文章编号: 1001-0920 (2016) 11-2106-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1141

一种调整AHP不一致判断矩阵的优化方法

吴诗辉[1], 刘晓东[1], 贾月岭[1], 郭亚坤[2]

(1. 空军工程大学 装备管理与安全工程学院，西安 710051；2. 解放军 95876 部队，甘肃 山丹 734100)

摘 要: 针对 AHP 中不一致判断矩阵, 提出一种新的调整方法. 通过将 AHP 判断矩阵的调整问题等价转化为一个带约束条件的优化问题, 能够保证满足一致性要求条件下, 使得调整前后判断矩阵的差异程度最小. 给出了决策容许区间的概念, 使得元素的变动值在规定的范围内; 同时, 采取逐渐增大扰动变量的方法控制决策容许区间, 以保证最小的改动实现一致性要求, 并设计了改进的模式搜索算法求解优化问题. 最后, 通过算例表明了方法的可行性.

关键词: AHP；一致性；决策容许区间；优化

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Optimization method to improve inconsistent comparison matrix in analytic hierarchy process

WU Shi-hui[1], *LIU Xiao-dong*[1], *JIA Yue-ling*[1], *GUO Ya-kun*[2]

(1. Equipment Management and Safety Engineering College，Air Force Engineering University，Xi’an 710051，China; 2. No.95876 Unit of PLA，Shandan 734100，China．Correspondent：WU Shi-hui，E-mail：wu_s_h@163.com)

Abstract: To solve the inconsistency of the comparison matrix in the analytic hierarchy process(AHP), a new method is proposed. The inconsistency improving problem is equally converted to a optimization problem with constraints, which can minimize the modification of the original comparison matrix while ensuring the consistency requirement of AHP. In addition, the concept of allowable interval is proposed to make sure the modification of elements in the comparison matrix to be within the acceptable range. In order to minimize the modification, a method is designed to increase the allowable interval step by step till the optimal solution is reached and the optimizing algorithm is realized by using the improved pattern search method. Finally an example is given to illustrate the feasibility of the proposed approach.

Keywords: analytic hierarchy process；consistency；allowable interval；optimization

0 引 言

AHP (analytical hierarchy process) 法自提出以来, 在经济、社会、管理、军事等诸多领域得到了广泛应用, 其基本原理是由专家给出判断矩阵来计算排序向量 (或权重). 但是, 专家构造出来的判断矩阵往往不能满足一致性要求, 而不一致的判断矩阵导出的权重难以保证决策的可靠性, 因此, 需要对判断矩阵进行调整.

目前, 有大量文献研究了调整判断矩阵不一致性的方法. 典型的调整方法主要有以下几类: 1) 先确定具有最大偏差的元素, 然后对该元素进行调整, 如诱导矩阵法[1-3]、导出矩阵法[4]、灵敏度法[5]等, 在调整元素时多采取每次增减 1 或 1/2 的方法进行迭代, 调整的幅度存在盲目性[1]. 2) 利用优化理论研究判断矩阵的一致性和权重求解问题, 如文献 [6-7] 以一致性指标最小为目标函数, 利用粒子群算法、遗传算法等研究了区间判断矩阵的权重优化; 文献 [8] 以一致性和相似度为目标函数, 利用小生境遗传算法研究了三角模糊数互反判断矩阵的一致性调整; 文献 [9] 首先给出了判断矩阵元素的区间, 以一致性指标最小为目标函数, 利用遗传算法确定判断矩阵元素的取值和权重, 而该方法的实质是区间数判断矩阵的权重优化问题; 文献 [10] 将矩阵的调整幅度与一致性表征函数之和共同作为目标函数, 利用加速遗传算法进行了寻优, 但由于矩阵的调整幅度与一致性指标存在数量级上的差异, 直接求和进行最小化可能导致片面追求了调整幅度的最小化, 而一致性指标仍然不合格. 3) 反复迭代法, 如文献 [11] 设计了判断矩阵的迭代算法,

收稿日期: 2015-09-13；**修回日期:** 2016-01-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61601501).

作者简介: 吴诗辉 (1982−), 男, 讲师, 博士, 从事装备经济管理、决策理论等研究；刘晓东 (1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事装备经济管理等研究.

使得一致性指标单调下降, 从而得出具有满意一致性且改动量符合要求的判断矩阵, 但修正的幅度往往过大, 参数的取值带有经验性. 还有其他一些方法, 比如经验估计法[12]、最优传递矩阵法[13]、向量夹角余弦法[14]、模式识别法[15]等, 这些方法存在的主要问题是主观性强、修正标准不能保证最优、修正的幅度过大等[10].

