

具有时滞和时变系数的离散多智能体系统的一致性

马忠军^{a,b}, 甘晓亮^{a,c}, 蒋贵荣^{a,b}

(桂林电子科技大学 a. 数学与计算科学学院, b. 广西可信软件重点实验室, c. 广西高校数据分析与计算重点实验室, 广西 桂林 541004)

摘要: 研究一类具有时滞和时变系数的离散多智能体系统的一致性问题. 首先, 通过构造合适的控制协议, 并以第一个智能体的位移作为参考状态, 将原系统的一致性问题转化为误差系统中零解的渐近稳定性问题; 然后, 运用矩阵范数理论研究误差系统零解的渐近稳定性, 导出使多智能体系统实现一致的充分条件; 最后, 通过数值模拟验证了该判据的正确性和有效性.

关键词: 多智能体系统; 矩阵范数; 一致性; 渐近稳定

中图分类号: TP271

文献标志码: A

Consensus of discrete multi-agent systems with delay and time-variant coefficients

MA Zhong-jun^{a,b}, GAN Xiao-liang^{a,c}, JIANG Gui-rong^{a,b}

(a. School of Mathematics and Computing Science, b. Guangxi Key Laboratory of Trusted Software, c. Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China. Correspondent: MA Zhong-jun, E-mail: mzj1234402@163.com)

Abstract: The problem of consensus on a discrete multi-agent system with delay and time-variant coefficients is considered. Firstly, by constructing an appropriate control protocol and letting the position of the first agent be the reference state, the consensus problem of the original system is transformed into the asymptotic stability problem of the error system. Then, the asymptotic stability of the zero solution in the error system is investigated by using matrix norm theory, and some sufficient conditions for the multi-agent system to achieve consensus are obtained. Finally, numerical simulations are also given to validate the correctness and effectiveness of the proposed criteria.

Keywords: multi-agent system; matrix norm; consensus; asymptotic stability

0 引言

近十几年来,人们对多智能体系统一致性问题研究越来越多^[1-5].一致性意味着系统中所有智能体的某些动力学变量(如位置和速度等)在一些适当的控制协议下渐近趋于恒同.随着人工智能研究的发展和自动化技术的进步,多智能体系统的一致性理论不断丰富和完善. Vicsek等^[6]从统计力学的角度提出了一个离散时间模型来刻画多智能体系统,模型中智能体方向实现一致的现象激发了众多学者的研究兴趣. Desai等^[7]采用图论技术,讨论了在地形具有障碍的情况下使一组机器人保持所需队形的问题.基于Vicsek模型, Jadbabaie等^[8]阐明了系统在缺乏集中协调时最近邻规则可导致所有智能体最终朝着同一个

方向移动,并得到了一些使系统实现一致的新准则. Blondel等^[9]运用一种分布式算法,研究了具有无界互通区间的时变系数离散系统,获得了一些确保系统收敛的新结论. Ren等^[10]研究了具有时变拓扑的多智能体模型,并运用图论知识指出,具有一个生成树的有向图可以保证系统达成一致. Cao等^[11]把Vicsek模型改进为具有整数时滞的新模型,从图论的角度研究了时滞系统的一致性问题. Olfati-Saber等^[12]进一步讨论了具有切换拓扑的多智能体系统的一致性.目前,一致性算法已被广泛应用于一些工程系统^[13-22].

本文把Li等^[22]提出的具有数据包丢失的多智能体系统扩展到具有时滞和时变系数的情形,研究时滞和时变系数对系统一致性产生的影响,同时提出几个

收稿日期: 2015-09-24; 修回日期: 2015-12-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11562006); 广西高等学校优秀中青年骨干教师培养工程项目(gxqg022014025); 桂林电子科技大学研究生教育创新计划项目(YJXCS201555).

作者简介: 马忠军(1973-),男,教授,博士,从事复杂网络动力学等研究; 甘晓亮(1987-),男,硕士生,从事多智能体网络的研究.

