

文章编号: 1001-0920(2016)10-1749-08

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1327

带不确定协方差线性相关白噪声系统改进的鲁棒协方差交叉融合稳态 Kalman 估值器

王雪梅^{1,2}, 刘文强¹, 邓自立¹

(1. 黑龙江大学 电子工程学院, 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江工商学院 计算机系, 哈尔滨 150025)

摘要: 对于带有不确定协方差线性相关白噪声的多传感器系统, 利用 Lyapunov 方程提出设计协方差交叉(CI)融合极大极小鲁棒 Kalman 估值器(预报器、滤波器、平滑器)的一种统一方法. 利用保守的局部估值误差互协方差, 提出改进的 CI 融合鲁棒稳态 Kalman 估值器及其实际估值误差方差最小上界, 克服了用原始 CI 融合方法给出的上界具有较大保守性的缺点, 改善了原始 CI 融合器鲁棒精度. 跟踪系统的仿真例子验证了所提出方法的正确性和有效性.

关键词: 协方差交叉融合; 不确定噪声方差; 极大极小鲁棒 Kalman 估值器; 线性相关白噪声; Lyapunov 方程方法
中图分类号: O211.64 **文献标志码:** A

Modified robust covariance intersection fusion steady-state Kalman estimators for systems with uncertain-covariance linearly correlated white noises

WANG Xue-mei^{1,2}, LIU Wen-qiang¹, DENG Zi-li¹

(1. School of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080, China; 2. Department of Computer, Heilongjiang College of Business and Technology, Harbin 150025, China. Correspondent: DENG Zi-li, E-mail: dzl@hlju.edu.cn)

Abstract: For multisensor systems with uncertain covariance linearly correlated white noises, an unified approach to design the covariance intersection(CI) fusion minimax robust Kalman estimators(predictor, filter and smoother) is proposed by using the Lyapunov equation approach. A modified CI fusion robust steady-state Kalman estimator and a minimal upper bound of its actual estimation error variances are presented by using the conservative cross-covariances, which overcomes the disadvantage that the upper bound given by the original CI fuser has larger conservativeness, so that the robust accuracy of the original CI fuser is improved. A simulation example of tracking system is given to illustrate the correctness and effectiveness of the proposed method.

Keywords: covariance intersection fusion; uncertain noise variance; minimax robust Kalman estimator; linearly correlated white noises; Lyapunov equation approach

0 引言

随着高技术领域飞速发展, 多传感器信息融合 Kalman 滤波已成为备受人们关注的热门领域, 其目的是优化组合、或加权局部估计、或局部观测数据, 得到系统状态更精确的融合估计. 基于经典 Kalman 滤波的最优信息融合估计理论和方法已广泛应用于包括军事、国防、机器人、无人机、目标跟踪、GPS 定位、遥感等许多领域^[1], 经典 Kalman 滤波的局限性是要求系统模型参数和噪声方差是精确已知的. 但在许

多实际应用中, 由于未建模动态(建模误差)、随机干扰等原因, 系统模型参数和噪声方差是未知的、不确定的. 对不确定系统应用经典最优 Kalman 滤波将使滤波性能变坏, 甚至导致滤波发散, 这推动了不确定系统鲁棒 Kalman 滤波的研究^[2-3]. 鲁棒 Kalman 滤波器是指对于所有容许的不确定性, 相应的实际滤波误差方差有最小或保守性较小的上界^[2-3], 这种性质体现了滤波器受不确定性影响的稳健程度, 称为鲁棒性. 关于设计鲁棒 Kalman 滤波器方法, 对于带模有界不

收稿日期: 2015-10-29; 修回日期: 2016-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874063, 60374026); 黑龙江大学研究生创新科研项目(YJSCX2015-002HLJU).

作者简介: 王雪梅(1978-), 副教授, 博士生, 从事多传感器信息融合、鲁棒 Kalman 滤波的研究; 邓自立(1938-), 男, 教授, 博士生导师, 从事多传感器信息融合、鲁棒 Kalman 滤波等研究.

确定参数但已知噪声方差系统,常利用 Riccati 方程方法和线性矩阵不等式(LMI)方法^[2];对于带噪声方差不确定性系统,可利用 Lyapunov 方程方法^[3];对于带未知不确定互协方差系统,Julier 等^[4-5]提出了协方差交叉(CI)融合方法,其原理是基于局部估值及其保守误差方差的凸组合设计鲁棒融合器,可得到实际融合估值误差方差的一个保守上界.其优点是避免互协方差的计算,减小计算负担,但缺点是假设局部估值及其实际误差方差保守估值是已知的,且所给出的实际融合估值的误差方差上界有较大的保守性,因为计算没有利用互协方差信息.

CI 融合方法已广泛应用于目标跟踪、定位、姿态估计、遥感等方面^[5-9],并进一步发展^[10-15].文献[10]利用 Bayes 方法对两传感器系统利用局部估值相互信息,改进了原始 CI 融合器的精度,提出椭圆交叉(EI)融合器,但将 EI 融合方法应用于多传感器系统问题尚未解决.文献[11-14]利用 Lyapunov 方程方法和极大极小鲁棒估计原理,对带有不确定噪声方差多传感器系统,利用保守的局部估计误差互协方差改进原始 CI 融合的实际估计误差方差保守上界,给出了最小上界,改善了原始 CI 融合器的鲁棒精度.但文献[11-14]设计改进的 CI 融合 Kalman 估值器(预报器、滤波器、平滑器)的缺点是利用不同 Lyapunov 方程分别单独设计滤波器、预报器和平滑器,不能统一设计鲁棒融合 Kalman 估值器,且设计 CI 融合鲁棒 Kalman 平滑器采用增广状态方法^[13],具有较大的计算负担.文献[15]对带有不确定参数和不确定噪声方差的多传感器系统,利用虚拟噪声补偿技术和原始 CI 融合方法,提出了鲁棒 CI 融合 Kalman 滤波器,其缺点是要求搜索不确定参数的鲁棒域,引起较大的计算负担,而且没有得到一般的搜索方法.由于采用原始 CI 融合方法,所给出的 CI 融合器误差方差上界仍具有较大的保守性.

在理论和实际应用问题中,经常出现带线性相关白噪声的系统滤波问题,其中观测白噪声是过程白噪声的一个已知线性函数.例如 ARMA 模型可转换为带线性相关噪声的状态空间模型^[16],利用奇异值分解,广义系统可转换为带线性相关噪声的传统子系统^[17].利用差分变换可将带有有色观测噪声的系统转换为带有线性相关噪声的系统^[18].对于带有不确定协方差线性相关白噪声的多传感器系统的鲁棒 CI 融合 Kalman 估值器尚较少见到报道.

