

有向图下考虑暂态响应的多智能体 H_∞ 一致性控制

周绍磊, 祁亚辉, 康宇航, 闫实

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264000)

摘要: 研究有向通信拓扑条件下线性多智能体满足一定暂态响应性能的 H_∞ 一致性控制. 相比于已有的无向通信拓扑条件下的结论, 所得结论对通信拓扑结构要求大为降低, 更具一般性. 通过对有向图下 Laplacian 矩阵特定形式的分解, 将系统一致性问题转化成低维系统的稳定性问题, 进而根据 Lyapunov 稳定性分析给出满足暂态性能指标的充分条件. 给出相应的控制器设计方法, 并结合空间二维二阶运动模型进行仿真, 仿真结果表明, 所提出的控制器设计方法有效.

关键词: 多智能体; 有向图; H_∞ 一致; 暂态响应

中图分类号: TP13

文献标志码: A

H_∞ consensus control of multi-agent systems synthesised with transient performance in directed networks

ZHOU Shao-lei, QI Ya-hui, KANG Yu-hang, YAN Shi

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264000, China.

Correspondent: QI Ya-hui, E-mail: luckyqiyahui@163.com)

Abstract: H_∞ consensus control synthesised with transient performance for linear multi-agent systems in directed networks is investigated. Compared with the existing conclusions in undirected networks, the one presented in the article depends less on the structure of the communication topology which is more common. A matrix decomposition of Laplacian matrix is introduced, then the H_∞ consensus problem is converted into an H_∞ control problem of a lower dimension system via a proper linear variable transformation, which can be analyzed by using the Lyapunov method. A sufficient condition to achieve H_∞ consensus synthesised with transient performance is presented. Finally, the effectiveness of the theoretical results is illustrated via a numerical simulation on a two dimensional second-order UAV model.

Keywords: multi-agent systems; directed network; H_∞ consensus; transient performance

0 引言

近年来, 多智能体的协同控制受到广泛的关注和研究, 尤其在蜂拥 (flocking)^[1]、集结 (rendezvous)^[2]和编队控制 (formation control)^[3-4]等群体性行为领域. 协同控制的一个基础问题就是一致性控制, 一致性控制是只根据系统中相邻节点的信息^[5]设计分布式控制器, 使多智能体达到共同的目标. 多智能体间信息交互一般用图表述, 通常表示为无向图或有向图. 多智能体状态能否达到一致, 不光取决于单个智能体的动态特性, 也与多智能体间的通信拓扑有关.

作为多智能体分布式协同控制的一个基础性问题, 一致性相关研究已经取得了大量成果. 文献[6]分析了具有一阶积分动力学模型的多智能系统一致

性控制问题, 得到了若使系统达成一致, 则通信拓扑图(或联合拓扑图)需要包含一个生成树的结论; 文献[7-8]研究了具有二阶积分器模型的多智能体系统的一致性问题, 该模型被应用于描述具有位置-速度系统模型的一致性研究中; 文献[9-10]系统地分析了具有一般线性时不变模型的多智能体系统的一致性问题, 给出了基于状态信息反馈的一致性控制器设计方法.

考虑到外部扰动, 文献[11]给出了无向图下线性多智能体系统能够实现 H_∞ 一致性的等价条件; 进一步, 文献[12]给出了无向图下考虑暂态性能的 H_∞ 一致性控制器设计方法; 文献[13]给出了具有强连通特性有向图下的多智能体系统 H_∞ 一致性控制器设计

收稿日期: 2015-12-23; 修回日期: 2016-03-28.

基金项目: 航空基金项目(20135184007).

作者简介: 周绍磊(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器导航、制导与控制等研究; 祁亚辉(1987-), 男, 博士生, 从事多智能体一致性理论、无人机编队控制的研究.