控制协议. 与Li等^[22]的研究方法不同, 本文运用矩阵范数理论, 通过判定误差系统的系数矩阵范数和, 得到确保该多智能体系统实现一致的一些充分条件. 首先, 不失一般性, 令第1个智能体的位移为参考状态, 并设计合适的控制协议, 从而将原系统的一致性问题转化为误差系统中零解的渐近稳定性问题. 其次, 通过判定该零解的渐近稳定性, 得到使原系统实现一致的一些充分性判据. 当误差系统中系数矩阵的范数和小于或等于一个比1小的正实数 m 时, 原系统中所有智能体将实现一致. 再次, 进一步把所得结果推广到系数矩阵的范数和局部大于1的情形, 得到确保该多智能体系统实现一致的若干控制协议. 最后, 将研究结果推广到具有多重时滞的多智能体系统. 数值模拟验证了本文理论的正确性和有效性.

1 问题形成

在时不变多智能体系统的一致性问题, 人们已取得了丰硕的成果. 然而, 某些情形下具有时滞和时变系数的多智能体系统模型更具有实际意义. 本文通过扩展Li等^[22]提出的多智能体系统模型, 研究一类含有 N 个智能体的具有时滞和时变系数的离散系统. 其第 i 个智能体的运动规则为

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & \\ & c_{ii1}(k)x_i(k) + c_{ii2}(k-1)x_i(k-1) + u_i(k), \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x_i(k)$ 和 $u_i(k)$ 分别表示第 i 个节点在时刻 k 的位移和控制输入, $c_{ii1}(k)$ (或 $c_{ii2}(k)$) 是当前 (或延迟) 时刻的权重系数.

令第 i 个节点的控制项为

$$\begin{aligned} u_i(k) = & \\ & -c_{ii1}(k)x_i(k) - c_{ii2}(k-1)x_i(k-1) + \\ & \sum_{j=1}^N d_{ij2}(k-1)(x_j(k-1) - x_1(k-1)) + \\ & \sum_{j=1}^N d_{ij1}(k)(x_j(k) - x_1(k)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $d_{ij1}(k)$ (或 $d_{ij2}(k)$) 表示在 k 时刻第 i 个节点收到来自第 j 个节点的当前 (或延迟) 控制输入的权重系数.

由式 (2), 系统 (1) 可以简写为

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \\ & A_1(k)(x(k) - \eta(k)) + A_2(k-1)(x(k-1) - \eta(k-1)). \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$x(k) = [x_1(k), \dots, x_N(k)]^T;$$

$$\eta(k) = [x_1(k), \dots, x_1(k)]^T;$$

$$A_1(k) = [a_{ij1}(k)]_{N \times N};$$

$$A_2(k-1) = [a_{ij2}(k-1)]_{N \times N};$$

$$a_{ij1}(k) = \begin{cases} d_{ij1}(k) + c_{ii1}(k), & i = j; \\ d_{ij1}(k), & i \neq j; \end{cases}$$

$$a_{ij2}(k-1) = \begin{cases} d_{ij2}(k-1) + c_{ii2}(k-1), & i = j; \\ d_{ij2}(k-1), & i \neq j; \end{cases} \\ i, j = 1, 2, \dots, N.$$

为简便起见, 令第1个节点的位移为参考状态, 则第 i 个节点的状态相对于参考状态的偏差被定义为 $e_{1i}(k)$, 即

$$e_{1(i+1)}(k) = x_{i+1}(k) - x_1(k), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4)$$

在控制协议 (2) 下系统 (1) 达成一致意味着, 当 $k \rightarrow \infty$ 时所有节点的位移状态均能趋于恒同. 因此, 一致性的具体形式为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \|e_{1(i+1)}(k)\| = 0. \quad (5)$$

2 主要结论

本节运用矩阵范数理论, 研究一类含时滞和时变系数的离散多智能体系统, 得到了一些实现一致性的充分性判据.