本文针对带有不确定协方差线性相关白噪声的多传感器系统,提出一种统一的 CI 融合鲁棒 Kalman 估值器设计方法.其特点是基于预报器设计滤波器和平滑器,应用极大极小鲁棒估值原理^[3]和 Lyapunov

方程方法,提出一种带保守互协方差的改进的鲁棒 CI 融合 Kalman 估值器,给出其实际融合估计误差方差的最小上界.将改进的 CI 融合器推广到带有不确定协方差线性相关白噪声的情形,克服了原始 CI 融合器给出的实际融合误差方差具有较大保守性的缺点.所提出的统一设计方法不同于分别单独设计 CI 融合 Kalman 滤波器、预报器和平滑器的方法^[11-14],且所设计的鲁棒 CI 融合 Kalman 平滑器避免了增广状态方法^[13],可以显著减小计算负担.

1 问题阐述

考虑带有不确定协方差线性相关白噪声的多传感器系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t); \quad (1)$$

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L; \quad (2)$$

$$v_i(t) = D_i w(t) + \xi_i(t). \quad (3)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统在 t 时刻的状态; $y_i(t) \in R^{m_i}$ 为第 i 个传感器的观测; $w(t) \in R^r$ 为过程噪声, $v_i(t) \in R^{m_i}$ 为第 i 个子系统的观测噪声, $v_i(t)$ 与 $w(t)$ 是线性相关的,满足式(3); Φ 、 Γ 、 D_i 和 H_i 为适当维数的已知常阵; L 为传感器的个数.

假设 1 $w(t)$ 、 $\xi_i(t) \in R^{m_i}$ 是带零均值的互不相关白噪声,各有不确定的实际噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_{ξ_i} .

假设 2 Q 和 R_{ξ_i} 分别为 \bar{Q} 和 \bar{R}_{ξ_i} 的已知保守上界,即

$$\bar{Q} \leq Q, \quad \bar{R}_{\xi_i} \leq R_{\xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (4)$$

由假设 1 和假设 2, 式(3)实际和保守的相关阵分别为

$$\bar{S}_i = E[w(t)v_i^T(t)] = \bar{Q}D_i^T, \quad S_i = QD_i^T. \quad (5)$$

其中: E 表示数学期望, T 表示转置. $v_i(t)$ 的实际和保守方差分别为

$$\bar{R}_i = D_i \bar{Q} D_i^T + \bar{R}_{\xi_i}, \quad R_i = D_i Q D_i^T + R_{\xi_i}. \quad (6)$$

假设 3 $(\Phi - \Gamma S_i R_i^{-1} H_i, \Gamma G)$ 完全能稳, 其中 $GG^T = Q - S_i R_i^{-1} S_i^T$, 且 (Φ, H_i) 是完全能检测的.

问题是设计状态 $x(t)$ 的鲁棒局部和 CI 融合 Kalman 鲁棒估值器 $\hat{x}_\theta(t|t+N)$, $N = -1, N = 0, N > 0$, $\theta = 1, 2, \dots, L$, CI, 即对于满足式(4)所有容许的不确定噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_{ξ_i} , 相应的实际估值误差方差 $\bar{P}_\theta(N)$ 保证有相应的最小上界 $P_\theta(N)$.

2 局部鲁棒稳态 Kalman 预报器

引理 1^[19] 考虑 Lyapunov 方程

$$P = FPF^T + U. \quad (7)$$

若对称矩阵 U 是正定(或半正定)的, 矩阵 F 是稳定的(其所有特征值位于单位圆内), 则该方程存在唯一

对称且正定(或半正定)解 P .

应用极大极小鲁棒估计原理^[3], 考虑带不确定噪声方差保守上界 Q 和 R_{ξ_i} 的最坏情形保守系统 (1) 和 (2), 应用标准 Kalman 预报算法, 得到保守的局部稳态线性最小方差 Kalman 预报器 ($N = -1$) 为

$$\hat{x}_i(t+1|t) = \Psi_{pi}\hat{x}_i(t|t-1) + K_{pi}y_i(t), \quad (8)$$

$$\Psi_{pi} = \Phi - K_{pi}H_i, Q_{\varepsilon_i} = H_i\Sigma_iH_i^T + R_i, \quad (9)$$

$$K_{pi} = (\Phi\Sigma_iH_i^T + \Gamma S_i)Q_{\varepsilon_i}^{-1}, \quad (10)$$

其中 Ψ_{pi} 为稳定矩阵^[20]. 保守预报误差方差 Σ_i 满足 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \Sigma_i = & \Phi\Sigma_i\Phi^T - (\Phi\Sigma_iH_i^T + \Gamma S_i)(H_i\Sigma_iH_i^T + \\ & R_i)^{-1}(\Phi\Sigma_iH_i^T + \Gamma S_i)^T + \Gamma Q\Gamma^T. \end{aligned} \quad (11)$$

应指出, 式 (8) 中保守观测 $y_i(t)$ 是由带保守上界 Q 和 R_{ξ_i} 的保守系统 (1)~(3) 生成的, 它是不可利用的. 但实际观测 $y_i(t)$ 已知, 可由传感器观测得到, 它由带实际方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_{ξ_i} 的实际系统 (1)~(3) 生成, 故用已知的实际观测 $y_i(t)$ 替代保守观测 $y_i(t)$ 即可得到实际局部 Kalman 预报器 (8).

引理 2^[2] 针对带有线性相关白噪声的不确定多传感器系统 (1)~(3), 在假设 1~假设 3 下, 保守和实际局部预报误差互协方差满足 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} = & \Psi_{pi}\Sigma_{ij}\Psi_{pj}^T + (\Gamma - K_{pi}D_i)Q(\Gamma - \\ & K_{pj}D_j)^T + K_{pi}R_{\xi_i}K_{pj}^T\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{ij} = & \Psi_{pi}\bar{\Sigma}_{ij}\Psi_{pj}^T + (\Gamma - K_{pi}D_i)\bar{Q}(\Gamma - \\ & K_{pj}D_j)^T + K_{pi}\bar{R}_{\xi_i}K_{pj}^T\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\Sigma_{ii} = \Sigma_i$ 和 $\bar{\Sigma}_{ii} = \bar{\Sigma}_i$ 分别为保守和实际预报误差方差; δ_{ij} 为克罗内克函数, $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$. 每个实际局部稳态 Kalman 预报器 (8) 是鲁棒的, 即对于所有容许的满足式 (4) 的不确定噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_{ξ_i} , 有

$$\bar{\Sigma}_i \leq \Sigma_i, i = 1, 2, \dots, L. \quad (14)$$

Σ_i 是 $\bar{\Sigma}_i$ 的最小上界, 称为鲁棒局部 Kalman 预报器.