一般而言, 判断矩阵的一致性改进目标有两个: 1) 使得改进后的判断矩阵满足一致性要求; 2) 尽量保证对原始判断矩阵的修改不违背专家的初衷. 这两个目标综合在一起, 可以理解为这样的一个带约束条件的优化问题: 在保证判断矩阵满足一致性要求下, 调整判断矩阵的元素值, 使得调整后判断矩阵与原始判断矩阵的差异程度最小. 基于此, 本文提出基于优化的 AHP 不一致判断矩阵调整方法, 以实现在尽可能不改变专家原始意愿的情况下, 通过对原始判断矩阵的微小调整达到满意的一致性, 以得出符合满意性要求的权重结果, 从而为 AHP 判断矩阵一致性调整提供一种新的解决思路.

1　理论基础

经典 AHP 法建立判断矩阵时采用的是 9 标度法[12], 该方法在打分时, 主要根据资料数据、专家意见和评价主体经验, 对评价要素之间取 1～9 之间的整数或者是 1～9 之间的整数的倒数. 然而, 由于决策问题的复杂性和人们认识的多样性, 以及每个判断的片面性, 要求每一个判断都具有一致性, 显然是不可能的. 从判断矩阵的分析看, 这种整数赋值的方法, 本身也是导致出现判断矩阵不一致的重要原因. 比如, 某个判断取 3 时判断矩阵不具有一致性, 而通过修改为 3.1 时, 则具有一致性, 若按照 9 标度法, 则至少要调整到 4. 显然, 对评分专家而言, 打 3 分和 3.1 分几乎没有任何差别, 而 3 分和 4 分则存在主观意愿上的偏差. 因此, 提出连续型判断矩阵概念, 即允许判断矩阵取 [1/10,10] 之间的任意实数 (包括整数和非整数).

定义 1　矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}$, 若对于 $\forall i,j$, 有 $a_{ij}\in R$, $a_{ij}\cdot a_{ji}=1$, $\max\{a_{ij},a_{ji}\}\in[1,10]$ 成立, 则称 A 为连续型判断矩阵, 记为 $A_R=(a_{ij})_{n\times n}$.

显然, A_R 是一个互反判断矩阵, 根据层次分析法理论, 利用最大特征值法, 其对应的权重 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)^{\rm T}$ 可由下式求得:

$$A_R\omega=\lambda_{\max}(A_R)\omega, \tag{1}$$

其中 $\lambda_{\max}(A_R)$ 表示 A_R 的最大特征值或主特征值.

定义 A_R 的一致性比率为

$$\mathrm{CR}(A_R)=\frac{\lambda_{\max}(A_R)-n}{(n-1)\mathrm{RI}}. \tag{2}$$

当 A_R 完全一致时, 有 $\lambda_{\max}(A_R)=n$, 此时 $\mathrm{CR}(A_R)=0$[16]; 当 A_R 不一致时, 有 $\lambda_{\max}(A_R)>n$, 此时 $\mathrm{CR}(A_R)>0$, 且随着不一致程度的增加, $\mathrm{CR}(A_R)$ 值越来越大. 一般地, 若 $\mathrm{CR}(A_R)\leqslant 0.1$, 则认为判断矩阵具有满意的一致性. 式 (2) 中 RI 为随机一致性指标, 它随着判断矩阵的阶数 n 的不同而不同, 取值可通过查表得到 (见文献 [16]).

对于专家意见, 打分 3.1 和 3 实质上可以认为没有任何区别, 为此, 将对应不小于 1 的元素之间的偏差的最大容忍值称为决策容许偏差 δ (一般取 $0.5\leqslant\delta\leqslant 1$). 显然, 这里的偏差为 $|3-3.1|=0.1<\delta$.

定义 2　假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示连续型判断矩阵, 取矩阵 A 的上半部分元素从上至下、从左至右依次排列得到的向量作为 A 的等价决策向量 $\boldsymbol{a}=\{a_{12},\cdots,a_{1n},a_{23},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{(n-1)n}\}$. 将向量 $\boldsymbol{b}=\{b_{12},\cdots,b_{1n},b_{23},\cdots,b_{2n},\cdots,b_{(n-1)n}\}$ 作为 A 的等价优势决策向量, 其中

$$b_{ij}=\begin{cases}a_{ij},\ a_{ij}\geqslant 1;\\ \dfrac{1}{a_{ij}},\ a_{ij}<1.\end{cases}$$

根据判断矩阵的互反性, 矩阵 A 可由 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 唯一确定. 假设修改后判断矩阵的等价优势决策向量为 $\boldsymbol{c}=\{c_{12},\cdots,c_{1n},c_{23},\cdots,c_{2n},\cdots,c_{(n-1)n}\}$, 则修改后元素最大变动值定义为

$$\sigma=\max\{|c_{ij}-b_{ij}|\},\ c_{ij}\in\boldsymbol{c},b_{ij}\in\boldsymbol{b}. \tag{3}$$

显然, 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 中元素个数均为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=n(n-1)/2$. 比如, 对于 4 阶判断矩阵, 可由 $4\times 3/2=6$ 个元素组成的等价优势决策向量唯一确定.