方法; 文献 [14-15] 分别用基于观测器的方法研究了二阶和高阶多智能体系统抑制外部扰动的一致性控制方法。

大部分关于多智能体系统一致性问题的研究都是基于无向图假设的, 这在实际中很可能并不满足, 显然无向通信拓扑只是有向通信拓扑的一部分特例. 通过文献 [12-13, 16] 可知: 有向图下 Laplacian 矩阵与对角阵相似, 从而多智能体闭环系统的某些特性可以等价于 N 或 $N-1$ 个子系统的相关特性; 而在一般有向图下, Laplacian 矩阵与约当阵相似, 当系统有外加干扰项时, 无法解耦, 所以很难得到低维度线性矩阵不等式 (LMI) 条件使系统达到 H_∞ 一致. 本文根据 Zhou 等 [17] 对一般通信拓扑条件下 Laplacian 矩阵性质的分析, 对其进行特定形式的分解, 通过变量代换将一致性问题转换为较低维度系统的稳定性问题, 把多智能体系统 H_∞ 一致性和满足一定暂态响应性能的 H_∞ 一致性控制器设计方法推广到一般通信拓扑条件下.

1 常用标记、图论及相关引理

1.1 常用标记

在本文中: 符号 $R^{n \times n}$ 和 $C^{n \times n}$ 分别表示 $n \times n$ 维的实矩阵和复矩阵; 对于任意 $\mu \in C$, 其实部表示为 $\text{Re}(\mu)$; I_n 表示 $n \times n$ 维的单位矩阵; $\|\cdot\|$ 表示诱导 2 范数; $\lambda(A)$ 表示方阵 A 的特征值, $\text{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩; $L_2[0, \infty)$ 表示在 $[0, \infty)$ 上的平方可积函数; $\max\{\lambda(A)\}$ 和 $\min\{\lambda(A)\}$ 分别表示矩阵 A 的最大和最小特征值; $A > B$ 和 $A \geq B$ 分别表示 $A - B$ 是正定和半正定的; $A \otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积.

1.2 图论知识

称 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 为一个有向图. 其中: $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为图的节点集; $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为图的边集合; $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{N \times N}$ 为图的具有非负元素 a_{ij} 的邻接矩阵, a_{ij} 为节点 v_i 与 v_j 之间的连接权重, $a_{ij} = 1$ 表示节点 v_i 可以接收到节点 v_j 的信息, 否则 $a_{ij} = 0$. 图中的 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{ij}) \in R^{N \times N}$ 定义为 $\mathcal{L}_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, $\mathcal{L}_{ij} = -a_{ij}$, $i \neq j$. 图 \mathcal{G} 中两个不同节点之间的路径是指由互不相同的边组成的有向序列. 如果存在一个节点 v_i , 从这个点出发沿着有向边可以到达图中的任意其他点, 则称图 \mathcal{G} 包含一个有向生成树 (spanning tree), 该节点称为根节点 (root).

1.3 相关引理

引理 1^[6] 图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 至少有一个零特征值, 其他非零特征值均具有正实部. 如果 \mathcal{G} 包

含一个有向生成树, 则零是 \mathcal{L} 的单特征值, 1_N 是其对应的右特征向量, 特征根满足

$$0 = \lambda_1 < \text{Re}(\lambda_2(\mathcal{L})) \leq \dots \leq \text{Re}(\lambda_N(\mathcal{L})).$$

引理 2^[17] 如果矩阵 $A = [A_{ij}] \in R^{N \times N}$ 的行和均为零, 即 $A1_N = 0$, 则存在一个矩阵 $B \in R^{N \times N-1}$ 使得 $A = BE$. 其中: $E \in R^{N-1 \times N}$ 为一个行满秩矩阵, 其定义如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

特别地, 如果 0 是 A 的单特征根, 则 B 是列满秩的, 并且 EB 的特征根是 BE 的非零特征根.

