

基于ESO的一类线性时变系统自学习滑模控制方法

曾喆昭, 吴亮东, 陈韦名

(长沙理工大学 电气与信息工程学院, 长沙 410076)

摘要: 针对一类线性时变系统的控制问题, 提出一种基于扩张状态观测器的自学习滑模控制方法. 首先设计两种非线性光滑函数; 然后将两种光滑函数分别应用于扩张状态观测器和滑模趋近律的设计. 为了进一步提高系统的自适应控制能力, 使用最速下降法对滑模控制器的增益参数进行自学习镇定. 仿真结果表明, 所提出的控制方法不仅响应速度快、控制精度高, 而且能够有效解决现有理论方法难以解决的问题, 是一种有效的不依赖于被控对象模型的LTV系统控制方法.

关键词: 线性时变系统; 滑模控制; 扩张状态观测器; 非线性光滑函数

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Self-learning sliding mode control method of a class of linear time-varying systems based on ESO

ZENG Zhe-zhao, WU Liang-dong, CHEN Wei-ming

(College of Electrical & Information Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410076, China. Correspondent: ZENG Zhe-zhao, E-mail: 508984293@qq.com)

Abstract: A self-learning sliding mode control(SLSMC) method is proposed for a class of linear time-varying(LTV) systems based on extended state observer(ESO). Firstly, two kinds of nonlinear smooth functions(NSF) are designed, and then two smooth functions are applied to the design of the extended state observer and the sliding mode reaching law. In order to further improve the adaptive control ability of linear time-varying systems, the steepest descent method is used to update gain parameters of the sliding mode controller through the self-learning algorithm. Simulation results show that the proposed control method not only has fast response and high control precision, but also can effectively solve the problem that the existing theoretical methods are difficult to solve, hence it is an effective control method independent of the model of the controlled LTV systems.

Keywords: linear time-varying systems; sliding mode control; extended state observer; nonlinear smooth function

0 引言

与线性时不变系统(LTI)的分析与控制相比, 线性时变系统(LTV)的分析与控制问题要复杂得多. 近年来, 国内外学者已取得了许多有关LTV系统的研究成果^[1-17]. 然而, 目前还没有一种统一的方法用于解决LTV系统的控制问题. LTV系统的可观性、可控性以及稳定性是LTV系统控制方法中的基础理论问题, 文献[2-3,5-9]分别进行了相应的理论研究, 得出了非完全可观、非完全可控以及稳定性条件. 此外, 文献[10-12]分别将一些非线性系统的控制方法应用于LTV系统的控制中, 并获得了较好的控制结果.

在现有的研究成果中, 较少涉及有关基于ESO的LTV输出反馈控制方法. 文献[17]得到的标准型与非线性系统高增益观测器^[18-19]中的研究对象相似, 利用高增益观测器思想分别设计了状态反馈控制器和状态观测器. 然而, 文献[17]根据文献[18-19]设计的观测器完全依赖于LTV系统模型, 不仅需要满足3个假设条件, 而且计算量较大, 特别是当系统模型参数不确定时, 该方法难以取得预期的控制效果.

针对现有控制方法存在的局限性, 本文提出一种通用的LTV系统控制方法. 本文方法在满足系数矩阵中各元素及其一阶导数是有界的假设条件下, 不依赖

收稿日期: 2015-10-14; **修回日期:** 2016-01-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61040049); 电子科学与技术湖南省重点学科和智能电网运行与控制湖南省重点实验室项目.

作者简介: 曾喆昭(1963-), 男, 教授, 博士, 从事智能检测与智能控制等研究; 吴亮东(1993-), 男, 硕士生, 从事自学习控制的研究.

于 LTV 系统的具体模型, 只需要观测部分状态即可实现 LTV 系统的有效控制, 特别是在不确定 LTV 系统的控制领域具有重要的理论意义和应用价值.

1 LTV 系统描述

考虑下述线性时变系统^[17]:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)u(t), \\ y(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 是 LTV 系统的状态变量, $u(t) \in \boldsymbol{R}$, $y(t) \in \boldsymbol{R}$ 分别为 LTV 系统的输入和输出, $\boldsymbol{A}(t)$ 、 $\boldsymbol{B}(t)$ 、 $\boldsymbol{C}(t)$ 分别为相应维数的时变系数矩阵.

