

高维多峰函数的量子行为粒子群优化算法改进研究

田 瑾

(首都经济贸易大学 信息学院, 北京 100070)

摘 要: 针对群智能优化算法求解高维多峰函数难以优化粒子每一维和易陷入局部极值点问题, 在分析量子行为粒子群优化(QPSO)算法机理的基础上, 对QPSO算法进行改进, 采取前后代粒子逐维对比优化, 并构造一种新的调控收缩扩张系数函数. 实验结果表明, 改进算法在收敛精度和收敛速度上明显优于QPSO算法, 具有很强的避免陷入局部最优的能力, 非常适合求解高维、多峰优化问题.

关键词: 量子行为粒子群优化; 高维多峰函数; 收缩扩张系数

中图分类号: TP301

文献标志码: A

Improvement of quantum-behaved particle swarm optimization algorithm for high-dimensional and multi-modal functions

TIAN Jin

(Information School, Capital University of Economics and Business, Beijing 100070, China. E-mail: tian@cueb.edu.cn)

Abstract: For the swarm intelligence optimization algorithm of solving high-dimensional and multi-modal functions, it is difficult to optimize the particles for each dimension, and it is easy to fall into the local extreme point. On the basis of analyzing the mechanism of quantum-behaved particle swarm optimization(QPSO) algorithm, the QPSO algorithm is improved. Each dimension of the previous generation particle is compared with the later generation to optimize, and a new control function of the contraction-expansion coefficient is constructed. The experimental results show that the improved algorithm significantly outperforms the QPSO algorithm in the convergence accuracy and convergence rate. Specifically, it is of strong ability to avoid falling into the local optimum, and is very suitable for solving high-dimensional and multi-modal optimization problems.

Keywords: quantum-behaved particle swarm optimization; high-dimensional and multi-modal function; contraction-expansion coefficient

0 引 言

采用群智能优化算法处理高维、多峰函数主要存在如下问题: 1) 高维限制了优化每一维的可实现性; 2) 多极值使全局搜寻很困难, 所获得的解常常是局部最优解. 作为群智能优化方法的典型代表——粒子群优化(PSO)算法, 具有控制参数少、计算简单、易于实现等特点, 得到了广泛应用^[1-3]. 但PSO粒子只能在有限且逐渐缩小的区域搜索, 无法覆盖整个解空间, 不能保证收敛于全局最优解^[4-5]. QPSO算法不仅参数比PSO少, 而且在理论上已证明其可收敛到全局最优解^[6-8], 在许多实际领域应用中优于PSO算法^[9]. 然而, QPSO同PSO等群智能算法一样, 也存在易陷入局

部最优解的早熟收敛问题. 为此, 在实际应用中人们提出了混沌QPSO算法^[10]、多方协作QPSO算法^[11]、带自适应变异的QPSO算法^[12]、带极值扰动算子的QPSO^[13]等改进方法.

QPSO在处理高维、多峰函数时易陷入局部最优解的早熟收敛, 是由于QPSO搜索依赖于 P_{best} 、 G_{best} , 却根本不知道它们是否会落入局部最优. 在许多局部极值的复杂搜索环境中, 粒子陷入局部最优的几率非常大. 另一方面, QPSO必须根据粒子整体评价优劣, 而随机性进化却根本不能保证粒子每一维都同时趋向最优, 因而同时搜索出高维函数每一维最优解的概率非常小.

收稿日期: 2015-09-10; 修回日期: 2016-01-21.

基金项目: 北京自然科学基金项目(9142003).

作者简介: 田瑾(1964—), 女, 副教授, 从事机器学习、智能计算与应用等研究.

为了解决上述问题, 本文通过简要分析 QPSO 算法原理, 提出了一种改进的 QPSO 算法. 改进思路是:

1) 改进粒子优劣的评判方式, 通过对前后代粒子逐维比对, 优化每一维, 并设法加快收敛进程;

2) 平衡全局开拓探测能力和局部挖掘开发能力, 既要防止陷入局部最优, 又要促进收敛精度.