引理 3^[18] 如果矩阵 A 的所有特征根均包含正的实部, 则存在一个正定矩阵 $B > 0$, 满足

$$A^T B + BA > 0.$$

2 有向图下考虑暂态响应的 H_∞ 一致性控制

2.1 问题描述

考虑一个由 N 个具有外部扰动的多智能体组成的多智能体系统, 智能体的系统模型描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i + D\omega_i, \\ y_i &= Cx_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x_i \in R^n$, $u_i \in R^p$, $y_i \in R^q$, $\omega_i \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ 分别为第 i 个智能体的系统状态、控制输入、控制输出和外部扰动; A 、 B 、 C 和 D 为具有相容维数的常数系统矩阵.

为了达成一致, 基于局部邻居相对状态信息构建如下分布式一致性控制器:

$$u_i = cK \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

其中: $K \in R^{p \times n}$ 为待设计的反馈控制矩阵, c 为待设计的耦合强度参数.

当存在外部扰动时, 多智能体系统往往难以达成一致. 因此, 本文的目的是设计合适的一致性控制器, 使得智能体系统在不存在外部扰动时能够达成一致, 存在外部扰动时, 能够对外部扰动具有良好的抑制能力, 并满足一定的暂态性能指标. 为此, 定义如下的一致性性能变量:

$$z_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C(x_i - x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

其中 $C \in R^{q \times n}$ 为给定的常数矩阵.

由式 (1)~(3) 可得如下多智能体系统的闭环系

统方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (I_N \otimes A - c\mathcal{L} \otimes BK)x + (I_N \otimes D)\omega, \\ z &= (H \otimes C)x. \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T, \omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, \dots, \omega_N^T]^T, \\ z = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_N^T]^T,$$

$$H = I_N - \frac{1}{N}1_N1_N^T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 1 - \frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & 1 - \frac{1}{N} \end{bmatrix},$$

$\mathcal{L} \in R^{N \times N}$ 为图的 Laplacian 矩阵.

可以看出, 0 为矩阵 H 的单特征值, 1_N 为其对应的特征向量, 1 为矩阵 H 代数重数为 $N - 1$ 的特征值.

对于系统 (4), 考虑暂态性能的 H_∞ 一致性指标定义为^[19]

$$\gamma_w = \sup_{\|\omega\|^2 + x(0)^T \tilde{R}x(0) \neq 0} \frac{\|z\|}{(\|\omega\|^2 + x(0)^T \tilde{R}x(0))^{1/2}}.$$

其中: $\tilde{R} = I_N \otimes R, R = R^T > 0$ 为给定的权值矩阵.

对于给定的限定参数 $\gamma > 0$, 若满足以下条件^[12]:

- ① 当 $\omega_i = 0$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, N$; ② 当 $\omega_i \neq 0$ 时, $\gamma_w < \gamma$. 则控制器 (2) 解决了系统 (4) 满足暂态响应性能的 H_∞ 一致性控制.

由文献 [12] 可以得到, 系统 (4) 的 H_∞ 一致性指标为

$$\gamma_\infty = \sup_{\|\omega\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|\omega\|}.$$

由此可知, 在 0 初始条件下, $\gamma_w = \gamma_\infty$.

考虑系统 (4) 的一致性问題, 令 $\xi_i = x_i - x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N - 1$, 则有 $\xi = (E \otimes I_n)x$. 其中: $\xi = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_{N-1}^T]^T, E$ 定义同引理 2.

根据引理 2 可以得到, 存在列满秩矩阵 M 和 W , 使得 $\mathcal{L} = ME, H = WE$, 其中 E 定义同上文.

对闭环系统方程 (4) 进行适当的变量代换, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (I_{N-1} \otimes A - cEM \otimes BK)\xi + (E \otimes D)\omega, \\ z &= (W \otimes C)\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

由 ξ 的定义可知, 当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_N$ 时, $\xi = 0$. 因此, 如果等价闭环系统 (5) 在零点稳定且满足条件 ②, 则控制器 (2) 可解决系统 (1) 满足暂态响应性能的 H_∞ 一致性控制.