定义 3　假设决策容许偏差为 δ, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示 9 标度法得到的判断矩阵, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 表示连续型判断矩阵, 若对于 $\forall i,j,i\neq j$, 当 $a_{ij}\geqslant 1$ 时, 有 $b_{ij}\geqslant 1$ 且 $|a_{ij}-b_{ij}|\leqslant\delta$ 同时成立, 则称两个判断矩阵在决策上具有可替代性.

两个判断矩阵对应元素存在决策容许范围内的偏差, 二者都能够代表决策者的意愿, 但是由于矩阵元素大小不同, 则两个判断矩阵必然存在不同的一致性比率 CR. 因此, 为了解决 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的不一致性问题, 如果能够在满足对 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可替代的连续型判断矩阵中, 找到一个矩阵 $B^*=(b^*_{ij})_{n\times n}$ 具有满意的一致性, 则实现了在不改变决策者意愿情况下的不一致判断矩阵调整.

2 AHP 不一致判断矩阵的调整优化方法

2.1 判断矩阵调整的决策容许区间

定义 3 中给出了判断矩阵的决策容许偏差, 基于此, 本文给出一个基本决策容许区间, 以供参考, 如表 1 所示. 比如, 认为 a_i 比 a_j 稍重要时, 采取 9 标度法得到 $a_{ij}=3$, 根据定义 3, 取决策容许偏差 $\delta=1$, 此时 $a_{ij}=3$ 可以等价为区间 $[2,4)$ 上的任意实数, 以构建一个与原始判断矩阵等价的连续型判断矩阵. 同时, 考虑到表 1 主要针对 a_i 比 a_j 更重要或同等重要的情况, 因此, 对于 "同样重要" 的情形, 其基本决策容许区间取为 [1,2).

表 1 基本决策容许区间与 9 标度法得分的对应关系

比较关系	9 标度法得分	基本决策容许区间 $[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$
极为重要	9	[8,10]
重要得多	7	[6,8)
重要	5	[4,6)
稍重要	3	[2,4)
同样重要	1	[1,2)

9 标度法的实质是用 1～9 之间的整数对模糊语言评语进行量化, 而本文提出的决策容许区间的实质是对这个整数值进行区间拓宽, 就好比统计考试成绩, "优" 对应于 90～100 分, "良" 对应于 80～89 分, 等等. 图 1 给出了基本决策容许区间与 AHP 模糊语言评语之间的对应关系.

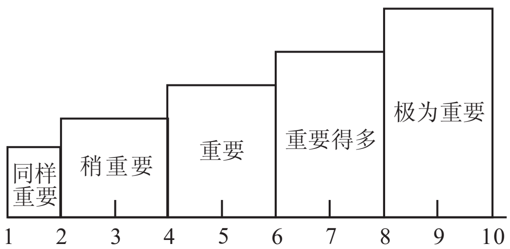

图 1 基本决策容许区间与模糊语言评语之间的对应关系

根据判断矩阵的互反性, 对于 $a_{ij}<1$ 的元素, 其基本决策容许区间为 $[a_{ij}^L, a_{ij}^U]=[1/a_{ji}^U, 1/a_{ji}^L]$.

2.2 构造不一致判断矩阵调整的优化问题

当一个判断矩阵 A 的 $\mathrm{CR}(A)>0.1$ 时, 则认为判断矩阵不具有满意的一致性, 需要对其进行一致性调整. 一般来讲, 对判断矩阵的调整应在不违背专家原意的前提下进行, 目标是实现改进后的判断矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 达到满意的一致性.

根据优化目标的不同, 可以构造如下几类优化模型:

1) 模型 1: 以判断矩阵的总调整量最小[11]为目标函数, 以改进后的判断矩阵达到满意的一致性为约束条件, 在 2.1 节给出的基本决策容许区间范围内寻优, 即

$$\begin{aligned}&\min\Big\{\varepsilon=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-a_{ij})^2}\Big\};\\&\text{s.t.}\ \ c_{ij}\in[a_{ij}^L, a_{ij}^U],\\&\qquad \mathrm{CR(C)}\leqslant 0.1.\end{aligned}\tag{4}$$

其中: ε 表示随机生成的判断矩阵 C 相比原始判断矩阵 A 的偏离程度, $[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ 表示 9 标度法得分对应的决策容许区间; $\mathrm{CR}(C)$ 由式 (2) 进行计算.