3 鲁棒局部稳态 Kalman 滤波器和平滑器

在鲁棒局部 Kalman 预报器的基础上, 提出一种统一方法来设计鲁棒局部 Kalman 滤波器和平滑器. 保守的局部稳态 Kalman 滤波器 ($N = 0$) 和平滑器 ($N > 0$) 有如下统一形式^[3]:

$$\hat{x}_i(t|t+N) = \hat{x}_i(t|t-1) + \sum_{k=0}^N K_i(k)\varepsilon_i(t+k),$$

$$N \geq 0, i = 1, 2, \dots, L; \quad (15)$$

$$\varepsilon_i(t) = y_i(t) - H_i\hat{x}_i(t|t-1); \quad (16)$$

$$K_i(k) = \Sigma_i\Psi_{pi}^{Tk}H_i^TQ_{\varepsilon_i}^{-1}, k > 0; \quad (17)$$

$$K_i(0) = K_{fi} = \Sigma_iH_i^TQ_{\varepsilon_i}^{-1}. \quad (18)$$

其中 K_{fi} 为稳态滤波器增益. 保守估值误差方差为

$$P_i(N) = \Sigma_i - \sum_{k=0}^N K_i(k)Q_{\varepsilon_i}K_i^T(k). \quad (19)$$

当 $N \geq 0$ 时, 应用式 (1) 和 (15) 得到平滑误差^[3]为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t|t+N) = & x(t) - \hat{x}_i(t|t+N) = \\ & \Psi_{iN}\tilde{x}_i(t|t-1) + \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{Nw}w(t+\rho) + \\ & \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{Nv}v_i(t+\rho), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 I_n 表示 $n \times n$ 维单位阵. 对于 $N > 0$, 有

$$\Psi_{iN} = I_n - \sum_{k=0}^N K_i(k)H_i\Psi_{pi}^k; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} K_{i\rho}^{Nw} = & - \sum_{k=\rho+1}^N K_i(k)H_i\Psi_{pi}^{k-\rho-1}\Gamma, \\ \rho = & 0, 1, \dots, N-1, K_{iN}^{Nw} = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} K_{i\rho}^{Nv} = & \sum_{k=\rho+1}^N K_i(k)H_i\Psi_{pi}^{k-\rho-1}K_{pi} - K_i(\rho), \\ \rho = & 0, 1, \dots, N-1, K_{iN}^{Nv} = -K_i(N). \end{aligned} \quad (23)$$

规定 $K_{i0}^{0w} = 0, K_{i0}^{0v} = -K_i(0), \Psi_{i0} = I_n - K_i(0)H_i$.

将式 (3) 代入 (20) 得到平滑误差为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t|t+N) = & \\ & \Psi_{iN}\tilde{x}_i(t|t-1) + \sum_{\rho=0}^N M_{i\rho}^{Nw}w(t+\rho) + \\ & \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{Nv}\xi_i(t+\rho), \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$M_{i\rho}^{Nw} = K_{i\rho}^{Nw} + K_{i\rho}^{Nv}D_i. \quad (25)$$

由式 (24) 引出当 $N \geq 0$ 时, 应用假设 1, 保守和实际稳态平滑误差互协方差分别为

$$\begin{aligned} P_{ij}(N) = & \Psi_{iN}\Sigma_{ij}\Psi_{jN}^T + \sum_{\rho=0}^N M_{i\rho}^{Nw}QM_{j\rho}^{NwT} + \\ & \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{Nv}R_{\xi_i}K_{j\rho}^{NvT}\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ij}(N) = & \Psi_{iN}\bar{\Sigma}_{ij}\Psi_{jN}^T + \sum_{\rho=0}^N M_{i\rho}^{Nw}\bar{Q}M_{j\rho}^{NwT} + \\ & \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{Nv}\bar{R}_{\xi_i}K_{j\rho}^{NvT}\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (27)$$

其中: $P_{ii}(N) = P_i(N), \bar{P}_{ii}(N) = \bar{P}_i(N)$.

定理 1 针对带有线性相关白噪声的多传感器

不确定系统(1)~(3). 在假设1~假设3下, 每个实际局部稳态 Kalman 滤波器和平滑器(15)均是鲁棒的, 即对于满足式(4)的所有容许不确定噪声方差, 相应的实际误差方差 $\bar{P}_i(N)$ 保证有最小上界 $P_i(N)$, 即

$$\bar{P}_i(N) \leq P_i(N), \quad N \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (28)$$

称它们为鲁棒局部 Kalman 滤波器和平滑器.

证明 当 $N \geq 0$ 时, 将式(26)减去(27), 且置 $i = j$, 得到

$$\begin{aligned} \Delta P_i(N) = & \Psi_{iN} \Delta \Sigma_i \Psi_{iN}^T + \sum_{\rho=0}^N M_{i\rho}^{Nw} \Delta Q M_{i\rho}^{NwT} + \\ & \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{Nv} \Delta R_{\xi i} K_{i\rho}^{NvT}. \end{aligned} \quad (29)$$

由 $\Delta \Sigma_i \geq 0$, $\Delta Q \geq 0$ 和 $\Delta R_{\xi i} \geq 0$ 引出 $\Delta P_i(N) \geq 0$, 即式(28)成立. 这表明 $P_i(N)$ 是 $\bar{P}_i(N)$ 的一个上界, 类似于引理2的证明^[12], 容易证明 $P_i(N)$ 是 $\bar{P}_i(N)$ 的最小上界. \square

4 统一的鲁棒 CI 融合稳态 Kalman 估值器

对最坏情形保守系统, 根据 CI 融合算法^[21], 保守或实际稳态 CI 融合 Kalman 估值器为

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{CI}}(t|t+N) &= \sum_{i=1}^L \Omega_i^{\text{CI}}(N) \hat{x}_i(t|t+N), \\ N &= -1, \quad N \geq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_i^{\text{CI}}(N) &= \omega_i^{(N)} P_{\text{CI}}^*(N) P_i^{-1}(N), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, L; \end{aligned} \quad (31)$$

$$P_{\text{CI}}^*(N) = \left[\sum_{i=1}^L \omega_i^{(N)} P_i^{-1}(N) \right]^{-1}. \quad (32)$$