1 QPSO 算法原理

2004 年, Sun 等^[6-7]基于 Clerc 等关于粒子收敛行为的研究成果, 从量子力学的角度提出了 QPSO 算法. 引入量子理论赋予粒子新特性, 将粒子运动状态由波动函数 ψ 来表示, 代替 PSO 算法中以速度、位置表示粒子状态. 因而能借助波函数统计意义, 由 ψ 给定的概率密度函数确定粒子在某时刻某位置出现的概率, 将 PSO 算法限定范围的轨道化搜索转化为更广范围的概率化搜索: 量子化粒子能以一定概率密度出现在解空间任何点, 因而可依概率搜索整个解空间^[7-8].

QPSO 算法的总体思路是, 以 δ 势阱为基础, 通过求解薛定谔方程得到粒子在某点出现的概率密度函数, 再利用蒙特卡洛反变换获得粒子位置. 其原理概述如下.

在一个 D 维目标搜索空间中, QPSO 算法由 M 个粒子组成群体 $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_M(t)\}$, 每个粒子都代表一个潜在解. 在 t 时刻, 第 i 个粒子位置为 $X_i(t) = [X_{i,1}(t), X_{i,2}(t), \dots, X_{i,D}(t)]$, $i = 1, 2, \dots, M$. 粒子没有速度向量, 个体最好位置为 $P_{best_i}(t) = [P_{best_{i,1}}(t), P_{best_{i,2}}(t), \dots, P_{best_{i,D}}(t)]$, 群体最好位置为 $G_{best}(t) = [G_{best_1}(t), G_{best_2}(t), \dots, G_{best_D}(t)]$, 且 $G_{best}(t) = P_{best_g}(t)$, g 为处于群体最好位置粒子的下标, $g \in \{1, 2, \dots, M\}$. 个体最好位置的平均由下式确定:

$$m_{best}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{best_i}(t) = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{best_{i,1}}(t), \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{best_{i,2}}(t), \dots, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{best_{i,D}}(t) \right]. \quad (1)$$

对于最小化问题, 粒子 i 个体最好位置 $P_{best_i}(t)$ 由下式确定:

$$P_{best_i}(t) = \begin{cases} X_i(t), & f[X_i(t)] < f[P_{best_i}(t-1)]; \\ P_{best_i}(t-1), & f[X_i(t)] \geq f[P_{best_i}(t-1)]. \end{cases} \quad (2)$$

根据 Clerc 研究粒子收敛行为的结论, 粒子 i 的局部吸引子 $P_i(t)$ 由下式确定:

$$P_i(t) = \alpha(t)P_{best_i}(t) + (1 - \alpha(t))G_{best}(t), \quad \alpha(t) \sim U(0, 1). \quad (3)$$

各粒子在 $P_i(t)$ 点 δ 势阱内随机搜索, 并向 $P_i(t)$ 点收敛. 最终算法的整体收敛性将使所有粒子的局部吸引子 $P_i(t)$ 、个体最好位置 $P_{best_i}(t)$ 、群体最好位置 $G_{best}(t)$ 都收敛到一点.

粒子的最终进化方程为

$$X_i(t+1) = P_i(t) \pm \beta |m_{best}(t) - X_i(t)| \ln(1/u_i(t)), \quad u_i(t) \sim U(0, 1). \quad (4)$$

其中: 参数 β 从 1.0 线性减小至 0.5, 可以普遍取得较好的优化效果, 目前在实际应用中 QPSO 算法大多采取这种参数控制方式; $u_i(t)$ 为 (0,1) 区间均匀分布的随机数, 若 $u_i(t)$ 大于 0.5, β 前取负号, 否则取正号.