2) 模型 2: 以判断矩阵需要调整的元素数量 n_c 最小[17]为目标函数, 约束条件同式 (4), 有

$$\begin{aligned}&\min n_c=N\{c_{ij}\neq a_{ij},\forall i,j,i<j\};\\&\text{s.t.}\ \ c_{ij}\in[a_{ij}^L, a_{ij}^U],\\&\qquad \mathrm{CR}(C)\leqslant 0.1.\end{aligned}\tag{5}$$

其中: $N\{c_{ij}\neq a_{ij},\forall i,j,i<j\}$ 表示矩阵 C 和 A 的等价决策向量中不同的元素数量, 用 n_c 表示. 显然, 该模型的最优解不唯一, 比如最小数量为 2 时, 可能有多种组合均能满足约束条件.

3) 模型 3: 以判断矩阵需要调整的元素最大变动值 σ 最小[11]为目标函数, 约束条件同式 (4), 有

$$\begin{aligned}&\min\sigma=\max\{|c_{ij}-a_{ij}|\};\\&\text{s.t.}\ \ c_{ij}\in[a_{ij}^L, a_{ij}^U],\\&\qquad \mathrm{CR}(C)\leqslant 0.1.\end{aligned}\tag{6}$$

其中: σ 表示修改后元素最大变动值, 其定义见式 (3).

注意到模型 2 可能出现多解的情况 (优化目标是使得修改的元素数量最小, 因此, 可能同时存在多个最优解, 比如只改动 2 个元素的方案可以有多个), 而模型 3 为了实现元素最大变动值最小, 很可能增加改动元素的数量, 因此, 可以考虑将模型 2 和模型 3 的目标函数进行综合, 即首先是要求调整的元素数量最小 (模型 2 的目标函数), 在都满足最小改动元素的可行解中, 选择元素最大变动值最小的解 (模型 3 的目标函数), 得到模型 4.

4) 模型 4: 将模型 3 的目标函数映射到 [0,1] 区间, 与模型 2 的目标函数 (为整数) 相加作为综合目标函数. 这样做的好处是目标函数将是一个整数加上一个小数, 最优化结果一定是首先选出最小的整数, 如果在整数相同的情况下, 再选出使得修改的元素最大变动值最小的解, 则其实质是实现了将一个双目标优化问题转化成了一个单目标优化问题. 考虑到修改的元素最大变动值取绝对值最大者, 应为正实数, 如果能够找到一个函数实现一个正实数到 [0,1] 区间上的数的映射, 即可达到此目的, 而 $2\arctan(x)/\pi$ 函数能够实现将正实数 x 映射到 [0,1] 区间, 且为单调递增函数, 因此, 设计优化模型为

$$\min\{n_c+2\arctan(\sigma)/\pi\};$$
$$\text{s.t.}\quad c_{ij}\in[a_{ij}^L,a_{ij}^U],$$
$$\mathrm{CR}(C)\leqslant 0.1. \tag{7}$$

其中: n_c,σ 含义同式 (5) 和 (6).

2.3 基于模式搜索的优化算法

采用文献 [18] 中提出的改进模式搜索方法进行优化, 并作如下设定:

1） 建立罚函数. 对于模型 1～模型 4 的约束条件, 考虑将其反映到目标函数中, 即 c_{ij} 取值超出边界 $[a_{ij}^L,a_{ij}^U]$、$\mathrm{CR}(C)$ 值超过 0.1, 则目标函数令其为无穷大.

2) 变异操作. 为防止算法过早进入局部最优, 拟对当前解进行变异操作, 这里采用单点变异, 即随机选择当前解向量的一个元素, 用其可行区间内的一个随机数代替.

2.4 实施步骤

对于一个不一致的判断矩阵 ($\mathrm{CR}(A)>0.1$), 按照以下步骤进行调整:

Step 1　生成上下边界. 方法是在判断矩阵 A 中选取 $a_{ij}\geqslant 1(i\neq j)$ 的项 (对于 $a_{ij}<1$, 可先选取其对称项 a_{ji} 生成边界, 然后取倒数), 取扰动变量为 $\delta=0.5$, 最大扰动设置为 $\delta_{\max}=1$, 则可生成上下边界为

$$a_{ij}^L=\begin{cases}a_{ij}-\delta,\ a_{ij}-\delta\geqslant 1;\\ 1,\ \text{otherwise};\end{cases}$$
$$a_{ij}^U=\begin{cases}a_{ij}+\delta,\ a_{ij}+\delta<10;\\ 10,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$a_{ij}\in[a_{ij}^L,a_{ij}^U]$, 其中 a_{ij}^L 表示下界, a_{ij}^U 表示上界. 得到决策容许区间为

$$c_{ij}\in\begin{cases}[a_{ij}^L,a_{ij}^U],\ a_{ij}\geqslant 1;\\ \left[\dfrac{1}{a_{ji}^U},\dfrac{1}{a_{ji}^L}\right],\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

Step 2　求解优化模型. 利用 2.3 节的改进模式搜索算法对优化模型 1～模型 4 进行求解. 如果能够找到最优解, 则输出对应的判断矩阵 $C_{\min}$, 进入 Step 3; 否则, $\delta=\delta+0.1$, 返回 Step 1. 显然, 只要 δ 足够大, 通过调整元素必然能够找到模型的最优解, 比如极端的情况是元素的决策容许区间达到了 [1,10] (尽管这样的改动过大, 没有实际意义), 这相当于在整个可行域内调整元素大小, 一定能够做到满足一致性要求.