最优加权系数 $\omega_i \geq 0$ 满足约束

$$\sum_{i=1}^L \omega_i^{(N)} = 1, \quad 0 \leq \omega_i^{(N)} \leq 1. \quad (33)$$

极小化性能指标

$$\begin{aligned} \min_{\omega_i^{(N)}} \text{tr} P_{\text{CI}}^*(N) = & \\ \min_{\substack{\omega_i^{(N)} \in [0,1] \\ \omega_1^{(N)} + \dots + \omega_L^{(N)} = 1}} \text{tr} \left\{ \left[\sum_{i=1}^L \omega_i^{(N)} P_i^{-1}(N) \right]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

$[P_{\text{CI}}^*(N)]^{-1}$ 是 $P_i^{-1}(N)$ 的凸组合, 其中记号 tr 表示矩阵的迹. 利用 Matlab 工具箱中的 `fmincon` (最优化工具箱) 求解最优加权系数 $\omega_1^{(N)}, \omega_2^{(N)}, \dots, \omega_L^{(N)}$.

由式(31)和(32)得到 $\Omega_i^{\text{CI}}(N)$ 满足约束

$$\sum_{i=1}^L \Omega_i^{\text{CI}}(N) = I_n. \quad (35)$$

由式(35)有

$$x(t) = \sum_{i=1}^L \Omega_i^{\text{CI}}(N) x_i(t). \quad (36)$$

将式(36)减去(30), 得到保守或实际 CI 融合估值误差为

$$\tilde{x}_{\text{CI}}(t|t+N) = \sum_{i=1}^L \Omega_i^{\text{CI}}(N) \tilde{x}_i(t|t+N), \quad (37)$$

其中 $\tilde{x}_i(t|t+N)$ 为保守或实际局部估值误差.

由式(31)和(37)得到保守和实际融合误差方差为

$$\begin{aligned} P_{\text{CI}}(N) &= P_{\text{CI}}^*(N) \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \omega_i^{(N)} \omega_j^{(N)} P_i^{-1}(N) \times \right. \\ & \quad \left. P_{ij}(N) P_j^{-1}(N) \omega_j^{(N)} \right] P_{\text{CI}}^*(N), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{CI}}(N) &= P_{\text{CI}}^*(N) \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \omega_i^{(N)} \omega_j^{(N)} P_i^{-1}(N) \times \right. \\ & \quad \left. \bar{P}_{ij}(N) P_j^{-1}(N) \omega_j^{(N)} \right] P_{\text{CI}}^*(N). \end{aligned} \quad (39)$$

定理2 针对带有线性相关白噪声的多传感器不确定系统(1)~(3), 在假设1~假设3下, 实际的 CI 融合器(30)是鲁棒的, 即对于所有容许的满足式(4)的不确定实际噪声方差 \bar{Q} 和 $\bar{R}_{\xi i}$, 相应的实际 CI 融合估计误差方差 $\bar{P}_{\text{CI}}(N)$ 有最小上界 $P_{\text{CI}}(N)$, 即

$$\bar{P}_{\text{CI}}(N) \leq P_{\text{CI}}(N), \quad N = -1, \quad N \geq 0. \quad (40)$$

证明 定义

$$\Omega_{\text{CI}}(N) = [\Omega_1^{\text{CI}}(N), \Omega_2^{\text{CI}}(N), \dots, \Omega_L^{\text{CI}}(N)]. \quad (41)$$

式(38)和(39)有更紧凑形式

$$P_{\text{CI}}(N) = \Omega_{\text{CI}}(N) P_a(N) \Omega_{\text{CI}}^T(N), \quad (42)$$

$$\bar{P}_{\text{CI}}(N) = \Omega_{\text{CI}}(N) \bar{P}_a(N) \Omega_{\text{CI}}^T(N). \quad (43)$$

其中定义保守和实际总体估值误差方差分别为

$$P_a(N) = (P_{ij}(N))_{nL \times nL},$$

$$\bar{P}_a(N) = (\bar{P}_{ij}(N))_{nL \times nL}. \quad (44)$$

将式(42)减去(43), 得到

$$\begin{aligned} P_{\text{CI}}(N) - \bar{P}_{\text{CI}}(N) &= \\ \Omega_{\text{CI}}(N) [P_a(N) - \bar{P}_a(N)] \Omega_{\text{CI}}^T(N). \end{aligned} \quad (45)$$

为了证明式(40)成立, 首先证明下式成立:

$$P_a(N) - \bar{P}_a(N) \geq 0, \quad N = -1, \quad N \geq 0. \quad (46)$$

当 $N = -1$ 时, 定义

$$P_a(-1) = \Sigma_a = (\Sigma_{ij})_{nL \times nL},$$

且定义

$$\bar{P}_a(-1) = \bar{\Sigma}_a = (\bar{\Sigma}_{ij})_{nL \times nL},$$

类似于文献[12]的推导可证明

$$\bar{\Sigma}_a \leq \Sigma_a. \quad (47)$$

当 $N \geq 0$ 时, 将式 (26) 减去 (27), 得到保守和实际总体的 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} \Delta P_a(N) = & \Psi_{aN} \Delta \Sigma_a \Psi_{aN}^T + \sum_{\rho=0}^N M_{a\rho}^{Nw} \Delta Q_a M_{a\rho}^{NwT} + \\ & \sum_{\rho=0}^N K_{a\rho}^{Nv} \Delta R_{\xi a} K_{a\rho}^{NvT}. \end{aligned} \quad (48)$$

其中

$$\Delta P_a(N) = P_a(N) - \bar{P}_a(N), \quad \Delta \Sigma_a = \Sigma_a - \bar{\Sigma}_a,$$

$$\Delta Q_a = \begin{bmatrix} \Delta Q & \cdots & \Delta Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta Q & \cdots & \Delta Q \end{bmatrix},$$

$$\Delta R_{\xi a} = \text{diag}[\Delta R_{\xi 1}, \Delta R_{\xi 2}, \cdots, \Delta R_{\xi L}],$$

$$\Psi_{aN} = \text{diag}[\Psi_{1N}, \Psi_{2N}, \cdots, \Psi_{LN}],$$

$$M_{a\rho}^{Nw} = \text{diag}[M_{1\rho}^{Nw}, M_{2\rho}^{Nw}, \cdots, M_{L\rho}^{Nw}],$$

$$K_{a\rho}^{Nv} = \text{diag}[K_{1\rho}^{Nv}, K_{2\rho}^{Nv}, \cdots, K_{L\rho}^{Nv}]. \quad (49)$$

