶累减生成序列; 文献 [21] 推导出分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的解析表达式, 证明了两算子满足交换律和指数率, 同阶累加生成算子和累减生成算子满足互逆性.

本文在互逆的分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的基础上, 建立分数阶算子离散灰色模型, 给出分数阶算子 DGM(1,1) 模型建模方法和最小平均相对误差下阶数优化的遗传算法.

1 分数阶累加生成算子与累减生成算子

定义 1[21] 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, 且 $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成算子, 其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i),\ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

定理 1[21] 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r \in R^+$, $X^{(r)} = (x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \cdots, x^{(r)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成算子, 其中

$$x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i),\quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

定义 2[21] 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $X^{(-1)} = (x^{(-1)}(1), x^{(-1)}(2), \cdots, x^{(-1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累减生成算子, 其中

$$x^{(-1)}(k) = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1),\quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

定理 2[21] 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r \in R^+$, 且 $X^{(-r)} = (x^{(-r)}(1), x^{(-r)}(2), \cdots, x^{(-r)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的 r 阶累减生成算子, 其中

$$x^{(-r)}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)} x^{(0)}(k-i),\quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

定理 3[21] 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, 且有 $p \in R^+$, $q \in R^+$, $X^{(p)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 p 阶累加生成序列, $X^{(-q)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 q 阶累减生成序列, $(X^{(p)})^{(-q)}$ 是 $X^{(p)}$ 的 q 阶累减生成序列, $(X^{(-q)})^{(p)}$ 是 $X^{(-q)}$ 的 p 阶累加生成序列. 若 $p-q>0$, 则 $X^{(p-q)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 $p-q$ 阶累加生成序列; 若 $p-q<0$, 则 $X^{(p-q)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 $q-p$ 阶累减生成序列. 多重累减生成算子和累加生成算子满足交换律和指数率, 即

$$X^{(p-q)} = (X^{(p)})^{(-q)} = (X^{(-q)})^{(p)}. \tag{5}$$

定理 4[21] 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r \in R^+$, $X^{(r)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列, $X^{(-r)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 r 阶累减生成序列, r 阶累加生成算子与 r 阶累减生成算子互为逆运算, 即

$$X^{(0)} = (X^{(r)})^{(-r)} = (X^{(-r)})^{(r)}. \tag{6}$$

2 分数阶算子离散灰色模型

定义 3 设 $X^{(0)}$ 和 $X^{(r)}$ 如定理 1 所示, 则称

$$x^{(r)}(k+1) = \beta_1 x^{(r)}(k) + \beta_2 \tag{7}$$

为分数阶算子离散灰色模型.

特别地, 当 $r=1$ 时, 分数阶算子离散灰色模型 $x^{(r)}(k+1) = \beta_1 x^{(r)}(k) + \beta_2$ 变为 $x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2$, 即 DGM(1,1) 模型; 当 $r=0$ 时, $x^{(r)}(k+1) = \beta_1 x^{(r)}(k) + \beta_2$ 变为 $x^{(0)}(k+1) = \beta_1 x^{(0)}(k) + \beta_2$, 即 DGM(1,1) 直接建模法.

定理 5 设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r \in R^+$, $X^{(r)} = (x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \cdots, x^{(r)}(n))$ 为 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 的 r 阶累加生成序列, 其中

$$x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i),\quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

可以运用最小二乘法估计分数阶算子 DGM(1,1) 模型 $x^{(r)}(k+1) = \beta_1 x^{(r)}(k) + \beta_2$ 中的参数向量 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\beta_1, \beta_2]^{\mathrm{T}}$, 即

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(r)}(2) \\ x^{(r)}(3) \\ \vdots \\ x^{(r)}(n) \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} x^{(r)}(1) & 1 \\ x^{(r)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(r)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

因为

$$x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i),\ k = 1, 2, \cdots, n,$$

所以

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(r)}(2) \\ x^{(r)}(3) \\ \vdots \\ x^{(r)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\Gamma(r+2-i)}{\Gamma(2-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i) \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\Gamma(r+3-i)}{\Gamma(3-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) \\ \frac{r(r+1)}{2} x^{(0)}(1) + rx^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} x^{(r)}(1) & 1 \\ x^{(r)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(r)}(n-1) & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{1}\frac{\Gamma(r+1-i)}{\Gamma(1-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i) & 1 \\ \sum_{i=1}^{2}\frac{\Gamma(r+2-i)}{\Gamma(2-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma(r+n-1-i)}{\Gamma(n-1-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(1) & 1 \\ rx^{(0)}(1)+x^{(0)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma(r+n-1-i)}{\Gamma(n-1-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i) & 1 \end{bmatrix}.$$