2 改进的 QPSO 算法 (IQPSO)

2.1 前后代粒子逐维优化

由式 (1)、(3)、(4) 可知, $m_{best}(t)$ 和 $P_i(t)$ 与 $P_{best_i}(t)$ 和 $G_{best}(t)$ 有关, 而 $P_{best_i}(t)$ 、 $G_{best}(t)$ 又是在 $X_i(t)$ 向 $X_i(t+1)$ 进化的过程中产生的. 因而, 式 (4) 中 $X_i(t)$ 不仅直接影响 $X_i(t+1)$, 也间接影响 $P_{best_i}(t)$ 、 $G_{best}(t)$ 的进化更新. 所以, 设法增大从 $X_i(t)$ 进化出更优 $X_i(t+1)$ 的几率, 肯定有利于优化问题的高效解决. 为此, 本文从以下两方面采取措施:

1) 通过多次蒙特卡洛随机观测并与前一代粒子协作进化, 提高 $X_i(t+1)$ 的优秀几率. QPSO 原算法是由一次蒙特卡洛随机观测值 $X_i(t)$ 进化为 $X_i(t+1)$. 若依据量子测不准原理进行多次蒙特卡洛随机观测, 则可由 $X_i(t)$ 得到多个 $X_i(t+1)$, $P_{best_i}(t+1)$ 被 $X_i(t+1)$ 更新的概率会增大, $G_{best}(t+1)$ 得到进化的几率也越大, 进而促使 $P_i(t)$ 移到新位置, 并引导粒子搜索新区域. 这样, 算法逃脱局部最优的能力强、抗早熟收敛效果好. 鉴于会成倍增加运算量, 本文通过对 1~10 次蒙特卡洛随机观测效果进行评估发现, 过多蒙特卡洛随机观测对优化效果影响并不明显, 而最为关键的是让 $X_i(t)$ 参与同多个 $X_i(t+1)$ 的对比优选. 因此, 为兼顾优化效果与效率, 本文选取 2 次蒙特卡洛随机观测.

2) 通过逐维优选, 保证 $X_i(t+1)$ 肯定不比 $X_i(t)$ 差. QPSO 算法中每个粒子代表一个可行解, 每次迭代都按式 (4) 更新粒子所有维, 并依据粒子整体表现评判是否优于上一代 $P_{best_i}(t)$. 很显然, 尽管这种整体性随机进化并不能使粒子的每一维都趋于最优解, 但优秀粒子却作为一个整体成为 $P_{best_i}(t+1)$. 相对而言, 尽管整体不优秀粒子的某些维很可能比优秀

粒子的对应维更好, 却不能在 $P_{\text{best}_i}(t+1)$ 中得以体现. 这也正是 QPSO、PSO 对高维函数难以搜寻到每一维最优解的共同症结. 为此, 受文献 [14] 协作进化思想启发, 对粒子 $X_i(t)$ 进行 2 次蒙特卡洛随机观测, 得到 2 个临时的 $X_i(t+1)$ 并与 $X_i(t)$ 协作进化. 具体方法是: 选取三者中适应值最好的粒子作为参照基准, 用其余 2 个粒子分别逐维替换基准粒子对应维. 若替换后适应值更好, 则保留替换后的该维; 否则, 保留基准粒子的对应维, 再由所有保留下来的维构成正式的新一代粒子 $X_i(t+1)$.

上述改进方法中, 由于本代粒子 $X_i(t)$ 参与了逐维优选, 获得的 $X_i(t+1)$ 在多数情况下都要比 $X_i(t)$ 好, 最不利时是二者相当. 在搜索早期, $X_i(t+1)$ 比 $X_i(t)$ 优秀的几率非常高, 因而会使 $P_{\text{best}_i}(t+1)$ 得到更新, 进而又可促使 $G_{\text{best}}(t+1)$ 得以更新, 并可按式 (3) 得到新的局部吸引子 $P_i(t+1)$. 如此这般连锁性更新, 最终引导粒子搜索新区域. 事实上, 在如此反复的循环过程中, $P_{\text{best}_i}(t)$ 、 $G_{\text{best}}(t)$ 的迅速变化促进了寻优收敛进程, 从而可抵消改进算法增加的大部分时间开销, 提高新算法执行效率. 但同时也应注意到, 这也有可能使粒子在未及充分搜索解空间时迅速丧失多样性, 造成搜索到全局最优解概率降低. 因此, 在保持这种收敛性的同时, 很有必要加强全局搜索能力.