由 $\Delta Q = Q - \bar{Q} \geq 0$, $\Delta R_{\xi i} = R_{\xi i} - \bar{R}_{\xi i} \geq 0$ 可知 $\Delta Q_a \geq 0$, $\Delta R_{\xi a} \geq 0$. 由式 (47), 有 $\Delta \Sigma_a \geq 0$. 故由式 (48) 引出, 当 $N \geq 0$ 时, 式 (46) 成立. 类似于引理 2 的证明, 容易得到 $P_a(N)$ 是 $\bar{P}_a(N)$ 的最小上界, 再应用式 (45) 得 (40). \square

注 1 文献 [3,11] 证明了 CI 融合器有一个由式 (32) 定义的 $\bar{P}_{CI}(N)$ 保守上界 $P_{CI}^*(N)$, 即

$$\bar{P}_{CI}(N) \leq P_{CI}^*(N). \quad (50)$$

应用定理 2, $P_{CI}(N)$ 是 $\bar{P}_{CI}(N)$ 的最小上界, 因此有

$$P_{CI}(N) \leq P_{CI}^*(N). \quad (51)$$

注意到, 原始 CI 融合器的上界 $P_{CI}^*(N)$ 由保守局部估值误差方差的凸组合 (32) 得到, 因为 $P_{CI}^*(N)$ 不包含互协方差信息, 所以有较大的保守性. 由式 (38) 得到的最小上界 $P_{CI}(N)$ 由于包含保守的局部估值误差方差和互协方差信息, 具有最小的保守性.

将估值误差方差阵的迹作为精度指标^[11-14], 较小的迹表示较高的精度. 在式 (34) 中取 $\omega_i^{(N)} = 1$, $\omega_j^{(N)} = 0 (j \neq i)$, 则有 $\text{tr} P_{CI}^*(N) = \text{tr} P_i(N)$. 因为 $\text{tr} P_{CI}^*(N)$ 在约束 (33) 下被极小化, 有

$$\text{tr} P_{CI}^*(N) \leq \text{tr} P_i(N), \quad N = -1, N \geq 0, \quad (52)$$

对式 (40) 和 (51) 取矩阵迹运算, 有

$$\text{tr} \bar{P}_{CI}(N) \leq \text{tr} P_{CI}(N) \leq \text{tr} P_{CI}^*(N). \quad (53)$$

鲁棒 Kalman 估值器的实际估值误差方差阵的迹 $\text{tr} \bar{P}_{CI}(N)$ 称为实际精度. 最小上界的迹 $\text{tr} P_{CI}(N)$ 称为改进的 CI 融合器的鲁棒精度^[11-14], 保守上界的迹 $\text{tr} P_{CI}^*(N)$ 称为原始 CI 融合器的保守鲁棒精度. 由式

(53) 可知, 改进的 CI 融合器的鲁棒精度高于一原始 CI 融合器的保守鲁棒精度. 对式 (14) 和 (28) 取矩阵迹运算, 有

$$\text{tr} \bar{\Sigma}_i \leq \text{tr} \Sigma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, L; \quad (54)$$

$$\text{tr} \bar{P}_i(N) \leq \text{tr} P_i(N), \quad N \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, L. \quad (55)$$

由式 (52)~(55) 可知, 局部或者融合估值器的实际精度高于相应的鲁棒精度, 改进的 CI 融合器的鲁棒精度也高于每个局部估值器的鲁棒精度, 即 $\text{tr} P_{CI}(N) \leq \text{tr} P_i(N)$.

注 2 定义鲁棒 Kalman CI 融合估值器的第 i 个分量的实际精度为 $\bar{\sigma}_i^2$, 鲁棒精度为 σ_i^2 , 其中 $\bar{\sigma}_i^2$ 和 σ_i^2 分别为 $\bar{P}_{CI}(N)$ 和 $P_{CI}(N)$ 的第 (i, i) 对角元素, $i = 1, 2, \cdots, n$. 定义第 i 个分量误差方差的实际标准差为 $\bar{\sigma}_i$, 鲁棒标准差为 σ_i . 由式 (50) 引出

$$\bar{\sigma}_i^2 \leq \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (56)$$

σ_i^2 是对于所有容许的满足式 (4) 的不确定噪声方差, 相应的第 i 个分量实际方差 $\bar{\sigma}_i^2$ 的最小上界. 式 (56) 也称为第 i 个分量的鲁棒性, 由式 (56) 得到

$$\bar{\sigma}_i \leq \sigma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (57)$$

σ_i 是 $\bar{\sigma}_i$ 的最小上界, 当假设噪声服从正态分布时, 由概率理论, 对于所有容许的不确定噪声方差, 相应的第 i 个分量实际估值误差值以超过 99% 的概率位于 $\pm 3\bar{\sigma}_i$ 界之间, 由式 (56) 可知也位于 $\pm 3\sigma_i$ 界之间, 且鲁棒标准差 σ_i 与不确定噪声方差无关. 第 i 个分量实际估值误差的 $\pm 3\sigma_i$ 界的上述性质等价地表述了第 i 个分量的鲁棒性和其鲁棒 (总体) 精度.

注 3 由式 (19) 可以证明局部精度估值精度关系

$$P_i(N) \leq P_i(0) \leq \Sigma_i, \quad N \geq 1, \quad i = 1, 2, \cdots, L;$$

$$\text{tr} P_i(N) \leq \text{tr} P_i(0) \leq \text{tr} \Sigma_i, \quad N \geq 1, \quad i = 1, 2, \cdots, L. \quad (58)$$

注 4 在定理 1 和定理 2 中应用非扩维方法设计局部和融合 Kalman 平滑器, 与扩维方法相比^[13], 其优点是当 N 较大时计算负担明显减少, 因为扩维算法的复杂度为 $O(((N+1)n)^3)$, 采用非扩维算法的复杂度为 $O(n^3)$ ^[13].