Step 3　对最优解效果进行分析. 若修改后元素最大变动值 $\sigma\leqslant 1$, 则认为改动量满足要求, 认为找到了可行方案, 进入 Step 5; 若存在 $\sigma>1$, 则认为改动过大, 进入 Step 4.

Step 4　调整结果反馈给专家. 由专家决定是否接受对该元素进行此调整: 若专家认可此种调整, 则认为优化结果满足对判断矩阵的调整要求, 实现了保留专家意见条件下的判断矩阵的一致性调整, 进入 Step 5; 若专家不认可此调整, 则可针对专家意见, 为优化模型增加部分约束, 比如某一项评分值把握不准时, 可以给出取值范围, 将其作为一个新增的约束, 利用本文的优化算法进行矩阵的调整. 重复这个优化-反馈-优化过程, 直到得到满意结果为止.

Step 5　输出结果. 根据找到的可行方案, 计算调整后元素的 $\mathrm{CR}(C)$ 值, 权重 ω, 修改后元素最大变动值为 σ, 总偏离程度为 ε, 调整的元素数量为 n_c.

3 实例分析

例 1 [1-2]　设判断矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\1/3&1&1/2\\1/5&2&1\end{bmatrix},$$

计算出其随机性一致性比值 $\mathrm{CR}=0.157>0.1$, 因此, 不具有满意的一致性. 根据定义 2, $\boldsymbol{a}=\{3,5,1/2\}$, $\boldsymbol{b}=\{3,5,2\}$. 利用本文优化模型 1 进行改进, 得到 $\boldsymbol{c}=\{3,5,1.572\,3\}$, 从而改进后的判断矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}1&3&5\\1/3&1&0.636\\1/5&1.572\,3^*&1\end{bmatrix}.$$

对应的 $\mathrm{CR}(C)=0.1\leqslant 0.1$, 具有满意的一致性, 权重 $\omega=[0.659\,0,\ 0.159\,3,\ 0.181\,7]^{\mathrm{T}}$, $\sigma=0.427\,7$, $\varepsilon=0.149\,6$, $n_c=1$ 个 (改动的元素用*标出, 只标注了 $\boldsymbol{c}$ 中的元素). 由于改动的元素数量为 1, 且最大变动值为 $0.427\,7<1$, 可认为改动量满足要求, 达到了优化目标. 文献 [1-2] 中将 a_{32} 由 2 改为 1, 这意味着指标 3 比指标 2 "稍微重要" 改变为 "同等重要", 显然可能背离专家的初衷.

例 2 [3]　引用文献 [3] 的算例对几种优化模型进行比较, 文献 [3] 中将元素 a_{23} 由 9 调整为 2, 以获取最小的 CR 值, 显然, 改动范围过大, 可能违背了专家的原意.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&5/2&5\\1/2&1&9&2\\2/5&1/9&1&1/2\\1/5&1/2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix}1&2&5/2&5\\1/2&1&2^*&2\\2/5&1/2&1&1/2\\1/5&1/2&2&1\end{bmatrix}.$$

文献[3]中改进后矩阵的指标为$\mathrm{CR}(A')=0.0645<0.1$, $\omega=[0.4838, 0.2464, 0.1230, 0.1469]^{\mathrm{T}}$, $\sigma=7$, $\varepsilon=1.7527$, $\varepsilon=1$个. 尽管具有满意的一致性, 但最大变动值为$7>1$, 故认为改动量过大, 显然改变了专家的原意.

下面分别利用本文优化模型, 对该判断矩阵进行改进.

1) 利用优化模型1, 可得修改后的判断矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1.6326^* & 3.1736^* & 4.8621^* \\ 0.6125 & 1 & 8.8944^* & 2.2064^* \\ 0.3151 & 0.1124 & 1 & 0.5112 \\ 0.2057 & 0.4532 & 1.9562^* & 1 \end{bmatrix}.$$

对应的$\mathrm{CR}(A_1)=0.1\leqslant 0.1$, 具有满意的一致性. $\sigma=0.6736$, $\varepsilon=0.2070$, $n_c=6$个. 由于最大变动值$\sigma<1$, 可认为A_1满足要求, 为可行解.