2.2 分布式控制器设计

假设系统通信拓扑包含有向生成树, 其 Laplacian 矩阵为 \mathcal{L} , 那么考虑暂态响应性能的 H_∞ 一致性控制器 (2) 可以设计如下:

算法 1 ① 给定矩阵 $M = \mathcal{L}E^T(EE^T)^{-1}$ 和一个小于矩阵 \mathcal{L} 所有非零特征根实部两倍的正数 α , 求解如下 LMI, 得到一个可行解 $Q > 0$:

$$(EM)^T Q + QEM > \alpha Q. \quad (6)$$

② 对于给定的限定参数 γ , 求解下列两个 LMI, 得到可行的正定矩阵 P 和正数 c :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - c\alpha P B B^T P & C^T & P D \\ C & -\frac{\eta}{\beta} I_q & 0 \\ D^T P & 0 & -\frac{\gamma^2}{\varphi\phi} I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$P < \frac{\gamma^2}{\phi\varphi} R. \quad (8)$$

其中: $\beta = \max\{\lambda(W^T W)\}, W = HE^T(EE^T)^{-1}; \varphi = \max\{\lambda(Q)\}; \phi = \max\{\lambda(EE^T)\}; \eta = \min\{\lambda(Q)\}$.

③ 设计反馈矩阵 $K = B^T P$, 耦合强度参数取 ② 中 c .

定理 1 假设系统通信拓扑包含有向生成树, 且对于给定的限定参数 $\gamma > 0, P > 0, c > 0$, 线性矩阵不等式 (7) 和 (8) 成立, 那么依据算法 1 设计得到的控制器就能使系统在满足暂态性能指标情况下达到 H_∞ 一致.

证明 首先对式 (6) 求解的可行性进行说明. 由引理 2 可知, EM 的特征根等于矩阵 \mathcal{L} 的非零特征根, 又根据引理 1, EM 特征根均具有正的实部, 即有 $\text{Re}(\lambda(EM)) > 0$. 进一步有 $\text{Re}\left(\lambda\left(EM - \frac{1}{2}\alpha I\right)\right) > 0$, 其中 $0 < \alpha < 2 \min\{\text{Re}(\lambda(EM))\}$, 即 α 为小于矩阵 \mathcal{L} 所有非零特征根实部两倍的正数. 进一步, 根据引理 3, 存在正定矩阵 $Q > 0$, 满足

$$\left(EM - \frac{1}{2}\alpha I\right)^T Q + Q\left(EM - \frac{1}{2}\alpha I\right) > 0.$$

变换后可以得到式 (6), 所以式 (6) 必然可解.

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V = \xi^T(Q \otimes P)\xi,$$

其中 Q 和 P 分别为矩阵不等式 (6) ~ (8) 的可行解.

上述 Lyapunov 函数沿着系统 (5) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\xi^T(I_{N-1} \otimes A - cEM \otimes BK)^T(Q \otimes P)\xi + \\ & 2\omega^T(E^T Q \otimes D^T P)\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

将 $K = B^T P$ 代入式 (9), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \xi^T(Q \otimes (A^T P + PA))\xi - \\ & \xi^T(c((EM)^T Q + QEM) \otimes PBB^T P)\xi + \\ & 2\omega^T(E^T Q \otimes D^T P)\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

根据式(6),有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \xi^T(Q \otimes (A^T P + PA - c\alpha PBB^T P))\xi + \\ & 2\omega^T(E^T Q \otimes D^T P)\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

根据 Schur 补引理, 当且仅当

$$\begin{aligned} A^T P + PA - c\alpha PBB^T P + \frac{\beta}{\eta} C^T C + \\ \frac{\phi\varphi}{\gamma^2} PDD^T P < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

时, 式(7)成立, 式(12)成立显然有

$$A^T P + PA - c\alpha PBB^T P < 0, \quad (13)$$

则当 $\omega_i = 0$ 时, 有 $\dot{V} < 0$.