2.2 收缩扩张系数的调控

文献 [15] 指出, 收缩扩张系数 β 的取值方法与取值范围会对粒子的行为产生影响. β 取值越大, 粒子找到新知识的可能性越大、创造力越强; β 取值越小, 粒子的局部挖掘开发能力越强、精细搜索效果越好. 当 $\beta < 1.781$ 时, QPSO 算法才能收敛. 在实际应用中对参数 β 采取从 1.0 线性递减至 0.5 的调控方式. 鉴于此, 为尽量保持早期搜索的粒子多样性, 加强全局开拓探测, 并兼顾后期局部挖掘开发精细化搜索、提高收敛精度的需要, 算法应该在运行初期使 β 取较大值、后期取较小值. 为此, 参照单极 Sigmoid 函数, 本文构造出如下所示的函数, 调控参数随算法迭代运行而变化:

$$\beta(t) = \phi(1 + \text{eps}(\omega + t))^{-1}. \quad (5)$$

式 (5) 的函数性质决定了 $\beta(t) \in (0, \phi)$, $t \rightarrow +\infty$ 时, $\beta(t) \rightarrow 0$; $t \rightarrow -\infty$ 时, $\beta(t) \rightarrow \phi$. 因此, 若设定的最大迭代次数为 Maxgeneration, $t \in [-0.5 \times \text{Maxgeneration}, +0.5 \times \text{Maxgeneration}]$. 式 (5) 的曲线如图 1 所示, 像字母“Z”.

综合考虑文献 [15] 对收缩扩张系数的取值建议以及本文改进需求, 令 $\phi = 1.58$. 参数 ω 的直观表现是反映“Z”字曲线被拉伸的程度, 其实质是决定算法

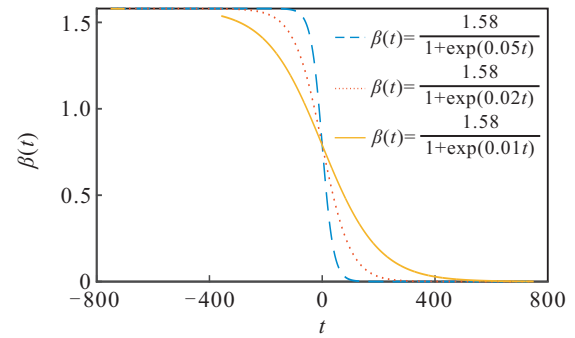


图 1 收缩扩张系数与 ω 关系图

运行中期 $\beta(t)$ 取值变化的快慢: ω 取值越小, “Z”字曲线被拉伸得越平缓, 要保持相同的 $\beta(t)$ 值, 需相应设定较大的 Maxgeneration 值; ω 取值越大, “Z”字曲线越趋于陡峭, 要保持相同的 $\beta(t)$ 值, 只需相应设定较小的 Maxgeneration 值. 经多次校验比较, 取 $\omega = 0.02$ 可适合于绝大多数优化问题. 对于不同的优化问题只需试运行几次, 即可摸索确定适当的 Maxgeneration 值. 另外, 为更加便于调控全局开拓探测能力与局部挖掘开发能力, 也可按下式:

$$\beta(t) = \begin{cases} 1.58(1 + \text{eps}(0.02t))^{-1}, & t \leq 0; \\ 1.58(1 + \text{eps}(0.01t))^{-1}, & t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

调整 $\beta(t)$ 的取值变化; 并且为加强局部精细搜索, 当 $t < 0$ 时还可有针对性地增加迭代次数. 总之, 这种收缩扩张系数调整方式增加了控制灵活性, 更便于实际使用.

3 IQPSO 算法流程

按照上述讨论, IQPSO 的具体执行流程为:

Step 1: 置 $t = 0$, 在问题空间中随机初始化粒子群每个粒子当前位置 $X_i(t)$, 置个体最好位置 $P_{\text{best}_i}(t) = X_i(t)$, 并通过比较 $P_{\text{best}_i}(t)$ 得到 $G_{\text{best}}(t)$.