定理 1 在控制协议 (2) 下, 如果存在正整数 p 和正实数 $m < 1$, 使得对于任意 $k \geq p$, 有

$$\|B_1(k)\| + \|B_2(k-1)\| \leq m,$$

则系统 (1) 实现一致. 其中

$$B_1(k) = [b_{ij1}(k)]_{(N-1) \times (N-1)},$$

$$b_{ij1}(k) = a_{(i+1)(j+1)1}(k) - a_{1(j+1)1}(k),$$

$$B_2(k-1) = [b_{ij2}(k-1)]_{(N-1) \times (N-1)},$$

$$b_{ij2}(k-1) = a_{(i+1)(j+1)2}(k-1) - a_{1(j+1)2}(k-1), \\ i, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

证明 通过一些简单的计算, 可得

$$\begin{aligned} e_{1(i+1)}(k+1) = & \\ & x_{i+1}(k+1) - x_1(k+1) = \\ & \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij1}(k)e_{1(j+1)}(k) + \\ & \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij2}(k-1)e_{1(j+1)}(k-1). \end{aligned} \quad (6)$$

令 $e(k) = [e_{12}(k), \dots, e_{1N}(k)]^T$, 则误差系统 (6) 可表示为

$$e(k+1) = B_1(k)e(k) + B_2(k-1)e(k-1). \quad (7)$$

因 $\{\|B_1(k)\| + \|B_2(k-1)\| : k \leq p\}$ 只含有有限项,

故其有界, 从而 $\{\|e(1)\|, \dots, \|e(p-1)\|, \|e(p)\|\}$ 也有界. 设 $L = \max\{\|e(1)\|, \dots, \|e(p-1)\|, \|e(p)\|\}$ 为某个常数, 则

$$\begin{aligned} & \|e(p+1)\| \leq \\ & \|B_1(p)\| \|e(p)\| + \|B_2(p-1)\| \|e(p-1)\| \leq \\ & (\|B_1(p)\| + \|B_2(p-1)\|)L \leq mL, \\ & \|e(p+2)\| \leq \\ & \|B_1(p+1)\| \|e(p+1)\| + \|B_2(p)\| \|e(p)\| \leq \\ & \|B_1(p+1)\| mL + \|B_2(p)\| L \leq \\ & (\|B_1(p+1)\| + \|B_2(p)\|)L \leq mL, \\ & \|e(p+3)\| \leq \\ & \|B_1(p+2)\| \|e(p+2)\| + \\ & \|B_2(p+1)\| \|e(p+1)\| \leq \\ & (\|B_1(p+2)\| + \|B_2(p+1)\|)mL \leq m^2L, \\ & \|e(p+4)\| \leq \\ & \|B_1(p+3)\| \|e(p+3)\| + \\ & \|B_2(p+2)\| \|e(p+2)\| \leq \\ & \|B_1(p+3)\| m^2L + \|B_2(p+2)\| mL \leq \\ & (\|B_1(p+3)\| + \|B_2(p+2)\|)mL \leq m^2L. \end{aligned}$$

类似地, 对于任意的正整数 n 都有 $\|e(p+2n-1)\| \leq m^n L$ 和 $\|e(p+2n)\| \leq m^n L$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e(p+2n-1)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m^n L = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e(p+2n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m^n L = 0. \quad (9)$$

由式 (8) 和 (9), 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0,$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \|e_{1(i+1)}(k)\| = 0.$$

综上所述, 误差系统 (7) 的零解渐近稳定, 从而系统 (1) 在控制协议 (2) 下能实现一致. \square

推论 1 在控制协议 (2) 下, 若存在一个正整数 p , 使得误差系统 (7) 的系数矩阵满足

$$\sup_{k \geq p} \max\{\|B_1(k)\|, \|B_2(k-1)\|\} < \frac{1}{2},$$

则系统 (1) 能实现一致.