定理 6　设 B、Y、$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 如定理 5 所述, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\beta_1, \beta_2]^{\rm T} = (B^{\rm T}B)^{-1}B^{\rm T}Y$, 则有:

1) 分数阶算子 DGM(1,1) 模型的时间响应序列表示为

$$\hat{x}^{(r)}(k) = \Big(x^{(0)}(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\Big)\beta_1^{k-1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_1},\quad k = 2, 3, \cdots, n; \tag{9}$$

或

$$\hat{x}^{(r)}(k) = x^{(0)}(1)\beta_1^{k-1} + \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1}\beta_2,\ k = 2, 3, \cdots, n. \tag{10}$$

2) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = (\hat{x}^{(r)})^{(-r)}(k) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)}\hat{x}^{(r)}(k-i),\quad k = 2, 3, \cdots, n; \tag{11}$$

$$\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1).$$

定理 7　DGM(1,1) 模型是分数阶算子 DGM(1,1) 模型在 $r = 1$ 时的特例.

$r = 1$ 时为一阶累加生成算子, 定理 7 结论显然成立.

3　阶数优化

最小平均相对误差下分数阶算子 DGM(1,1) 模型的最优阶数在于求解如下最优化问题:

$$\min f(r) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)},\ r \in R^+. \tag{12}$$

最优阶数 r 取值的自适应变异粒子群优化算法[22]计算流程如下:

Step 1: 随机初始化粒子群中粒子的位置和速度, 可取 pBest $= 1$, 即 DGM(1,1) 模型.

Step 2: 将粒子中的 pBest 设置为当前位置, 并将 gBest 设置为初始群体中最佳粒子的位置.

Step 3: 计算分数阶算子 DGM(1,1) 模型中当 $r = p$Best 时的平均相对误差.

1) 计算原始序列 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列 $X^{(r)}$;

2) 求解参数 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\beta_1, \beta_2]^{\rm T}$;

3) 确定 $\hat{x}^{(r)}(k)$ 时间响应式;

4) 计算 $X^{(r)}$ 的模拟值;

5) 还原求出 $X^{(0)}$ 的模拟值 $\hat{X}^{(0)}$;

6) 计算平均相对误差 $f(p$Best$)$;

7) 判断 $|f(p$Best$) - f(g$Best$)|$ 是否小于给定收敛值 δ, 如果满足, 则转向 Step 9, 否则执行 Step 4.

Step 4: 对粒子群中的所有粒子执行如下操作:

1) 更新粒子的位置和速度;

2) 如果粒子适应度优于 pBest 的适应度, 则 pBest 设置为新位置;

3) 如果粒子适应度优于 gBest 的适应度, 则 gBest 设置为新位置.

Step 5: 计算群体适应度方差 σ^2 和 $f(g$Best$)$.

Step 6: 计算变异概率 p_m.

Step 7: 产生随机数 $\varepsilon \in [0, 1]$, 如果 $\varepsilon < p_m$, 则执行变异操作, 否则转向 Step 8.

Step 8: 判断算法收敛准则是否满足, 如果满足, 则执行 Step 9, 否则转向 Step 3.

Step 9: 输出 gBest, 即阶数 r 最优取值, 输出 $r = g$Best 分数阶算子 DGM(1,1) 模型的预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$、相对误差 $\varDelta_k$ 和平均相对误差 $\varDelta$, 算法运行结束.

4　算例比较

例 1　文献 [9] 提出了分段修正 DGM(1,1) 模型, 用我国 1994 ～ 2006 年外汇储备建立 DGM(1,1) 模型, 再将原始数据分成 1994 ～ 2000 年和 2001 ～ 2006 年两段, 建立分段修正 DGM(1,1) 模型. 本文按照文献 [9] 中的分段方式, 通过粒子群优化算法进行验证得到: 1994 ～ 2000 年数据在 $r = 0.020$ 时, 分数阶算子 DGM(1,1) 模型有最小平均相对误差 4.333%, 2001 ～ 2006 年数据在 $r = 0.662$ 时, 分数阶算子 DGM(1,1) 模型有最小平均相对误差 3.662%, 综合平均相对误差为 4.028%, 均小于 DGM(1,1) 模型和分段修正 DGM(1,1) 模型的平均相对误差. 结果比较如表 1 所示.