Step 2: 对粒子群中的每一个粒子 $i(1 \leq i \leq M)$, 执行 Step 3 ~ Step 9.

Step 3: 根据式 (1) 计算粒子群的平均最好位置 $m_{\text{best}}(t)$.

Step 4: 根据式 (3) 计算粒子 i 的局部吸引子 $P_i(t)$.

Step 5: 根据式 (5) 计算收缩扩张系数 $\beta(t)$.

Step 6: 根据式 (4) 对每个粒子产生 2 个临时位置 $X_i(t+1)$.

Step 7: 根据当前位置 $X_i(t)$ 、2 个临时位置 $X_i(t+1)$ 的适应值, 确定基准参照粒子, 再用剩余 2 个粒子的各维替换参照粒子的对应维, 通过比较适应值留用优秀维、构成正式的 $X_i(t+1)$.

Step 8: 计算 $X_i(t+1)$ 的适应值, 根据式 (2) 决定是否更新 $P_{\text{best}_i}(t+1)$.

Step 9: 比较 $P_{\text{best}_i}(t+1)$ 、 $G_{\text{best}}(t)$ 的适应值; 若

优于 $G_{\text{best}}(t)$, 则置 $G_{\text{best}}(t+1) = P_{\text{best}_i}(t+1)$; 否则 $G_{\text{best}}(t+1) = G_{\text{best}}(t)$.

Step 10: 若算法终止条件不满足, 则置 $t=t+1$, 返回 Step 2, 否则算法结束.

4 数值仿真检验

4.1 测试函数

为检验本文的 IQPSO 算法, 将它与 QPSO 算法共同对 Sphere、Rosenbrock、Ackley、Griewank、Rastrigrin 与 CEC 2005 测试函数集中的 Shifted rotated high conditioned elliptic 共 6 个基准测试函数进行仿真实验^[16].

1) Sphere 函数

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^D x_i^2, |x_i| \leq 100; \quad (7)$$

2) Rosenbrock 函数

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^{D-1} (100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2), |x_i| \leq 30; \quad (8)$$

3) Ackley 函数

$$f_3(X) = e + 20 - 20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i)\right), |x_i| \leq 32; \quad (9)$$

4) Griewank 函数

$$f_4(X) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1, |x_i| \leq 600; \quad (10)$$

5) Rastrigrin 函数

$$f_5(X) = \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10), |x_i| \leq 5.12; \quad (11)$$

6) Shifted rotated high conditioned elliptic 函数

$$f_6(X) = \sum_{i=1}^D (10^6)^{\frac{i-1}{D-1}} z_i^2 + f_{\text{bias}}, Z = (X - O)M, \quad |x_i| \leq 100. \quad (12)$$

这 6 个函数中, f_1 、 f_2 、 f_6 是单峰函数, f_3 、 f_4 、 f_5 是多峰函数. Sphere 函数 (f_1) 是简单的单峰函数; Rosenbrock 函数 (f_2) 是复杂的单峰函数, 全局最小值位于非常狭窄的山谷中, 即使在二维情形下, 函数解空间也包含非常多的狭窄通道, 致使搜索全局最优解十分困难; Ackley 函数 (f_3) 有一个很狭窄的全局最优凹陷区域, 在这个区域的周围分布着许多深度较浅的局部最优优点; Griewank 函数 (f_4) 中 $\prod_{i=1}^D \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$

部分使得各变量之间相互关联, 这种关联使全局最优解搜索很困难; 函数 f_5 具有大量按正弦拐点排列且很深的局部极点, 算法很容易陷入一个局部极点而不能自拔; Shifted rotated high conditioned elliptic 函数 (f_6) 是单峰、移动、旋转、不可分、可扩展的函数. 函数 f_1 、 f_3 、 f_4 、 f_5 的全局最优解均为 $[0, 0, \dots, 0]$, 函数 f_2 的全局最优解为 $[1, 1, \dots, 1]$, 函数 $f_1 \sim f_5$ 的全局最优值为 $f(X^*) = 0$. 函数 f_6 的全局最优解为 $O = [o_1, o_2, \dots, o_D]$, 全局最优值为 $f(X^*) = f_{\text{bias}}$ ^[16].