2) 利用优化模型2, 可得修改后的判断矩阵解有多个, 如

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4.6421^* & 5 \\ 1/2 & 1 & 9 & 4.1751^* \\ 0.2154 & 0.1111 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 0.2395 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4.4348^* & 5 \\ 1/2 & 1 & 9 & 2 \\ 0.2255 & 0.1111 & 1 & 0.9078 \\ 1/5 & 0.5 & 1.1015^* & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{CR}(A_2)=0.0649\leqslant 0.1$, 具有满意的一致性, $\sigma=2.1751$, $\varepsilon=0.7674$, $n_c=2$个; $\mathrm{CR}(A_2')=0.0981\leqslant 0.1$, 具有满意的一致性, $\sigma=1.9348$, $\varepsilon=0.5447$, $n_c=2$个.

可见, 当以最小改动元素数量为优化目标时, 可得出该问题最少需要对两个元素进行修改, 每个解都能够达到满意的一致性. 由于$\sigma>1$, 需要专家对修改结果进行确认, 又因为需要修改的元素数量少, 便于专家对改动情况进行再次确认, 因此, 模型2得出的结果可以作为可行解. 但是观察发现, A_2和A_2'虽然同为最优解, 但A_2'的σ和ε均较小, 故A_2'要优于A_2.

3) 利用优化模型3, 可得修改后的判断矩阵为

$$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1.6326^* & 2.8816^* & 4.6397^* \\ 0.6125 & 1 & 8.6184^* & 2.3815^* \\ 0.3470 & 0.1160 & 1 & 0.6050 \\ 0.2155 & 0.4199 & 1.6529^* & 1 \end{bmatrix}.$$

对应的$\mathrm{CR}(A_3)=0.1$, 具有满意的一致性. $\sigma=0.3816$, $\varepsilon=0.2312$, $n_c=6$个. 可见, 优化模型为了降低σ, 将所有元素都进行了小幅调整, 由于每个元素的改动均不超过0.3861, A_3可以认为是比较满意的.

4) 按照优化模型4进行优化, 可得到最优解为

$$A_4=\begin{bmatrix} 1 & 1.0111^* & 3.0555^* & 5 \\ 0.989 & 1 & 9 & 2 \\ 0.3273 & 0.1111 & 1 & 0.5 \\ 1/5 & 0.5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

对应的$\mathrm{CR}(A_4)=0.0975\leqslant 0.1$, 具有满意的一致性. $\sigma=0.9889$, $\varepsilon=0.3093$, $n_c=2$个. 此时修改的元素最大变动值为$\sigma<1$, 在改动的元素数量同为2个的情况下, 实现了修改的σ的最小化. 因此, A_4可以认为是比较满意的. 实际上, A_4可以看作是优化模型2众多最优解中具有最小σ 的解, 因此, A_4优于A_2和A_2'.

综上分析, 可得到A_1, A_3, A_4这3个可行的最优解, 这3组解都实现了在保证判断矩阵满足一致性要求下, 调整后判断矩阵与原始判断矩阵的差异程度最小的目标. A_1对应的总调整量ε最小, A_3 对应的单项最大调整量σ最小, A_4对应的改动元素数量最小的同时, 单项最大调整量σ最小, 可根据需要选择. 但是, 3组解得出的权重排序却出现了差异, 对于A_1, A_3, 排序结果为$\omega_1>\omega_2>\omega_4>\omega_3$; 对于$A_4$, 排序结果为$\omega_2>\omega_1>\omega_4>\omega_3$. 考虑到原始矩阵中$a_{12}=2$, 表示指标1比指标2稍微重要, 因此, $\omega_1>\omega_2$, 故最后可选择A_1, A_3作为调整后的判断矩阵.

为检验本文算法性能, 利用Matlab实现了本文算法, 并将本文方法与两种典型方法的结果进行了比较, 如表2所示.

表 2 算例对比

判断矩阵	采用方法	修改后判断矩阵决策变量	一致性比率 CR	总调整量 ε	单项最大调整量 σ	修正元素个数 n_c
例1	文献[4]	{3, 5, 1}	0.0279	0.3727	1	1
	文献[11]	{3.2591, 4.6025, 0.5432}	0.0984	0.1677	0.3975	3
	本文模型1	{3, 5, 0.636}	0.1	0.1496	0.4277	1
例2	文献[4]	{2, 6.5, 5.8, 2, 0.5}	0.0362	1.0326	4	2
	文献[11]	{1.8229, 2.9428, 4.6618, 7.7336, 2.1423, 0.5272}	0.0998	0.3522	1.2664	6
	本文模型1	{1.6326, 3.1736, 4.8621, 8.8944, 2.2064, 0.5112}	0.1	0.207	0.6736	6
	本文模型3	{1.6326, 2.8816, 4.6397, 8.6184, 2.3815, 0.605}	0.1	0.2312	0.3816	6
	本文模型4	{1.0111, 3.0555, 5, 9, 2, 0.5}	0.0975	0.3093	0.9889	2