考虑 $t-1$ ($t > 2$) 重时滞系统, 其动力学形式为

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & \\ & \sum_{s=1}^t c_{iis}(k+1-s)x_i(k+1-s) + u_i(k), \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 t 是一个有限的正整数. 通过类似的分析可以得到相应的结论.

令其控制项为

$$\begin{aligned} u_i(k) = & - \sum_{s=1}^t c_{iis}(k+1-s)x_1(k+1-s) - \\ & \sum_{s=1}^t \sum_{j=1}^N d_{ijs}(k+1-s)(x_j(k+1-s) - \\ & x_1(k+1-s)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} e_{1(i+1)}(k+1) = & x_{i+1}(k+1) - x_1(k+1) = \\ & \sum_{s=1}^t \sum_{j=1}^{N-1} a_{ijs}(k+1-s)e_{1(j+1)}(k+1-s), \\ & i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (12)$$

于是

$$e(k+1) = \sum_{s=1}^t B_s(k+1-s)e(k+1-s). \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} e(k) = & (e_{12}(k), \dots, e_{1N}(k))^T, \\ B_s(k) = & [b_{ijs}(k)]_{(N-1) \times (N-1)}, \\ b_{ijs}(k) = & a_{(i+1)(j+1)s}(k-1) - a_{1(j+1)s}(k-1), \\ & i, j = 1, 2, \dots, N-1, s = 1, 2, \dots, t. \end{aligned}$$

定理 2 在控制协议 (11) 下, 如果存在一个正整数 p 和正实数 $m < 1$, 使得对于任意 $k \geq p$, 有

$$\sum_{s=1}^t \|B_s(k+1-s)\| \leq m,$$

则系统 (10) 能实现一致.

定理 2 的证明过程与定理 1 的类似, 此略.

推论 2 在控制协议 (11) 下, 如果存在一个正整数 p , 使得误差系统 (13) 的系数矩阵满足: 对于任意 $k \geq p$, 有

$$\sup_{k \geq p} \max_s \|B_s(k+1-s)\| < \frac{1}{t}, \quad s \in \{1, 2, \dots, t\},$$

则系统 (10) 能实现一致.

以上着重研究了误差系统中系数矩阵范数和均小于 1 的情形. 然而, 当其系数矩阵范数和局部大于 1 时, 上述判定准则不再适用. 因此, 考虑这些因素, 下面给出若干使系统 (1) 和 (10) 实现一致的更一般性的充分条件.

定理 3 设 $\{h_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是自然数列的一个子列, 且存在常数 $K > 2$ 使得 $2 \leq h_{2n+1} - h_{2n} \leq K$. 令误差系统 (7) 的系数矩阵的范数和为 $\alpha(k) \triangleq \|B_1(k)\| + \|B_2(k-1)\|$, 且设其有界. 当 $k \in \{h_{2n-1} + 1, \dots, h_{2n}\}$ 时 $\alpha(k) \geq 1$, 否则 $\alpha(k) < 1$. 若存在 $m \in (0, 1)$, 使得 $\alpha(h_{2n-1}+1) \cdots \alpha(h_{2n}) \max\{\alpha(h_{2n}+1), \alpha(h_{2n}+2)\} \times \max\{\alpha(h_{2n}+3), \alpha(h_{2n}+4)\} \cdots \times$

$\max\{\alpha(h_{2n+1}-2), \alpha(h_{2n+1}-1)\}\alpha(h_{2n+1}) \leq m$
 (若 $h_{2n+1} - h_{2n}$ 是奇数), 或
 $\alpha(h_{2n-1}+1) \cdots \alpha(h_{2n}) \max\{\alpha(h_{2n}+1), \alpha(h_{2n}+2)\} \times$
 $\max\{\alpha(h_{2n}+3), \alpha(h_{2n}+4)\} \cdots \times$
 $\max\{\alpha(h_{2n+1}-3), \alpha(h_{2n+1}-2)\}\alpha(h_{2n+1}) \leq m$
 (若 $h_{2n+1} - h_{2n}$ 是偶数) 成立, 则系统 (1) 在控制协议
 (2) 下能实现一致.