4.2 参数设置与测试环境

对于 IQPSO 算法, 鉴于其收缩扩张系数 $\beta(t) = \phi(1 + \exp(\omega + t))^{-1}$ 取决于参数 ϕ 、 ω 以及最大迭代次数, 而 ω 又与迭代次数关联, 经简单测算对比, 选取最大迭代次数为 1500 次, $\omega = 0.02$, $\phi = 1.58$. 对于 QPSO 算法, 其收缩扩张系数 β 随迭代次数由 1.0 线性减小到 0.5, 优化迭代次数统一设置为 1500 次.

种群粒子个数统一设置为 40. 每个函数分别取 30、60、100、150 维, 在 Intel core i5 2.6 GHz 8 GB RAM 笔记本计算机硬件环境条件下, 利用 Matlab2015a 软件的两组算法分别运行 50 次.

4.3 实验结果及讨论

表 1 为两种算法对测试函数在 30、60、100、150

表 1 6 个函数的测试结果

函数	维数	QPSO		IQPSO	
		Mean Best	St. Dev.	Mean Best	St. Dev.
f_1	30	3.947e-21	7.887e-21	0	0
	60	1.147e-4	3.029e-4	0	0
	100	5.349	3.725	0	0
	150	432.091	191.106	0	0
f_2	30	56.11	72.69	1.368	2.816
	60	227.55	117.77	1.959	3.531
	100	3.245e+3	2.292e+3	3.376	3.936
	150	3.823e+5	2.443e+5	5.309	5.366
f_3	30	19.344	4.937	5.507e-15	1.436e-15
	60	20.855	0.0466	1.069e-14	2.943e-15
	100	20.984	0.0392	1.908e-14	3.036e-15
	150	21.069	0.0309	2.782e-14	2.945e-15
f_4	30	0.0119	0.0148	3.686e-16	1.630e-15
	60	0.0057	0.0126	4.174e-16	2.746e-15
	100	0.867	0.281	2.887e-17	1.265e-16
	150	5.883	3.026	3.597e-15	2.532e-14
f_5	30	30.185	12.668	0	0
	60	120.933	27.719	0	0
	100	351.505	57.669	0	0
	150	749.645	83.372	0	0
f_6	30	7.408e+6	2.858e+6	2.267e+6	8.438e+5
	60	4.599e+7	1.423e+7	8.504e+6	2.281e+6
	100	2.147e+8	5.165e+7	1.961e+7	3.221e+6
	150	4.050e+8	7.886e+7	3.058e+7	4.674e+6

维 50 次优化的结果. 对比考察两项指标:

1) Mean Best: 算法运行 50 遍的最小函数值平均值;

2) St.Dev.(Standard Deviation): 最小函数值的标准差.

表 1 结果表明, 无论是复杂函数还是简单函数, 无论其维数多寡, 本文方法都具有明显优势:

1) 最优函数值远好于 QPSO 算法, 相差几个数量级甚至是十几个数量级;

2) 除 Shifted rotated high conditioned elliptic 函

数 (f_6) 以外, 其余 5 个测试函数 50 次仿真平均最优函数值标准差都很小, 表明最优函数值很接近, 算法稳定可靠;

3) 对同一函数不同维数的测试, 平均最优函数值及其标准差都很接近, 说明 IQPSO 算法的收敛性受维数影响很小.

图 2 为两种算法求解各函数 150 维最优函数值迭代变化的收敛曲线. 为便于在同一图中对比两种算法, 选取迭代 150 次. 可以明显看出, IQPSO 算法比 QPSO 算法收敛速度快得多, 在迭代次数相同的情况下, 前者比后者的收敛精度高.