5 应用于目标跟踪系统的仿真例子

考虑带有不确定噪声方差和有色观测噪声的 3 传感器典型的目标跟踪系统^[22-25]

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t); \quad (59)$$

$$z_i(t) = H_{0i} x(t) + \eta_i(t), \quad i = 1, 2, 3; \quad (60)$$

$$\eta_i(t+1) = B_i \eta_i(t) + \xi_i(t), \quad (61)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5T_0^2 \\ T_0 \end{bmatrix},$$

$$H_{01} = H_{03} = [0 \ 1], H_{02} = I_2. \quad (62)$$

其中: T_0 为采样周期, $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ 为状态, $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $w(t)$ 分别为 tT_0 时刻运动目标的位置、速度和加速度, 标量 $z_1(t)$ 和 $z_3(t)$ 分别为传感器 1 和传感器 3 对位置的观测, 向量 $z_2(t)$ 为传感器 2 对位置和速度的观测, $\eta_i(t)$ 为有色观测噪声, $w(t)$ 和 $\xi_i(t)$ 为零均值、不确定噪声方差为 \bar{Q} 和 \bar{R}_{ξ_i} 的互不相关正态白噪声. 这类典型模型有广泛的应用背景, 可应用于目标跟踪^[22]、无人机姿态估计^[23]、焊缝跟踪^[24]、GPS 定位^[25]等.

利用差分变换引入一个新的观测过程

$$y_i(t) = z_i(t+1) - B_i z_i(t), \quad (63)$$

则等价的新的观测方程为

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (64)$$

其中

$$H_i = H_{0i} \Phi - B_i H_{0i}, \quad D = H_{0i} \Gamma; \quad (65)$$

$$v_i(t) = D_i w(t) + \xi_i(t). \quad (66)$$

由式 (66) 可知, $v_i(t)$ 与 $w(t)$ 是线性相关白噪声. 因此带有有色观测噪声的原系统 (59)~(62) 等价于带有线性相关白噪声的系统 (59)、(64)~(66).

仿真中, 取

$$B_1 = 0.1, \quad B_2 = \text{diag}(0.06, 0.3),$$

$$B_3 = 0.6, \quad T_0 = 0.25, \quad Q = 1,$$

$$R_{\xi_1} = 9, \quad R_{\xi_2} = \text{diag}(64, 0.81),$$

$$R_{\xi_3} = 4, \quad \bar{Q} = 0.75Q, \quad \bar{R}_{\xi_1} = 0.8R_{\xi_1},$$

$$\bar{R}_{\xi_2} = 0.5R_{\xi_2}, \quad \bar{R}_{\xi_3} = 0.75R_{\xi_3}.$$

表 1 给出了当 $N = 2$ 时, 局部和 CI 融合鲁棒稳态 Kalman 平滑器的鲁棒和实际精度.

表 1 局部和融合平滑器鲁棒和实际精度的比较

$\text{tr}P_1(2)$	$\text{tr}P_2(2)$	$\text{tr}P_3(2)$	$\text{tr}P_{CI}(2)$	$\text{tr}P_{CI}^*(2)$
1.5406	2.4282	1.1668	0.6967	1.4885
$\text{tr}\bar{P}_1(2)$	$\text{tr}\bar{P}_2(2)$	$\text{tr}\bar{P}_3(2)$	$\text{tr}\bar{P}_{CI}(2)$	
1.2129	1.2390	0.8751	0.4993	

由表 1 可见, 鲁棒精度高于实际精度, 且验证了精度关系式 (52)、(53) 和 (55).

下面给出方差阵不等式精度比较的几何解释. 定义方差 P_θ ($\theta = 1, 2, 3, CI$) 的协方差椭圆是满足 $\{x : x^T P_\theta^{-1} x = c\}$ 的平面上点 x 的轨迹, 不失一般性, 取常数 $c = 1$. 文献 [3] 已证明, 方差阵 $P_1 \leq P_2$ 等价于 P_1 的椭圆被包含在 P_2 的椭圆内. 基于协方差椭圆的鲁棒平滑器的方差阵不等式精度比较如图 1 所示.

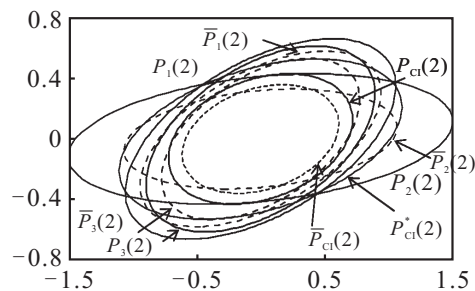


图 1 基于协方差椭圆的方差阵不等式精度比较

由图 1 可见, $\bar{P}_\theta(2)$ 的椭圆被包含在 $P_\theta(2)$ 的椭圆内 ($\theta = 1, 2, 3, CI$), $\bar{P}_{CI}(2)$ 的椭圆被包含在 $P_{CI}(2)$ 的椭圆内, 且 $P_{CI}(2)$ 的椭圆被包含在 $P_{CI}^*(2)$ 内, 这验证了矩阵不等式精度关系式 (40)、(50) 和 (51).

为了表明 $\bar{P}_{CI}(2)$ 、 $P_{CI}(2)$ 与 $P_{CI}^*(2)$ 的精度关系, 任意取 4 组满足式 (4) 的实际误差方差 ($\bar{Q}^{(k)}$, $\bar{R}_{\xi_1}^{(k)}$, $\bar{R}_{\xi_2}^{(k)}$, $\bar{R}_{\xi_3}^{(k)}$), $k = 1, 2, 3, 4$. 应用式 (27) 和 (39), 对应地得到 4 个实际 CI 融合两步平滑器误差方差 $\bar{P}_{CI}^{(k)}(2)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) 的椭圆, 如图 2 所示.

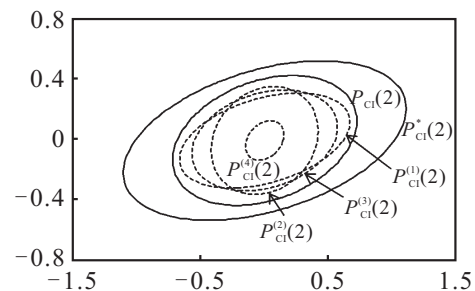


图 2 鲁棒 CI 融合器实际方差及上界的协方差椭圆比较

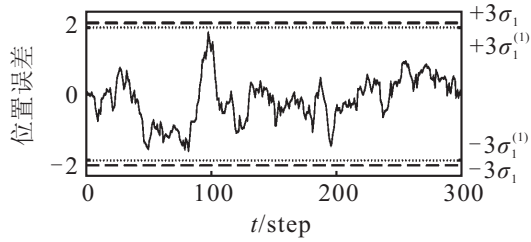
由图 2 可见, $\bar{P}_{CI}^{(k)}(2)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) 的椭圆都被包含在 $P_{CI}(2)$ 的椭圆内, 且 $P_{CI}(2)$ 的椭圆被包含在 $P_{CI}^*(2)$ 的椭圆内. 这意味着与 $P_{CI}^*(2)$ 的椭圆相比, $P_{CI}(2)$ 的椭圆是包含所有容许实际方差 $\bar{P}_{CI}^{(k)}(2)$ 椭圆的最紧椭圆, 即 $P_{CI}(2)$ 是 $\bar{P}_{CI}^{(k)}(2)$ 的最小上界, 这也验证了方差阵不等式精度关系式 (50) 和 (51).