证明 因去掉有限项不改变数列的收敛性, 故不失一般性, 可令 $h_1 = 1$. 令 $L_1 = \max\{\|e(1)\|, \|e(2)\|\}$.
 因 $k \in \{h_1 + 1, \dots, h_2\}$ 时 $\alpha(k) \geq 1$, 则由式 (7) 可得

$$\begin{aligned}
 \|e(3)\| &\leq (\|B_1(2)\| + \|B_2(1)\|)L_1 \leq \alpha(2)L_1, \\
 \|e(4)\| &\leq \|B_1(3)\|\|e(3)\| + \|B_2(2)\|\|e(2)\| \leq \\
 &\|B_1(3)\|\alpha(2)L_1 + \|B_2(2)\|L_1 \leq \\
 &\|B_1(3)\|\alpha(2)L_1 + \|B_2(2)\|\alpha(2)L_1 = \\
 &\alpha(3)\alpha(2)L_1, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

重复上述过程 (不超过 K 次), 可得

$$\begin{aligned}
 \|e(h_2+1)\| &\leq \alpha(2) \cdots \alpha(h_2)L_1, \\
 \|e(h_2+2)\| &\leq \\
 \|B_1(h_2+1)\|\|e(h_2+1)\| + \|B_2(h_2)\|\|e(h_2)\| &\leq \\
 \|B_1(h_2+1)\|\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)L_1 + \\
 \|B_2(h_2)\|\alpha(2) \cdots \alpha(h_2-1)L_1 &\leq \\
 (\|B_1(h_2+1)\| + \|B_2(h_2)\|)\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)L_1 = \\
 \alpha(2) \cdots \alpha(h_2)\alpha(h_2+1)L_1.
 \end{aligned}$$

因 $k \in \{h_2 + 1, \dots, h_3\}$ 时 $\alpha(k) < 1$, 故

$$\begin{aligned}
 \|e(h_2+3)\| &\leq \\
 \|B_1(h_2+2)\|\|e(h_2+2)\| + \\
 \|B_2(h_2+1)\|\|e(h_2+1)\| &\leq \\
 \|B_1(h_2+2)\|\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)\alpha(h_2+1)L_1 + \\
 \|B_2(h_2+1)\|\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)L_1 &\leq \\
 (\|B_1(h_2+2)\| + \|B_2(h_2+1)\|)\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)L_1 = \\
 \alpha(2) \cdots \alpha(h_2)\alpha(h_2+2)L_1, \\
 \|e(h_2+4)\| &\leq \\
 \|B_1(h_2+3)\|\|e(h_2+3)\| + \\
 \|B_2(h_2+2)\|\|e(h_2+2)\| &\leq \\
 \|B_1(h_2+3)\|\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)\alpha(h_2+2)L_1 + \\
 \|B_2(h_2+2)\|\alpha(2) \cdots \alpha(h_2)\alpha(h_2+1)L_1 &\leq \\
 (\|B_1(h_2+3)\| + \|B_2(h_2+2)\|)\alpha(2) \cdots \alpha(h_2) \times \\
 \max\{\alpha(h_2+1), \alpha(h_2+2)\}L_1 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(2) \cdots \alpha(h_2) \max\{\alpha(h_2+1), \alpha(h_2+2)\}\alpha(h_2+3)L_1, \\
 \vdots
 \end{aligned}$$

重复上述过程 (不超过 K 次), 可知: 若 $h_3 - h_2$ 是奇数, 则

$$\begin{aligned}
 \|e(h_3+1)\| &\leq \\
 \|B_1(h_3)\|\|e(h_3)\| + \|B_2(h_3-1)\|\|e(h_3-1)\| &\leq \\
 \alpha(2) \cdots \alpha(h_2) \max\{\alpha(h_2+1), \alpha(h_2+2)\} \cdots \\
 \max\{\alpha(h_3-2), \alpha(h_3-1)\}\alpha(h_3)L_1 &\leq mL_1;
 \end{aligned}$$