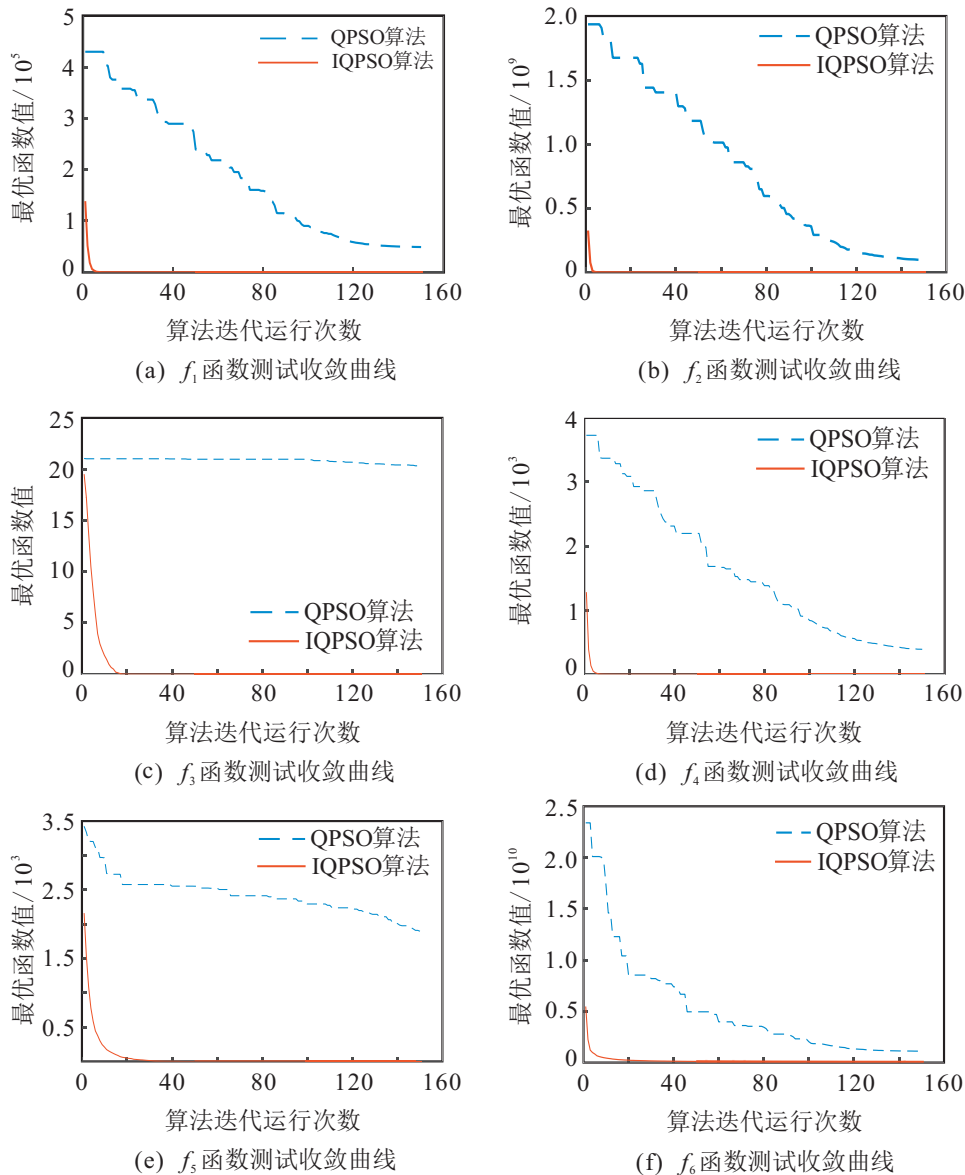


图 2 2 种算法对 6 个函数寻优收敛曲线比较

5 结 论

本文基于对 QPSO 算法原理的分析, 提出了 IQPSO 算法. 改进方法是:

1) 通过两次蒙特卡洛反变换获得粒子的两个位

置, 用它们与前一代粒子协作, 逐维对比优化;

2) 借鉴单极 Sigmoid 函数的极值分别趋近于 1、0 的特点, 构建类似函数调控收缩-扩张系数, 取代 QPSO 算法的线性递减函数.