本文对系统 (1) 作如下假设:

假设 1 系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 、 $\boldsymbol{B}(t)$ 、 $\boldsymbol{C}(t)$ 中各元素及其一阶导数都是有界的.

为了便于分析, 以二阶 LTV 系统为例, 分别设

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T, \quad \boldsymbol{C}(t) = [1, 0],$$

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(t) = [0, 1]^T,$$

则由式 (1) 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2)$$

设

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2, \end{cases} \quad (3)$$

则有

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3 + u, \\ y = y_1 = x_1. \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} y_3(t) &= (\dot{a}_{11} + a_{12}a_{21})x_1 + a_{11}y_2 + \\ &(\dot{a}_{12} + a_{12}a_{22})x_2 + (a_{12} - 1)u. \end{aligned} \quad (5)$$

如果将 $y_3(t)$ 作为内外扰动的总和, 并当作扩张状态, 显然, 根据假设 1, y_3 和 \dot{y}_3 都是有界的, 并记 $\dot{y}_3 = w(t)$, 则系统 (4) 可以扩张为三阶线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3 + u, \\ \dot{y}_3 = w, \\ y = y_1 = x_1. \end{cases} \quad (6)$$

由系统 (6) 可知, 可以设计一个扩张状态观测器 (ESO) 对 y_1 、 y_2 和 y_3 进行观测.

为了有效避免现有扩张状态观测器和滑模控制中普遍使用非线性组合幂次函数引起固有高频抖振的局限性, 下面详细研究两种非线性光滑函数以及基于非线性光滑函数的扩张状态观测器与滑模控制器的设计方法.

2 非线性光滑函数

由文献 [20] 可知, 非线性组合幂次函数为

$$\text{fal}(e, \alpha, \delta) = \begin{cases} |e|^\alpha \text{sign}(e), & |e| > \delta; \\ e/\delta^{1-\alpha}, & |e| \leq \delta. \end{cases} \quad (7)$$

由式 (7) 可知, 非线性组合幂次函数 fal 仍然与符号函数有关, 而且是非光滑函数. 如果将其应用于扩张状态观测器和滑模控制器的设计中, 则难以避免高频抖振现象. 为此, 本文提出两种非线性光滑函数, 分别介绍如下:

1) 类 Sigmoid 函数. 类 Sigmoid 函数定义为

$$f(x, \delta) = \frac{1 - \exp(-x/\delta)}{1 + \exp(-x/\delta)}. \quad (8)$$

2) 免疫函数. 免疫函数定义为

$$g(x, \delta) = \frac{x}{\delta^2} \exp(-x^2/2\delta^2). \quad (9)$$

类 Sigmoid 函数和免疫函数的曲线如图 1 所示.

由图 1 可知: 当 $|x| \geq 6\delta$ 时, 类 Sigmoid 函数值分别接近于 1 和 -1; 当 $|x| \geq 4\delta$ 时, 免疫函数值接近于 0, 而且 $x = \pm \delta$ 时分别取最大、最小值. 显然, 免疫函数对大误差具有典型的免疫功能, 而且突出了“小误差大增益、大误差小增益”的显著工程特性. 若将类 Sigmoid 函数和免疫函数合理使用, 则有利于改善扩张状态观测器的观测性能以及滑模控制器的控制性能.

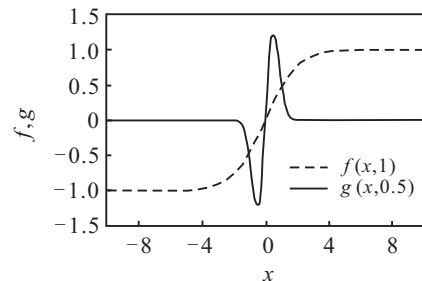


图 1 两个非线性光滑函数曲线

3 扩张状态观测器与滑模控制器设计

3.1 扩张状态观测器 (ESO) 设计

针对扩张的三阶 LTV 系统 (6), 为了有效避免高频抖振现象, 使用类 Sigmoid 函数 $f(x, \delta)$ 替代非线性组合幂次函数 fal(e, α, δ), 根据 ESO 的设计思想^[20], 设计如下的三阶非线性扩张状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = z_1 - y, \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}f(e_1, \delta_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}f(e_1, \delta_2) + u, \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}f(e_1, \delta_3). \end{cases} \quad (10)$$

其中: $\beta_{01} = 1/h$, $\beta_{02} = 6/h$, $\beta_{03} = 30/h$, 且 h 为采样周期; $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$. 只要合理设置宽度因子 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 , 便有 $z_1 \rightarrow y_1$ 、 $z_2 \rightarrow y_2$ 、 $z_3 \rightarrow y_3$.