若 $h_3 - h_2$ 是偶数, 则

$$\begin{aligned}
 \|e(h_3+1)\| &\leq \\
 \alpha(2) \cdots \alpha(h_2) \max\{\alpha(h_2+1), \alpha(h_2+2)\} \cdots \\
 \max\{\alpha(h_3-3), \alpha(h_3-2)\}\alpha(h_3)L_1 &\leq mL_1.
 \end{aligned}$$

从而, 有

$$\|e(h_3+1)\| \leq mL_1.$$

以此类推, 有

$$\|e(h_{2n+1})\| \leq m^n L_1.$$

进一步, 由于 $\{\alpha(k)\}$ 有界, 存在某个正常数 M_1 , 对于任意 $k \in \{h_{2n-1} + 1, \dots, h_{2n+1}\}$, 有

$$\|e(k)\| \leq M_1 m^{n-1} L_1.$$

由 $0 < m < 1$, 得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$. 因此, 误差系统 (7) 的零解渐近稳定, 从而系统 (1) 在控制协议 (2) 下能实现一致. \square

由上述定理, 可得下面推论.

推论 3 设定理 3 的前提条件成立. 令 $\beta_n = \max\{\alpha(h_{n-1}+1), \alpha(h_{n-1}+2), \dots, \alpha(h_n)\}$, $n = 2, 3, \dots$. 若存在 $m \in (0, 1)$, 使得

$$\sup_n \{\beta_{2n}^{h_{2n}-h_{2n-1}} \beta_{2n+1}^{[(1+h_{2n+1}-h_{2n})/2]}\} \leq m$$

成立, 则系统 (1) 能实现一致. 这里, $[*]$ 表示不大于数 $*$ 的最大整数.

类似地, 对于 $t-1$ 重时滞系统 (10), 可以导出相应的结果.

定理 4 设 $\{h_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是自然数列的一个子列, 且存在常数 $K > 2$ 使得 $2 \leq h_{n+1} - h_n \leq K$. 在控制协议 (11) 下, 令误差系统 (13) 的系数矩阵的范数和为 $\alpha(k) \triangleq \sum_{s=1}^t \|B_s(k+1-s)\|$, 且设其有界. 当 $k \in \{h_{2n-1} + 1, \dots, h_{2n}\}$ 时 $\alpha(k) \geq 1$, 否则 $\alpha(k) < 1$. 令 $\beta_n = \max\{\alpha(h_{n-1}+1), \alpha(h_{n-1}+2), \dots, \alpha(h_n)\}$, $n = 2, 3, \dots$. 若存在 $0 < m < 1$, 使得

$$\sup_n \{\beta_{2n}^{h_{2n}-h_{2n-1}} \beta_{2n+1}^{[(t-1+h_{2n+1}-h_{2n})/t]}\} \leq m$$

成立, 则系统 (10) 能实现一致. 这里, $[*]$ 表示不大于数 $*$ 的最大整数.

定理 4 的证明过程与定理 3 的类似, 此略.

3 数值模拟

下面通过数值例子验证本文得到的理论结果. 由于误差系统的系数矩阵范数和严格小于 1 的理论结果比较直观, 这里仅给出误差系统的系数矩阵范数和局部大于 1 的数值模拟.