仿真结果表明, IQPSO 算法显著改进了群智能优化算法处理高维多峰函数的不足; 除在 Shifted rotated high conditioned elliptic 函数 (f_6) 上与 QPSO 算法取得相近的结果以外, 对于其他 5 个测试函数, IQPSO 算法在全局搜索性能、搜索精度和收敛速度上具有明显的优势, 因此改进后的算法能够提高 QPSO 算法的寻优性能.

参考文献(References)

- [1] Khemka N, Jacob C, Cole G. Making soccer kicks better: A study in particle swarm optimization and evolution strategies[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Edinburgh: IEEE Press, 2005: 735-742.
- [2] Mohemmed A W, Kamel N. Particle swarm optimization for Bluetooth scatternet formation[C]. 2nd Int Conf on Mobil Technology, Applications and Systems. Guangzhou: IEEE Press, 2005: 162-166.
- [3] Cohen S C M, de Castro L N. Data clustering with particle swarms[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Vancouver: IEEE, 2006: 1792-1798.
- [4] Bergh F V d, Engelbrecht A P. A new locally convergent particle swarm optimizer[C]. Proc of the IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics. Portland: IEEE, 2002, 3(3): 94-99.
- [5] Bergh F V d. An analysis of particle swarm optimizers[D]. Pretoria: University of Pretoria, 2001: 102-124.
- [6] Sun J, Feng B, Xu W. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior[C]. Proc of 2004 Congress on Evolutionary Computation. Portland: IEEE, 2004: 325-331.
- [7] Sun J, Xu W, Feng B. A global search strategy of quantum-behaved particle swarm optimization[C]. IEEE Int Conf on Cybernetics and Intelligent Systems. Portland: IEEE, 2004: 111-116.
- [8] 孙俊, 方伟, 吴小俊, 等. 量子行为粒子群优化: 原理及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011:31-68.
(Sun J, Fang W, Wu X J, et al. Quantum-behaved particle swarm optimization: Principle and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011: 31-68.)
- [9] Fang W, Sun J, Ding Y R. A review of quantum-behaved particle swarm optimization[J]. IETE Technical Review, 2010, 27(4):336-348.
- [10] 林星, 冯斌, 孙俊. 混沌量子粒子群优化算法[J]. 计算机工程与设计, 2008, 29(10): 2610-2612.
(Lin X, Feng B, Sun J. Chaos quantum-behaved particle swarm optimization[J]. Computer Engineering and Design, 2008, 29(10): 2610-2612.)
- [11] 姜磊, 冯斌, 孙俊. 基于量子粒子群算法的多方法协作优化算法[J]. 计算机应用与软件, 2009, 26(2): 257-259.
(Jiang L, Feng B, Sun J. Multimethod collaborative optimization algorithm based on QPSO[J]. Computer Applications and Software, 2009 26(2): 257-259.)
- [12] 刘俊芳, 高岳林. 带自适应变异的量子粒子群优化算法[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(3): 41-43.
(Liu J F, Gao Y L. Quantum particle swarm optimization algorithm with adaptive mutation[J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(3): 41-43.)
- [13] 阳成虎, 杜文. 基于改进 QPSO 算法的逢低买入最优定价研究[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(8): 210-211.
(Yang C H, Du W. Optimal pricing with group-buying auction based on modified QPSO[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(8): 210-211.)
- [14] Gao H, Xu W B, Sun J. Multilevel thresholding for image segmentation through an improved quantum-behaved particle swarm algorithm[J]. IEEE Trans on Instrumentation and Measurement, 2010, 59(4): 934-946.
- [15] Sun J, Fang W, Wu X J, et al. Quantum-behaved particle swarm optimization: Analysis of individual particle behavior and parameter selection[J]. Evolutionary Computation, 2012, 20(3): 349-393.
- [16] Suganthan P N, Hansen N, Liang J J, et al. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC2005 special session on real-parameter optimization[EB/OL]. [2014-08-16]. http://www.researchgate.net/publication/235710019_Problem_Definitions_and_Evaluation_Criteria_for_the_CEC_2005_Special_Session_on_Real-Parameter_Optimization.

(责任编辑: 孙艺红)