表 2 中, 文献 [11] 采用了 Algorithm I, $\lambda = 0.99$. 从比较结果可以看出, 文献 [4] 的修正元素个数少, 但最大调整量过大; 文献 [11] 的调整量相比本文模型整体上偏大. 因此, 本文算法能够最大程度地保留专家的原始信息, 实现判断矩阵通过一致性检验. 另外, 通过观察发现, 上述 4 个模型的优化结果对应的 CR 值均非常接近 0.1. 是否意味着允许改动量越大, 则 CR 值可以做到越小; 反之允许改动量越小, 则 CR 值将越大? 为此, 以 $\mathrm{CR}(C)$ 最小为目标函数, 规定一个允许修改元素的最大变动值 $\sigma_{\max}$, 即将 $\sigma < \sigma_{\max}$ 作为一个约束条件, 可得出如表 3 所示的优化结果.

表 3　不同 $\sigma_{\max}$ 对应的一致性指标最小值 $\mathrm{CR}(C)_{\min}$

$\sigma_{\max}$	修改后判断矩阵的等价决策向量 $\{c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}, c_{34}\}$	$\mathrm{CR}(C)_{\min}$
0.5	{1.5, 2.876 5, 4.791 2, 8.772, 2.396 5, 0.663 8}	0.097 5
0.7	{1.543 8, 3.2, 5.084 6, 8.487 6, 2.365 3, 0.763 7}	0.087 9
0.9	{1.1, 3.4, 4.888 1, 8.763 7, 2.789 9, 0.908 2}	0.062 3
1	{1.370 9, 3.453 8, 5.057 1, 8.072 8, 3, 0.998 6}	0.060 4
1.5	{1, 4, 4.507 2, 8.587 5, 2.737 4, 0.826 1}	0.0436
2	{1, 4.5, 3.445 4, 7, 4, 0.66}	0.006 1
2.5	{1, 4.679 3, 3.192 8, 6.5, 3.561 8, 0.698 2}	0.004 2

当 $\sigma_{\max} = 0.5$ 时, 可以得出最佳的 $\mathrm{CR}(C)_{\min} = 0.097\,5$, 基本达到满意的一致性要求, 而当 $\sigma_{\max} = 2$ 时, 则可以得到最佳的 $\sigma_{\max} = 0.006\,1$, 具有极好的一致性. 这说明为了得到越高的一致性, 原始判断矩阵的改动量越大. 两个目标是相互制约的, 如图 2 给出了 CR 最小值和修改元素的最大变动值 $\sigma_{\max}$ 形成的 Pareto 曲线, 可见二者是此消彼长的关系, 也就是说, 不能一味追求较高的一致性, 这样会导致对原始专家信息的调整过大. 反过来理解, 为了保证最小的改动, 获得符合一致性要求的 $\mathrm{CR}(C)_{\min}$ 值, 优化后得到 CR 通常趋近于 0.1, 即刚好达到满足一致性要求, 此时的改动量可认为是最小的. 这也解释了为何优化模型的结论都接近 $\mathrm{CR} = 0.1$.

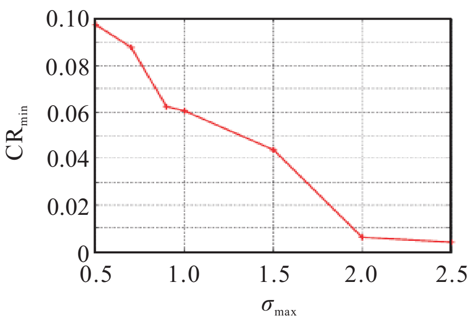

图 2　$\sigma_{\max}$ 与 $\mathrm{CR}(C)_{\min}$ 形成的 Pareto 曲线

4　结　论

本文根据 AHP 不一致判断矩阵的调整要求, 给出了决策容许区间的概念, 并分别以判断矩阵的总调整量最小、调整元素的数量最少、调整的元素最大变动值最小、在调整元素的数量最少的条件下使得调整的元素最大变动值最小为目标函数, 以元素在决策容许区间内调整, $\mathrm{CR}(C) \leqslant 0.1$ 为约束条件, 建立了 AHP 判断矩阵的优化模型. 利用改进模式搜索方法设计了优化步骤. 本文的优化方法能够最大限度地保留专家的原始判断信息, 以最小的改动实现判断矩阵的满意一致性要求. 该方法实现容易, 为进行判断矩阵的一致性调整提供了一种新的解决思路.

参考文献(References)

[1] 张惠源, 王江. AHP 中不一致判断矩阵调整方法的改进[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(7): 150-153.
(Zhang H Y, Wang J. Improved method for the consistency of judgment matrix in AHP[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(7): 150-153.)