对上述 4 组满足式 (4) 的不同的容许噪声方差 ($\bar{Q}^{(k)}$, $\bar{R}_{\xi_1}^{(k)}$, $\bar{R}_{\xi_2}^{(k)}$, $\bar{R}_{\xi_3}^{(k)}$), $k = 1, 2, 3, 4$. 对于本例, 位置是状态的第 1 个分量, 位置 CI 融合两步平滑估值的鲁棒和实际标准差, $\sigma_1 = 0.7155$ 、 $\bar{\sigma}_1^{(k)}$ 分别为 $P_{CI}(2)$ 和 $\bar{P}_{CI}^{(k)}(2)$ 的第 (1,1) 对角元素的开方, 相应的实际平滑误差曲线和 $\pm 3\sigma_1$ 、 $\pm 3\bar{\sigma}_1^{(k)}$ 界的仿真结果如图 3 所示.

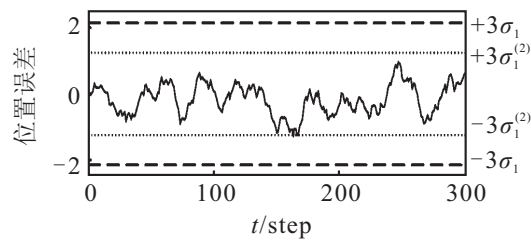
图 3 中实线表示实际误差曲线, 虚线和短划线分别表示 $\pm 3\bar{\sigma}_1^{(k)}$ 、 $\pm 3\sigma_1$ 界. 可以看到, $\bar{\sigma}_1^{(k)} < \sigma_1$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 对于每组容许的实际噪声方差, 相应的平滑误差值超过 99% 均位于 $\pm 3\bar{\sigma}_1^{(k)}$ 界内, 且也均位于 $\pm 3\sigma_1$ 界内, σ_1 是所有容许的 $\bar{\sigma}_1^{(k)}$ 的公共最小上界, 这验证了位置 CI 融合平滑器的鲁棒性.

为了验证实际精度的一致性, 图 4 为进行 $\rho = 1000$ 次 Monte-Carlo 仿真得到的实际均方误差 (MSE)

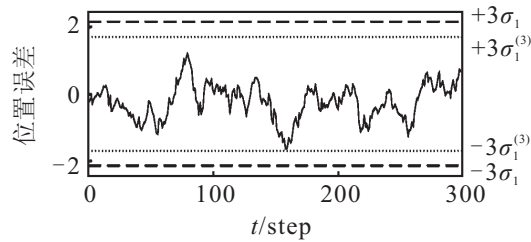
曲线. 注意到, MSE 值便是实际误差方差阵的采样方差阵的迹值^[12].



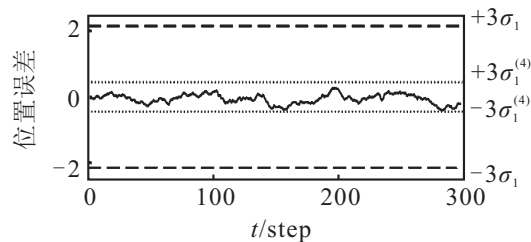
(a) $\bar{Q}^{(1)}=0.35, \bar{R}_{\epsilon_1}^{(1)}=0.93R_{\epsilon_1}, \bar{R}_{\epsilon_2}^{(1)}=0.91R_{\epsilon_2}, \bar{R}_{\epsilon_3}^{(1)}=0.85R_{\epsilon_3}$



(b) $\bar{Q}^{(2)}=0.92, \bar{R}_{\epsilon_1}^{(2)}=0.3R_{\epsilon_1}, \bar{R}_{\epsilon_2}^{(2)}=0.2R_{\epsilon_2}, \bar{R}_{\epsilon_3}^{(2)}=0.1R_{\epsilon_3}$



(c) $\bar{Q}^{(3)}=0.68, \bar{R}_{\epsilon_1}^{(3)}=0.71R_{\epsilon_1}, \bar{R}_{\epsilon_2}^{(3)}=0.35R_{\epsilon_2}, \bar{R}_{\epsilon_3}^{(3)}=0.8R_{\epsilon_3}$



(d) $\bar{Q}^{(4)}=0.1, \bar{R}_{\epsilon_1}^{(4)}=0.01R_{\epsilon_1}, \bar{R}_{\epsilon_2}^{(4)}=0.1R_{\epsilon_2}, \bar{R}_{\epsilon_3}^{(4)}=0.1R_{\epsilon_3}$

图 3 位置 CI 融合平滑误差的实际和鲁棒标准界

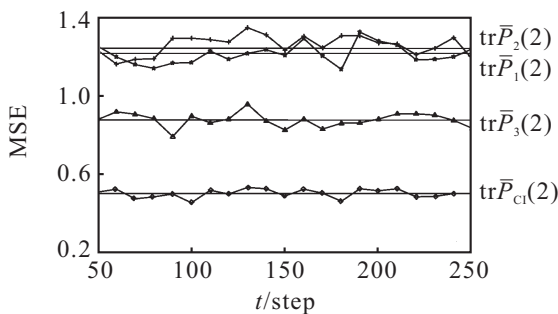


图 4 鲁棒 Kalman 两步平滑器的实际精度与 MSE 曲线

图 4 中直线代表相应实际误差方差阵的迹值, 可看出, 当 ρ ($\rho = 1000$) 充分大时, MSE 曲线接近相应的直线, 这验证了采样方差的一致性.