3.2 滑模控制器 (SMC) 设计

设参考轨迹为 $r(t)$, 跟踪误差为 $e = r - y$, 则有

$$\dot{e} = \dot{r} - \dot{y} = \dot{r} - \dot{y}_1 = \dot{r} - y_2, \quad (11)$$

$$\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{y}_2 = \ddot{r} - y_3 - u. \quad (12)$$

设滑模函数

$$s = c_0 e + \dot{e}, \quad (13)$$

则有

$$\dot{s} = c_0 \dot{e} + \ddot{e} = c_0(\dot{r} - y_2) + \ddot{r} - y_3 - u. \quad (14)$$

考虑到 $z_2 \rightarrow y_2, z_3 \rightarrow y_3$, 式(14)可改写为

$$\dot{s} = c_0 \dot{e} + \ddot{e} = c_0(\dot{r} - z_2) + \ddot{r} - z_3 - u. \quad (15)$$

设滑模趋近律为 $\dot{s} = -c_1 g(s, \delta_4)$, 结合式(15), 可得滑模控制律为

$$u = c_0(\dot{r} - z_2) + c_1 g(s, \delta_4) + \ddot{r} - z_3. \quad (16)$$

其中: $c_0 > 0, c_1 > 0, \delta_4 > 0$.

3.3 滑模控制器稳定性分析

设 Lyapunov 函数为

$$V(s) = 0.5s^2, \quad (17)$$

则有

$$\dot{V} = s\dot{s} = s[-c_1 g(s, \delta_4)] = -c_1 s g(s, \delta_4). \quad (18)$$

因为 $c_1 > 0$, 由式(9)可知

$$s g(s, \delta_4) = \frac{s^2}{\delta_4^2} \exp(-s^2/2\delta_4^2) \geq 0,$$

因此有 $\dot{V} = s\dot{s} \leq 0$. 显然, 只要参数 $c_1 > 0$, 则 Lyapunov 函数 $V(s)$ 为正定, $\dot{V}(s)$ 为负定, 满足 Lyapunov 稳定性定理, 因此, 滑模控制系统是大范围渐近稳定的.

3.4 滑模控制器增益参数自学习方法

为了进一步提高滑模控制器的自适应控制能力, 本文对滑模控制律(16)的两个增益参数进行自学习更新, 具体方法如下:

$$\Delta c_0 = -\eta \frac{\partial V}{\partial c_0} = -\eta \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial c_0} = -\eta s e, \quad (19)$$

$$\Delta c_1 = -\eta \frac{\partial V}{\partial c_1} = -\eta \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial c_1}. \quad (20)$$

根据式(17)、(13)和(16), 分别有

$$\frac{\partial V}{\partial s} = s, \quad \frac{\partial s}{\partial e} = c_0, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial c_1} = g(s, \delta_4),$$

代入式(20), 可得

$$\Delta c_1 = +\eta s c_0 g(s, \delta_4) \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (21)$$

系统(6)是一个三阶的线性时变系统, 其系统的解析表达式难以获得, 因此偏微分 $\partial y / \partial u$ 的计算存在困难. 由于 $\partial y / \partial u$ 只是控制增益参数更新公式的一个相乘因子, 其符号决定收敛方向, 其值只影响收敛速度, 用符号函数近似代替 $\partial y / \partial u$, 既不影响收敛方向, 又可简化计算方法. 具体方法如下:

当 $u(k-1) \neq u(k-2)$ 时

$$y_u = \frac{\partial y}{\partial u} = \text{sign} \left[\frac{y(k) - y(k-1)}{u(k-1) - u(k-2)} \right]; \quad (22a)$$

当 $u(k-1) = u(k-2)$ 时

$$y_u = \frac{\partial y}{\partial u} = \text{sign}[y(k) - y(k-1)]. \quad (22b)$$

经过式(22)的简化后, 滑模控制器的增益参数更新算法如下:

$$\begin{cases} c_0 = c_0 - \eta s e, \\ c_1 = c_1 + \eta s c_0 g(s, \delta_4) y_u. \end{cases} \quad (23)$$

其中: η 为学习率, 且 $0 < \eta < 1$.