例 2　文献 [12] 提出了近似非齐次指数序列的 DGM(1,1) 直接建模法, 比较了上升凸、上升凹、下降凸、下降凹、严格非齐次、近似非齐次等 6 种形式的数据序列, 对 DGM(1,1) 模型和 DGM(1,1) 模型直接建模的模拟精度进行了比较. 本文通过粒子群优化算法, 使用分数阶算子 DGM(1,1) 模型对文献 [12] 各数据序列进行模拟, 分数阶算子 DGM(1,1) 模型全部具有最小平均相对误差. 各数据序列的最小平均相对误差对应的最优阶数 r 值、模拟数据、模拟精度与 DGM(1,1) 模型、DGM(1,1) 直接建模方法计算结果比较如表 2 所示. 当最优阶数取值为 0 时, 表明原始数据序列适合使用 DGM(1,1) 直接建模法; 当最优阶数 r 取值接近 1 时, DGM(1,1) 模型具有更好的拟合精度.

表 1　我国外汇储备数据分数阶算子 DGM(1,1) 模型最小平均相对误差模拟结果

年份	外汇储备	DGM(1,1)		文献 [9] 模型		$r=0.020$	
	$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%
1994	51.620						
1995	73.597	25.687	65.098	94.227	28.031	82.846	12.567
1996	105.049	34.109	67.530	106.679	1.552	107.697	2.521
1997	139.890	45.294	67.622	120.778	13.662	127.487	8.866
1998	144.959	60.145	58.509	136.740	5.670	143.251	1.178
1999	154.675	79.867	48.365	154.811	0.088	155.805	0.731
2000	165.574	106.055	35.947	175.271	5.856	165.796	0.134
平均相对误差 Δ /%				9.143		4.333	
2001	212.165	140.831	33.622			$r=0.662$	
2002	286.407	187.009	34.705	288.721	0.808	303.083	5.823
2003	403.251	248.329	38.418	407.365	1.020	431.186	6.927
2004	609.932	329.756	45.936	574.762	5.766	594.877	2.468
2005	818.872	437.882	46.526	810.949	0.968	806.887	1.464
2006	1 066.300	581.463	45.469	1 144.191	7.305	1 083.648	1.627
平均相对误差 Δ /%				4.846		3.662	
综合平均相对误差 Δ /%		48.979		7.190		4.028	

表 2　非齐次数据分数阶算子 DGM(1,1) 模型最小平均相对误差模拟结果

序列	建模数据	数据特征	模型	平均相对误差 /%
X_1	(1.2, 2.9, 4.2, 5.1, 5.8)	上升凸	文献 [12]	0.295 8
			$r=1$	6.149 2
			$r=0$	0.295 49
X_2	(8.5, 16.4, 32.3, 64.2, 128.1)	上升凹	文献 [12]	0.175 4
			$r=1$	0.562 1
			$r=0.018$	0.008 6
X_3	(5.8, 5.1, 4.2, 2.9, 1.2)	下降凸	文献 [12]	0.332 1
			$r=1$	19.175 1
			$r=0$	0.331 36
X_4	(128.1, 64.2, 32.3, 16.4, 8.5)	下降凹	文献 [12]	0.075 6
			$r=1$	0.737 1
			$r=0.985$	0.025 8
X_5	(5, 11, 29, 83, 245)	严格非齐次	文献 [12]	0.000 0
			$r=1$	13.839 3
			$r=0$	0.000 0
X_6	(1.4, 2, 2.8, 3.9, 5.4)	近似非齐次	文献 [12]	0.109 9
			$r=1$	0.276 6
			$r=0.943$	0.046 7

例 3　文献 [18] 提出了基于分数阶累加的离散灰色模型, 用表 3 中江苏省 2003 ～ 2008 年货物周转量分别建立 $\mathrm{DGM}^{1/2}(1,1)$ 模型和 $\mathrm{DGM}^{2/3}(1,1)$ 模型, 并预测 2009 年的货物周转量. 本文采用粒子群优化算法, 当 $r=0.27$ 时, 分数阶算子 DGM(1,1) 模型对 2003 ～ 2008 年数据的拟合平均相对误差为 0.85%, 2009 年数据的预测误差为 0.61%, 预测误差小于 $\mathrm{DGM}^{1/2}(1,1)$ 模型、$\mathrm{DGM}^{2/3}(1,1)$ 模型和 DGM(1,1) 模型的计算结果, 结果比较如表 4 所示.

表 3　江苏省 2003 ～ 2009 年货物周转量[20]

年份	$x^{(0)}(k)$
2003	1 817.44
2004	2 398.13
2005	3 068.3
2006	3 644.14
2007	4 098.42
2008	4 707.5
2009	5 154.46

表 4　2009 年预测值比较

模型	预测值	相对误差 /%
$\mathrm{DGM}^{1/2}(1,1)$	5 236.45	1.59
$\mathrm{DGM}^{2/3}(1,1)$	5 303.33	2.89
DGM(1,1)	5 585.60	8.36
$r=0.27$	5 185.92	0.61