由式(5)中的 z 可以得到

$$\begin{aligned} z^T z = & \xi^T(W^T W \otimes C^T C)\xi \leq \\ & \beta \xi^T(I \otimes C^T C)\xi \leq \frac{\beta}{\eta} \xi^T(Q \otimes C^T C)\xi, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 β, η 定义如前文.

当 $\omega_i \neq 0$ 时, 对 \dot{V} 进行适当缩放, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \xi^T(Q \otimes (A^T P + PA - c\alpha PBB^T P))\xi + \\ & 2\omega^T(E^T Q \otimes D^T P)\xi + \frac{\beta}{\eta} \xi^T(Q \otimes C^T C)\xi - \\ & z^T z + \gamma^2 \omega^T \omega - \gamma^2 \omega^T \omega = \\ & \begin{bmatrix} \xi \\ \omega \end{bmatrix}^T \Theta \begin{bmatrix} \xi \\ \omega \end{bmatrix} - z^T z + \gamma^2 \omega^T \omega, \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta = & \begin{bmatrix} Q \otimes \left(A^T P + PA - c\alpha PBB^T P + \frac{\beta}{\eta} C^T C \right) & \rightarrow \\ E^T Q \otimes D^T P & \\ \leftarrow \begin{matrix} QE \otimes PD \\ -\gamma^2(I_{N-1} \otimes I_n) \end{matrix} & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据 Schur 补引理可知, 当且仅当

$$\begin{aligned} Q \otimes \left(A^T P + PA - c\alpha PBB^T P + \frac{\beta}{\eta} C^T C \right) + \\ \frac{1}{\gamma^2} QEE^T Q \otimes PDD^T P < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

时, $\Theta < 0$.

因为 $QEE^T < \phi\varphi I_{N-1}$ 且 $Q > 0$, 根据式(12)可知式(16)成立, 所以根据式(14), 有

$$z^T z < \gamma^2 \omega^T \omega - \dot{V}. \quad (17)$$

对式(17)两边同时积分可得

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \|\omega\|_2^2 + V(0) =$$

$$\gamma^2 \|\omega\|_2^2 + x(0)^T(E^T QE \otimes P)x(0).$$

对于此式, 考虑零初始条件, 有

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \|\omega\|_2^2,$$

即有 $\gamma_\infty < \gamma$, 称系统实现了具有一定抗干扰能力的 H_∞ 一致性.

当初始状态不为零时, 根据式(8)和 $E^T QE < \phi\varphi I_N$, 有

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2(\|\omega\|_2^2 + x(0)^T \tilde{R}x(0)), \quad (18)$$

即有 $\gamma_w < \gamma$, 系统能够在满足一定暂态性能指标下达到 H_∞ 一致. \square

注1 本文研究内容的部分概念与文献[12]相似, 但是本文方法适用于更为普通的通信拓扑结构, 即有向图. 在一般有向拓扑图下, 系统 Laplacian 矩阵一般为非对称阵, 其相似于约当阵, 在有外部干扰项的情况下无法对多智能体闭环系统进行解耦分析. 本文通过变量代换, 将原系统的一致性问题的降维系统的稳定性问题, 从而可以利用 Lyapunov 稳定理论求解, 最终得到的 LMI 条件与文献[12]中维度一致. 事实上, 无向图只是有向图的特例, 所以本文方法更具有普遍性和实用性.

注2 文献[14-15]研究了有向图下多智能体抗干扰一致性, 但是这两篇文章中都假设了已知干扰项的动态模型, 通过建立观测器, 增加状态量, 将抗干扰一致性问题转化为自治系统的稳定性问题, 根据 Laplacian 矩阵与约当阵相似的性质, 可以解耦处理, 得到相应的结论. 本文中扰动项随时间消失, 但是扰动的存在是随机的, 在转化成稳定性问题时, 由于扰动附加项的存在无法直接解耦, 采用本文方法解决了无向图下存在短时有界噪声的多智能体一致性问题. 而对于此类噪声, 在实际中也是有意义的, 比如多无人机编队飞行中阵风的影响.