4 仿真实例

为了验证本文算法的有效性, 以文献[17]给出的线性时变对象为例进行仿真实验. 仿真过程中, 设采样周期为 h , 则 ESO 的增益参数分别为 $\beta_{01} = 1/h, \beta_{02} = 6/h, \beta_{03} = 30/h$; 设 ESO 的宽度因子分别为 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 10, \delta_3 = 1$; 滑模控制律(16)的初始增益 $c_0 = 10, c_1 = 1$; 学习率 $\eta = 0.02$. 下列两个仿真实例都采用与上述相同的参数设置方法, 其余参数, 如采样周期、初始状态和免疫因子则在下列仿真实例中分别单独列出.

实例 1 考虑下述二阶线性时变系统^[17]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1.5 \cos 2t & 1 - 1.5 \cos t \sin t \\ -1 - 1.5 \cos t \sin t & -1 + 1.5 \sin^2 t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = [0, 1]^T, \quad \mathbf{C}(t) = [1, 0].$$

显然, 式(24)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$a_{11} = -1 + 1.5 \cos 2t, \quad a_{12} = 1 - 1.5 \cos t \sin t,$$

$$a_{21} = -1 - 1.5 \cos t \sin t, \quad a_{22} = -1 + 1.5 \sin^2 t.$$

由文献[17]的分析可知, 当 $u = 0$ 时, 该系统是不稳定的. 本文使用式(16)所示的基于 ESO 的自学习滑模控制器, 使得闭环系统(25)渐近稳定.

仿真实验中, 设采样周期为 $h = 0.01$ s, 免疫因子 $\delta_4 = 0.25$; 初始状态 $x_1(0) = 5, x_2(0) = -5$; 给定参考轨迹 $r = 0$. 仿真结果如图 2 所示, 基于 ESO 的滑模控制器增益参数实时更新结果如图 3 所示. 由图 2 可以看出, 被控系统两个状态变量在 10 s 之内就能收敛到不稳定零点, 而文献[17]则需要至少 15 s 才能稳定. 显然, 本文控制方法比文献[17]具有更快的响应速度. 此外, 还可以看出, 在整个控制过程中, 控制信号不存在高频抖振现象, 有效解决了现有滑模控制中普遍存在高频抖振现象的难题.

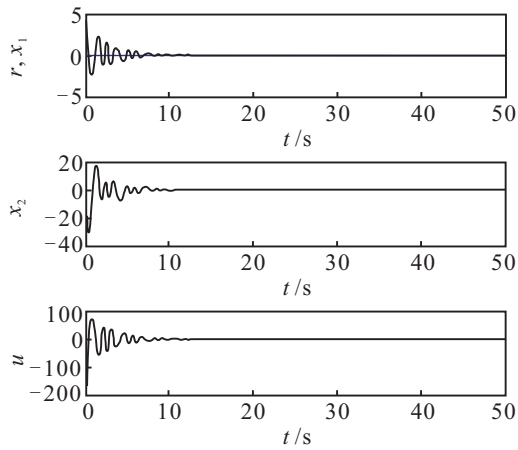


图 2 被控系统状态变量与控制信号动态曲线(实例 1)

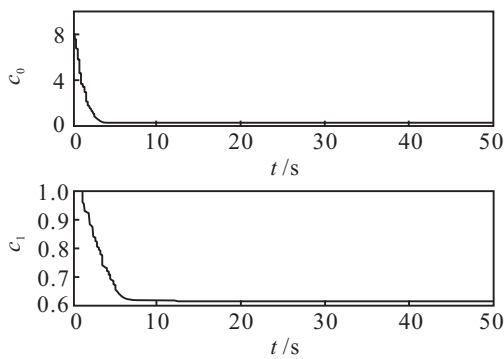


图 3 控制器增益参数动态曲线(实例 1)