5　结　论

本文在互逆的分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的基础上, 提出了分数阶算子 DGM(1,1) 模型, 通过粒子群优化算法求解最小平均相对误差下的最优阶数, 给出了模型的计算方法. 在最优阶数下, 分数阶算子 DGM(1,1) 模型可取得比 GM(1,1) 模型、DGM(1,1) 模型和 DGM(1,1) 直接建模更高的拟合精度. 实际上, DGM(1,1) 直接建模法和 DGM(1,1) 模型分别是分数阶算子 DGM(1,1) 模型当 $r=0$ 和 $r=1$ 时的两种特例. 在更为普遍的情况下, 分数阶算子

DGM(1, 1) 模型将在阶数 r 取值 0 和 1 之外具有最小平均相对误差. 分数阶算子 DGM(1,1) 模型对于提高灰色预测模型的模拟精度, 拓展灰色预测模型的应用范围具有积极意义. 分数阶算子 DGM(1,1) 模型对不同特征数据序列的拟合精度和适用范围还有待研究.

参考文献(References)

[1] Liu S F, Lin Y. Grey systems: Theory and applications[M]. London: Springer, 2011: 1-3.

[2] Liu S F, Lin Y. Grey information: Theory and practial applications[M]. London: Springer, 2006: 10-11.

[3] 刘思峰, 杨英杰, 吴利丰, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 7 版. 北京: 科学出版社, 2014: 1-5.
(Liu S F, Yang Y J, Wu L F, et al. Grey system theories and its applications[M]. 7th ed. Beijing: Science Press, 2014: 1-5.)

[4] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1, 1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.)

[5] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1173-1186.

[6] 陈超英. 累加生成的改进和 GM(1,1,t) 灰色模型[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(2): 105-109.
(Chen C Y. Improvement on the AGO and a grey model GM(1,1,t)[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2007, 37(2): 105-109.)

[7] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 61-67.
(Wang Z X, Dang Y F, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(2): 61-67.)

[8] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 基于新弱化算子的 GM(1,1) 建模精度分析[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(7): 132-138.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Analysis on modeling accuracy of GM(1,1) based on new weakending operatos[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(7): 132-138.)

[9] 姚天祥, 刘思峰, 党耀国. 初始值优化的离散灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2394-2398.
(Yao T X, Liu S F, Dang Y G. Discrete grey prediction model based on optimized initial value[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2394-2398.)

[10] 曾波, 刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 174-180.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model of interval grey number based on its geometrical characteristics[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(2): 174-180.)

[11] 孟伟, 刘思峰, 曾波. 区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 773-776.
(Meng W, Liu S F, Zeng B. Standardization of interval grey number and research on its prediction modeling and application[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 773-776.)

[12] 曾波, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的 DGM(1,1) 直接建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(2): 297-301.
(Zeng B, Liu S F. Direct modeling approach of DGM(1,1) with approximate non-homogeneous exponential sequence[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2011, 31(2): 297-301.)

[13] 刘思峰, 曾波, 刘解放, 等. GM(1,1) 模型的几种基本形式及其适用范围研究[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(3): 501-508.
(Liu S F, Zeng B, Liu J F, et al. Several basic models of GM(1,1) and their applicable bound[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 501-508.)

[14] Liu Y R, Hu Y, Hou M L. A fractional order grey prediction algorithm[J]. J of Grey System, 2011, 14(4): 139-144.

[15] Wu L, Liu S, Yao L, et al. Using fractional order accumulation to reduce errors from inverse accumulated generating operator of grey model[J]. Soft Computing, 2014, 19(2): 483-488.

[16] Wu L, Liu S, Yao L, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.

[17] 吴利丰, 刘思峰, 刘健. 灰色 GM(1,1) 分数阶累积模型及其稳定性[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 919-924.
(Wu L F, Liu S F, Liu J. GM(1,1) model based on fractional order accumulating method and its Stability[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 919-924.)

[18] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1822-1827.
(Wu L F, Liu S F, Yao L G. Discrete grey model based on fractional order accumulate[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(7): 1822-1827.)

[19] Xiao X, Guo H, Mao S. The modeling mechanism, extension and optimization of grey GM(1,1) model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(5): 1896-1910.

[20] Mao S, Gao M, Wen J, et al. Generalized admissible region of class ratio for fractional accumulated GM(1,1) model[J]. J of Grey System, 2014, 26(3): 55-68.

[21] 孟伟, 曾波. 分数阶算子与灰色预测模型研究[M]. 北京: 科学出版社, 2015:17-41.
(Meng W, Zeng B. Study on fractional order operators and grey prediction models[M]. Beijing: Sciences Press, 2015: 17-41.)

[22] 吕振肃, 侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 416-420.
(Lü Z S, Hou Z R. Particle swarm optimization with adaptive mutation[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(3): 416-420.)

(责任编辑：闫 妍)