3 仿真与分析

这里考虑空间二维运动的无人机二阶运动模型^[8], 假定多无人机飞行在不同高度, 不会发生碰撞. 第 i 个飞行器模型表述如下:

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \\ x_{i4} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = I_4,$$

$$\omega_i(t) = [0 \ 1.6\bar{\omega}(t) \ 0 \ 1.2\bar{\omega}(t)]^T \times r.$$

其中

$$\bar{\omega}(t) = \begin{cases} 2, & 4 \leq t \leq 5; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

r 服从 $(0, 1)$ 上均匀分布, x_{i1} 、 x_{i2} 、 x_{i3} 和 x_{i4} 可以理解为第 i 个无人机的东向位置、东向速度、北向位置、北向速度, $\omega(t)$ 可以理解为阵风影响。

多智能体系统共包含 4 个无人机, 初始状态为

$$x_1 = [-3 \ 2 \ 4 \ -1]^T, x_2 = [5 \ -2 \ 5 \ 3]^T,$$

$$x_3 = [-7 \ 0 \ 10 \ 1]^T, x_4 = [3 \ -3 \ -5 \ 2]^T.$$

通信拓扑如图 1 所示。

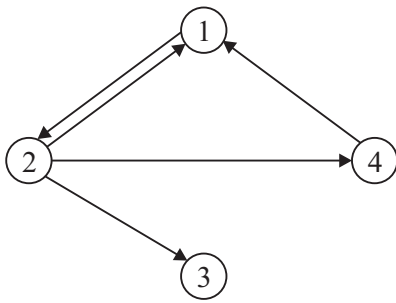


图 1 通信拓扑

显然该拓扑图包含一个有向生成树, 其 Laplacian 矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

\mathcal{L} 的非零特征值实部最小为 1, 因此可以取 $\alpha = 1.9$ 。

在本例中, 设定 H_∞ 限定参数 $\gamma = 3, R = 4I_4$. 取 $c = 5$, 根据算法 1 求取可行解 Q 和 P , 得到 H_∞ 反馈矩阵和满足暂态响应性能的 H_∞ 反馈矩阵分别为

$$K_\infty = \begin{bmatrix} 0.4397 & 0.3704 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4397 & 0.3704 \end{bmatrix},$$

$$K'_\infty = \begin{bmatrix} 1.2315 & 1.0993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2315 & 1.0993 \end{bmatrix}.$$