例 1 (矩阵范数和局部大于 1) 考虑含有 4 个节点的系统 (1), 其中式 (3) 中的系数矩阵为

$$A_1(4n+2) = \begin{bmatrix} 3.8 & 1.3 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 2.3 & 1.8 & 1.2 & 0.1 \\ 5.2 & 1.9 & 0.3 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$A_1(4n+3) = \begin{bmatrix} 3.5 & 0.7 & 1.9 & 0.8 \\ 3.1 & 1.1 & 1.6 & 0.9 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 4.2 & 0.8 & 1.9 & 1.1 \end{bmatrix},$$

$$A_1(4n+4) = A_1(4n+5) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 24.8 & 13.0 & 5.0 & 21.0 \\ 14.2 & 13.3 & 4.5 & 21.2 \\ 7.7 & 13.2 & 5.3 & 20.7 \\ 39.6 & 12.5 & 5.2 & 21.5 \end{bmatrix},$$

$$A_2(4n+1) = \begin{bmatrix} 4.2 & 2.3 & 3.7 & 2.1 \\ 3.8 & 2.6 & 3.8 & 2.6 \\ 2.9 & 2.1 & 4.0 & 2.2 \\ 5.1 & 2.4 & 3.9 & 2.1 \end{bmatrix},$$

$$A_2(4n+2) = \begin{bmatrix} 2.1 & 3.1 & 1.8 & 4.3 \\ 3.5 & 3.3 & 2.8 & 5.0 \\ 1.7 & 2.2 & 2.2 & 4.1 \\ 2.8 & 3.7 & 1.4 & 5.2 \end{bmatrix},$$

$$A_2(4n+3) = A_2(4n+4) = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 11.0 & 13.0 & 7.0 & 23.0 \\ 35.0 & 13.5 & 7.4 & 23.3 \\ 6.0 & 13.3 & 6.7 & 22.8 \\ 27.0 & 13.2 & 7.3 & 23.5 \end{bmatrix}.$$

从而, 误差系统 (7) 的系数矩阵为

$$B_1(4n+2) = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.7 & -0.4 \\ 0.6 & -0.2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1(4n+3) = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ -0.7 & -0.9 & -0.8 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1(4n+4) = B_1(4n+5) =$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & -0.3 \\ -0.5 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_2(4n+1) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.5 \\ -0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2(4n+2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 & 0.7 \\ -0.9 & 0.4 & -0.2 \\ 0.6 & -0.4 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$B_2(4n+3) = B_2(4n+4) = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 & -0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

于是, 通过简单计算可得

$$\alpha(k) = \|B_1(k)\| + \|B_2(k-1)\| = \begin{cases} 2, & k = 4n+2; \\ 3, & k = 4n+3; \\ \frac{1}{12}, & k = 4n, 4n+1. \end{cases}$$

故 m 可以取为 0.75, 推论 3 的条件满足.

设初始条件 $x(1) = [5.0 \ 7.0 \ 2.0 \ 9.0]^T$ 和 $x(2) = [4.0 \ 1.0 \ 9.0 \ 7.0]^T$, 则得到在系统 (1) 中随着时间的推移各智能体的运动状态变化规律, 如图 1 所示.

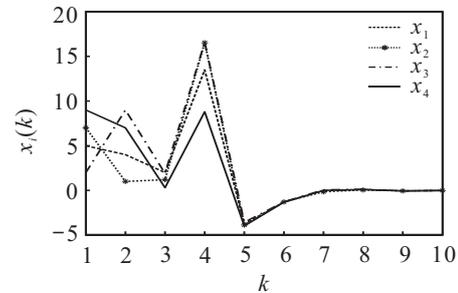


图 1 系统 (1) 中各智能体 $x_i(k)$ 的轨迹

同时, 也得到了误差系统 (7) 中各智能体状态关于参考智能体状态的误差轨迹, 如图 2 所示. 综合图 1 和图 2 可知, 系统 (1) 迅速达成了一致. 实验结果有效验证了本文理论的正确性.