实例 2 考虑下述二阶线性时变系统^[17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{2t}x_2 + e^{2t}u, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + e^{-t}x_1, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (26)$$

文献[17]根据状态观测器与状态反馈控制器分离设计原则,得到下述输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 + e^t y, \\ u = \hat{x}_2. \end{cases} \quad (27)$$

由式(26)和(27)构成的闭环系统的解析解^[17]为

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{\hat{x}_2(0) - x_2(0)}{2} e^t + \frac{x_2(0) - \hat{x}_2(0) + 2x_1(0)}{2} e^{-t}, \\ x_2(t) = \frac{\hat{x}_2(0) - x_2(0)}{2} - \frac{x_2(0) - \hat{x}_2(0) + 2x_1(0)}{2} e^{-2t}. \end{cases} \quad (28)$$

由式(28)可见,闭环系统的状态 x_1 是发散的,表明分离设计原则在 LTV 系统输出反馈控制器的设计中并非总是有效的.然而,本文提出的基于 ESO 的滑模控制方法却能有效解决系统(26)的稳定控制问题,具体方法如下.

设 $y_1 = x_1, y_2 = -x_1 - e^{2t}x_2 + e^{2t}u$, 则有

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3 + u, \\ y = y_1, \end{cases} \quad (29)$$

其中 $y_3 = (1 - e^t)x_1 - (1 + 3e^{2t})u$. 显然,如果要求 y_3 有界,则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_1 \rightarrow 0, u \rightarrow 0$; 如果 \dot{y}_3 有界,且 $\dot{y}_3 = w(t)$, 则以 y_3 作为扩张状态,系统(29)可以扩张为三阶线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3 + u, \\ \dot{y}_3 = w, \\ y = y_1 = x_1. \end{cases} \quad (30)$$

根据系统(30)可建立形如式(10)的扩张状态观测器(ESO).

在仿真过程中,设采样周期为 $h = 0.1 \text{ ms}$, 免疫因子 $\delta_4 = 0.125$; 初始状态 $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$; 给定参考轨迹 $r = 0$. 仿真结果如图 4 所示,基于 ESO 的滑模控制器增益参数实时更新结果如图 5 所示. 由图 4 可以看出,被控系统状态变量 x_1 在 0.1 s 之内稳定到零点,而文献[17]则无法实现有效控制. 在整个控制过程中,控制信号不存在高频抖振现象,进一步表明了本文提出的滑模控制方法不存在高频抖振现象的问题. 从图 5 的控制器增益参数的动态曲线可以看出,本文提出的增益参数自学习更新算法有利于提高控制器的自适应控制能力,如果仅凭经验镇定增益参数,则难以获得预期的控制效果.

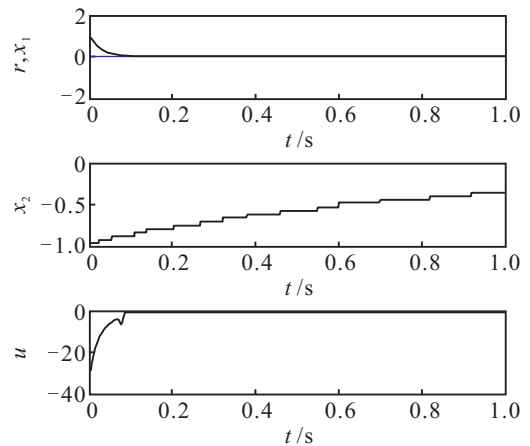


图 4 被控系统状态变量与控制信号动态曲线(实例 2)

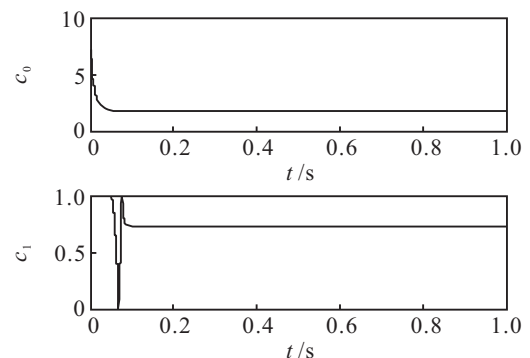


图 5 控制器增益参数动态曲线(实例 2)