6 结 论

对于带有不确定协方差线性相关白噪声多传感器系统的鲁棒融合滤波问题, 本文主要创新和贡献如下:

1) 基于极大极小鲁棒估值原理, 利用 Lyapunov 方程方法提出了统一的鲁棒 CI 融合 Kalman 滤波方法. 首先提出了局部鲁棒 Kalman 预报器及其误差方差最小上界, 利用局部鲁棒 Kalman 预报器提出了局部鲁棒 Kalman 滤波器、平滑器、统一的改进 CI 融合 Kalman 估值器和相应的估值误差方差最小上界, 克服了文献 [11-14] 不能统一处理 CI 融合 Kalman 估值器的缺点, 也克服了不能处理线性相关噪声的局限性. 采用非增广状态方法, 显著减小了平滑计算负担^[13], 克服了原始 CI 融合方法要求假设已知局部估值及其估值误差保守估值的缺点^[4-5].

2) 应用保守局部估值误差互协方差信息给出了改进 CI 融合器的实际误差方差最小上界, 因此克服了原始 CI 融合方法给出的实际融合估值误差上界具有较大保守性的缺点^[4-5]. 证明了改进的鲁棒 CI 融合器的鲁棒精度高于原始 CI 融合器的鲁棒精度和每个局部估值器的鲁棒精度.

进一步的研究工作包括将本文结果推广到带乘性噪声、丢失观测、丢包、相关噪声和不确定噪声方差等混合不确定多传感器系统.

参考文献(References)

- [1] Liggins M E, Hall D L, Lin as H. Handbook of multisensor data[M]. 2nd ed. New York: CRC Press, 2009: 1-13.
- [2] Lewis F L, Xie L H, Popa D. Optimal and robust estimation[M]. 2nd ed. New York: CRC Press, 2008: 315-335.
- [3] 邓自立, 齐文娟, 张鹏. 鲁棒融合卡尔曼滤波理论及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016: 1-382. (Deng Z L, Qi W J, Zhang P. Robust fusion kalman filtering theory with applications[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2016: 1-382.)
- [4] Julier S J, Uhlmann J K. Non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations[C]. Proc of the IEEE American Control Conf. Albuquerque, 1997: 2369-2373.
- [5] Julier S J, Uhlmann J K. Using covariance intersection for SLAM[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2007, 55(1): 3-20.
- [6] Ferreira J, Waldmann J. Covariance intersection-based sensor fusion for sounding rocket tracking and impact area prediction[J]. Control Engineering Practice, 2007, 15(4): 389-409.

- [7] Guo Q, Chen S Y, Leung H, et al. Covariance intersection based image fusion technique with application to pansharpening in remote sensing[J]. *Information Sciences*, 2010, 18(180): 3434-3443.
- [8] Crassidis J L, Yang C, Nebelecky C K, et al. Decentralized attitude estimation using a quaternion covariance intersection approach[J]. *J of the Astronautical Sciences*, 2013, 57(1/2): 113-128.
- [9] 王硕, 宋申民, 史小平, 等. 噪声特性未知的多传感器协方差交叉融合姿态估计[J]. *控制与决策*, 2016, 31(2): 273-278.
(Wang S, Song S M, Shi X P, et al. Multi-sensor covariance intersection fusion attitude estimation with unknown noise characteristics[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(2): 273-278.)
- [10] Sijts J, Lazar M. State fusion with unknown correlation: Ellipsoidal intersection[J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1874-1878.
- [11] Qi W J, Zhang P, Deng Z L. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances[J]. *Signal Processing*, 2014, 99(1): 185-200.
- [12] Qi W J, Zhang P, Nie G H, et al. Robust weighted fusion Kalman predictors with uncertain noise variances[J]. *Digital Signal Processing*, 2014, 30(1): 37-54.
- [13] Qi W J, Zhang P, Deng Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensor system with uncertain noise variances[J]. *Information Sciences*, 2014, 282(20): 15-37.
- [14] Qi W J, Zhang P, Deng Z L. Weighted fusion robust steady-state Kalman filters for multisensor system with uncertain noise variances[J]. *J of Applied Mathematics*, 2014, 2014(1): 1-11.
- [15] 王雪梅, 刘文强, 邓自立. 不确定系统鲁棒协方差交叉融合稳态 Kalman 滤波器[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(8): 1900-1905.
(Wang X M, Liu W Q, Deng Z L. Robust covariance intersection fusion steady-state Kalman filter for uncertain systems[J]. *J of Elections & Information Technology*, 2015, 37(8): 1900-1905.)
- [16] Sun S L, Li X Y, Yan S W. Estimators for autoregressive moving average signals with multiple sensors of different missing measurement rates[J]. *IET Signal Processing*, 2012, 6(3): 178-185.
- [17] 高媛, 李怀敏, 邓自立. 带多层融合结构的广义系统 Kalman 融合器[J]. *自动化学报*, 2008, 34(6): 639-646.
(Gao Y, Li H M, Deng Z L. Kalman fuser with multi-layer fusion structure for descriptor systems[J]. *Acta Automation Sinica*, 2008, 34(6): 639-646.)
- [18] Sun S L, Deng Z L. Distributed optimal fusion steady-state Kalman filter for systems with coloured measurement noises[J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 113-118.
- [19] Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. *Linear estimation*[M]. New York: Prentice Hall, 2000: 766-772.
- [20] Anderson B D O, Moore J B. *Optimal filtering*[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1979: 1-300.
- [21] Julier S J, Uhlmann J K. *General decentralized data fusion with covariance intersection*[M]. New York: CRC Press, 2009: 319-342.
- [22] Bar-Shalom Y, Kirubarajan T, Li X R. *Estimation with applications to tracking and navigation*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002: 1-490.
- [23] 汪绍华, 杨莹. 基于卡尔曼滤波的四旋翼飞行器姿态估计和控制算法研究[J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1109-1115.
(Wang S H, Yang Y. Quadrotor aircraft attitude estimation and control based on Kalman filter[J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1109-1115.)
- [24] 高向东, 仲训泉, 游德勇, 等. 色噪声下卡尔曼滤波焊缝跟踪算法与试验研究[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(7): 931-935.
(Gao X D, Zhong X G, You D Y, et al. Application of Kalman filter with colored noises to the experiment of seam tracking[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 931-935.)
- [25] 王新龙, 申功勋, 丁杨斌. 利用 GPS 进行车辆动态定位的自适应模型研究[J]. *控制与决策*, 2005, 20(1): 103-105.
(Wang X L, Shen G X, Ding Y B. Adaptive system model of the vehicle kinematic positioning based on GPS[J]. *Control and Decisions*, 2005, 20(1): 103-105.)

(责任编辑: 郑晓蕾)