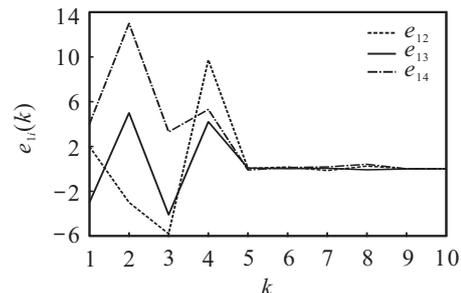


图 2 误差系统 (7) 中 e_{1i} 的轨迹

4 结 论

本文主要讨论了具有时滞和时变系数的离散多智能体系统的一致行为. 运用矩阵范数理论, 研究了该系统达成一致的充分条件, 确定了误差系统中时变系数矩阵之间的约束关系, 获得了一些判定准则. 数值模拟验证了本文理论结果的正确性和有效性. 在多智能体系统的设计中, 这些一致性判定定理或许能够提供一些可行的准则.

参考文献(References)

- [1] Yin G, Wang L, Sun Y, et al. Asymptotic optimality for consensus-type stochastic approximation algorithms using iterate averaging[J]. *Control Theory and Technology*, 2013, 11(1): 1-9.
- [2] Feng Z, Hu G. Passivity-based consensus for linear multi-agent systems under switching topologies[J]. *Control Theory and Technology*, 2014, 12(3): 304-316.
- [3] Zhao H, Park J. Group consensus of discrete-time multi-agent systems with fixed and stochastic switching topologies[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(4): 1297-1307.
- [4] Qin J, Zheng W, Gao H. Consensus of multiple second-order vehicles with a time-varying reference signal under directed topology[J]. *Automatica*, 2011, 47(9): 1983-1991.
- [5] Chen K, Wang J, Zhang Y, et al. Second-order consensus of nonlinear multi-agent systems with restricted switching topology and time delay[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(2): 881-887.
- [6] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [7] Desai J, Ostrowski J, Kumar V. Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 2001, 17(6): 905-908.
- [8] Jadbabaie A, Lin J, Morse S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988-1001.
- [9] Blondel V, Hendrickx J, Olshevsky, et al. Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking[C]. *Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville: IEEE, 2005: 2996-3000.*
- [10] Ren W, Beard R. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [11] Cao M, Morse A, Anderson B. Reaching an agreement using delayed information[C]. *Proc of the 45th IEEE Conf on Decision & Control. San Diego: IEEE, 2006: 3375-3380.*
- [12] Olfati-Saber R, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [13] Chen Y, Lv J, Han F, et al. On the cluster consensus of discrete-time multi-agent systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(7): 517-523.
- [14] Jadbabaie A, Lin J, Stephen Morse A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988-1001.
- [15] Jiang F, Wang L, Xie G. Consensus of high-order dynamic multi-agent systems with switching topology and time-varying delays[J]. *Control Theory and Technology*, 2010, 8(1): 52-60.
- [16] Yang H, Wang F, Zhang Z, et al. Consensus of multiagent systems based on disturbance observer[J]. *Control Theory and Technology*, 2010, 8(2): 145-150.
- [17] Zhang S, Duan G. Consensus seeking in multiagent cooperative control systems with bounded control input[J]. *Control Theory and Technology*, 2011, 9(2): 210-214.
- [18] Guo L, Nian X, Pan H. Leader-following consensus of multi-agent systems with switching topologies and time-delays[J]. *Control Theory and Technology*, 2013, 11(2): 306-310.
- [19] Kuang J, Zhu J. On consensus protocols for high-order multiagent systems[J]. *Control Theory and Technology*, 2010, 8(4): 406-412.
- [20] 俞辉, 蹇继贵, 王永骥. 多智能体时滞网络的加权平均一致性[J]. *控制与决策*, 2007, 22(5): 558-565.
(Yu H, Jian J G, Wang Y J. Weighted average-consensus for networks of multi-agent with time-delays[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(5): 558-565.)
- [21] Lin P, Jia Y. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies[J]. *Automatica*, 2009, 45(9): 2154-2158.
- [22] Li Q, Wang Y, Xiao J, et al. Event triggered control for multi-agent systems with packet dropout[C]. *The 11th IEEE Int Conf on Control & Automation. Taichung: IEEE, 2014: 1180-1185.*

(责任编辑: 李君玲)