5 结 论

针对一类线性时变系统,本文分别提出了基于类

Sigmoid 函数的扩张状态观测器设计以及基于免疫函数的滑模趋近律设计, 然后将扩张状态观测器与滑模控制融为一体, 实现了具有自抗扰能力和无高频抖振现象的滑模控制方法. 该控制方法表明, 只要控制器增益参数满足 $c_1 > 0$ 的条件, 就能完全保证基于 ESO 的滑模控制系统是大范围渐近稳定的. 为了进一步提高滑模控制的自适应控制能力, 研究了滑模控制器增益参数的自学习更新算法, 并通过理论分析和仿真实验验证了所提出方法的有效性. 与文献 [17] 相比, 本文控制方法具有更快的响应速度, 不仅解决了文献 [17] 能解决的控制问题 (仿真实例 1), 而且也能解决现有控制方法不能解决的闭环控制问题 (仿真实例 2). 此外, 本文提出的控制方法, 控制器结构简单, 理论模型清晰, 不依赖被控对象的数学模型, 只需要观测被控对象的一个状态变量 $y = x_1$ 就能实现任意线性时变系统的有效控制. 因此, 本文控制方法特别适合于未知线性时变对象或难以建模线性时变对象的实时控制.

参考文献(References)

- [1] Fliess M. Some basic structural properties of generalized linear systems[J]. *Systems and Control Letters*, 1990, 15(5): 391-396.
- [2] Leiva H, Siegmund S. A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2229-2232.
- [3] 张雪峰, 张庆灵. 线性时变广义系统的能控性与能观性问题[J]. *自动化学报*, 2009, 35(6): 1249-1253.
(Zhang X F, Zhang Q L. On controllability and observability of linear time-varying singular systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(6): 1249-1253.)
- [4] Marinescu B. Output feedback pole placement for linear time-varying systems with application to the control of nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(9): 1524-1530.
- [5] Jetto L, Orsini V. Relaxed conditions for the exponential stability of a class of linear time-varying systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1580-1585.
- [6] García G, Peres P L D, Tarbouriech S. Assessing asymptotic stability of linear continuous time-varying systems by computing the envelope of all trajectories[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(4): 998-1003.
- [7] Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems: Analysis and controller design[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1003-1008.
- [8] García G, Tarbouriech S, Bernussou J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(2): 364-369.
- [9] Ji X F, Yang Z B, Sun Y K, et al. Robust stabilization for linear time-varying uncertain periodic descriptor systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1219-1220.
- [10] Ilchmann A, Mueller M. Time-varying linear systems: Relative degree and normal form[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(5): 840-851.
- [11] Zhang Y P, Bars F, Ioannou P A. Backstepping control of linear time-varying systems with known and unknown parameters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(11): 1908-1925.
- [12] Tomás-Rodríguez M, Banks S P. Linear, time-varying approximations to nonlinear dynamical systems[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010: 125-210.
- [13] Sun Z S, Zhang Z, Tsao T C. Trajectory tracking and disturbance rejection for linear time-varying systems: Input/output representation[J]. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(6): 452-460.
- [14] Tuna E S. Sufficient conditions on observability Grammian for synchronization in arrays of coupled linear time-varying systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2586-2590.
- [15] Li J S. Ensemble control of finite-dimensional time-varying linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(2): 345-357.
- [16] Becker A, Bretl T. Approximate steering of a unicycle under bounded model perturbation using ensemble control[J]. *IEEE Trans on Robotics*, 2012, 28(3): 580-591.
- [17] 张健, 辛晓帅, 徐红兵. 一类线性时变系统的输出反馈控制[J]. *自动化学报*, 2014, 40(2): 373-378.
(Zhang J, Xin X S, Xu H B. Output feedback control of a class of linear time-varying systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(2): 373-378.)
- [18] Busawon K K, Saif M. A state observer for nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(11): 2098-2103.
- [19] Gauthier J P, Hammouri H, Othman S. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(6): 875-880.
- [20] Han Jing-qing. From PID to active disturbance rejection control[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900-906.