[2] 李梅霞. AHP 中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(2): 122-125.
(Li M X. A new method for improving the consistency of the judgement matrix in AHP[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2000, 20(2): 122-125.)

[3] 郭竹梅. AHP 中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J]. 齐齐哈尔大学学报: 自然科学版, 2010, 26(6): 84-86.
(Guo Z M. A new method for improving the consistency of the judgement matrix in AHP[J]. J of Qiqihar University: Natural Science Edition, 2010, 26(6): 84-86.)

[4] 吴泽宁, 张文鸽, 管新建. AHP 中判断矩阵一致性检验和修正的统计方法[J]. 系统工程, 2002, 20(3): 67-71.
(Wu Z N, Zhang W G, Guan X J. A statistical method to check and rectify the consistency of a judgment matrix in AHP[J]. Systems Engineering, 2002, 20(3): 67-71.)

[5] 吴诗辉, 郭乃林. 层次分析法关于一致性检验的改进方法[J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(2): 1059-1060.
(Wu S H, Guo N L. A method for improving the consistency check in AHP[J]. J of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2006, 26(2): 1059-1060.)

[6] 朱建军, 刘士新, 王梦光. 一种新的求解区间数判断矩阵权重的方法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, (4): 29-34.
(Zhu J J, Liu S X, Wang M G. Novel weight approach for interval numbers comparison matrix in the analytic hierarchy process[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, (4): 29-34.)

[7] 朱建军, 刘士新, 王梦光. 基于遗传算法求解区间数 AHP 判断矩阵的权重[J]. 系统工程学报, 2004, 19(4): 344-349.
(Zhu J J, Liu S X, Wang M G. Estimation of weight vectors of interval numbers judgement matrix in AHP using

genetic algorithm[J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(4): 344-349.)

[8] 刘胜, 张玉廷, 于大泳. 小生境遗传算法修正模糊判断矩阵一致性研究[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2010, 38(7): 126-129.
(Liu S, Zhang Y T, Yu D Y. Correctinn consistency of fuzzy judgment matrix using niche genetic algorithm[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2010, 38(7): 126-129.)

[9] 严刚峰, 张广明, 赵宪生, 等. 基于遗传算法的层次分析建模法[J]. 精密制造与自动化, 2005(2): 45-48.
(Yang G F, Zhang G M, Zhao X S, et al. Modeling method on AHP based on Genetic algorithms[J]. Grinder and Grinding, 2005(2): 45-48.)

[10] 金菊良, 魏一鸣, 潘金锋. 修正AHP 中判断矩阵一致性的加速遗传算法[J]. 系统工程理论与实践. 2004, 24(1): 63-69.
(Jin J L, Wei Y M, Pan J F. Accelerating genetic algorithm for correcting judgement matrix consistency in analytic hierarchy process[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2004, 24(1): 63-69.)

[11] Xu Z S, Wei C P. A consistency improving method in the analytic hierarchy process[J]. European J of Operational Research, 1999, 116(2): 443-449.

[12] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980: 152-215.

[13] 马云东, 胡明东. 改进的AHP法及其在多目标决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 40-44.
(Ma Y D, Hu M D. Improved analysis of hierarchy process and its application to multiobjective decision[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1997, 17(6): 40-44.)

[14] 刘万里, 雷治军. 关于AHP中判断矩阵校正方法的研究[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 30-34.
(Liu W L, Lei Z J. Study on rectification method for the judgment matrix in AHP[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1997, 17(6): 30-34.)

[15] 王雪华, 秦学志, 杨德礼. AHP中判断矩阵一致性修正的模式识别法[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(11): 56-59.
(Wang X H, Qin X Z, Yang D L. The pattern recognition method for correcting the judgement matrix into one with complete uniformity in AHP[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1997, 17(11): 56-59.)

[16] 白思俊. 系统工程[M]. 第3版. 北京:电子工业出版社, 2013: 213-222.
(Bai S J. System engineering[M]. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2013: 213-222.)

[17] 叶跃祥, 糜仲春, 王宏宇. AHP判断矩阵一致性调整的前瞻算法[J]. 系统工程, 2006, 24(10): 117-121.
(Ye Y X, Mi Z C, Wang H Y. A foresight method of consistency regulation for AHP judgment matrix[J]. Systems Engineering, 2006, 24(10): 117-121.)

[18] 吴诗辉, 杨建军, 郭亚坤. 基于模式搜索的导弹目标分配方法研究[J]. 战术导弹技术, 2009, 135(3): 29-32.
(Wu S H, Yang J J, Guo Y K. Research on the method of missile target assignment based on pattern search[J]. Tactical Missile Technology, 2009, 135(3): 29-32.)

(责任编辑：孙艺红)