在两种控制律下, 4 个无人机东向位置和速度从初始状态趋向于一致的过程如图 2~图 5 所示。

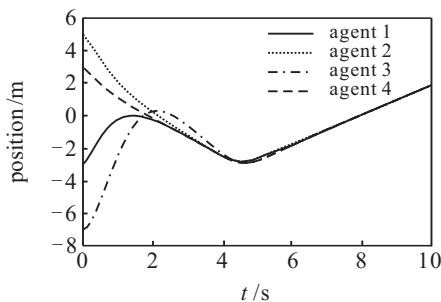


图 2 H_∞ 控制律下多无人机东向位置

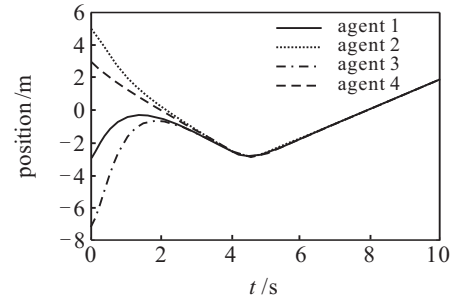


图 3 考虑暂态响应的 H_∞ 控制律下多无人机东向位置

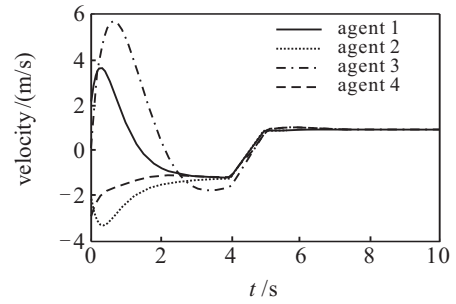


图 4 H_∞ 控制律下多无人机东向速度

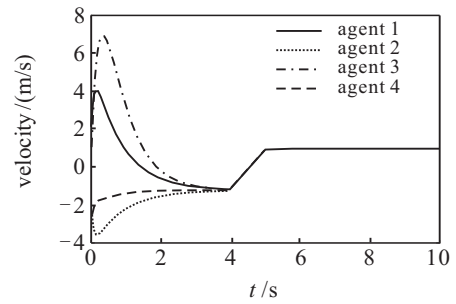


图 5 考虑暂态响应的 H_∞ 控制律下多无人机东向速度

北向位置和速度具有相似运动趋势, 这里省略。从图中可以看出: 对于短时有界扰动, 两种控制器都能使 4 个无人机位置和速度趋向于一致, 但是控制品质存在差异。在 4s 时, 即外部扰动出现的时刻, 考虑暂态响应的 H_∞ 控制器已经使多智能体系统达成一致, 但是通常的 H_∞ 控制器作用的多智能系统不管是速度还是位置都明显存在差异。在扰动出现的 4~5s 内, 考虑暂态响应的 H_∞ 控制器仍然使多智能体基本保持一致, 而通常的 H_∞ 控制器则在扰动消失 2s 后才使多智能体状态趋向一致。对于单个智能体, 考虑暂态响应的 H_∞ 控制器使各智能体快速平滑地趋向于一致状态, 而通常的 H_∞ 控制器作用下的第 3 个智能体在趋向于一致的过程中出现了明显的震荡。所以, 本文提出的考虑暂态响应的 H_∞ 控制器设计方法不但可以解决有向图下存在短时有界扰动多智能体系统的 H_∞ 一致性问题, 而且能够提高暂态性能。

4 结 论

本文通过对一般通信拓扑条件下 Laplacian 矩阵进行特定形式的分解和变量代换, 将多智能体系统的 H_∞ 一致性问题转化成了较低维度系统的 H_∞ 控

制问题, 通过构建合适的 Lyapunov 函数, 给出并证明了多智能系统在受到外部短时有界干扰时, 达到 H_∞ 一致性, 并且满足一定暂态性能指标的 LMI 条件. 仿真结果验证了本文方法的有效性. 相比于已有工作和结论, 本文的主要创新点在于, 对多智能体系统各个体间通信拓扑条件要求的降低, 使其在有向通信拓扑条件下受到外部短时有界干扰时, 能够达到一致性, 并且提高暂态性能, 具有实用性.

参考文献(References)

- [1] Dong Y, Huang J. Flocking with connectivity preservation of multiple double integrator systems subject to external disturbances by a distributed control law[J]. *Automatica*, 2015, 55: 197-203.
- [2] Dong Y, Huang J. Leader-following connectivity preservation rendezvous of multiple double integrator systems based on position measurement only[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2598-2603.
- [3] Wu Z, Guan Z, Wu X, et al. Consensus based formation control and trajectory tracing of multi-agent robot systems[J]. *J of Intelligent and Robotic Systems*, 2007, 48(3): 397-410.
- [4] Ma Z, Liu Z, Chen Z. Distributed formation control for a multi-agent system with dynamic role assignment[C]. *Proc of the 34th Chinese Control Conf*. Hangzhou: IEEE Press, 2015: 7118-7123.
- [5] Jadbabaie A, Lin J. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988-1001.
- [6] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [7] Mei J, Ren W, Ma G. Distributed coordination for second-order multi-agent systems with nonlinear dynamics using only relative position measurements[J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1419-1427.
- [8] Dong X, Yu B, Shi Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: Theories and applications[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2015, 23(1): 340-348.
- [9] Li Z, Duan Z, Chen G, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2010, 57(1): 213-224.
- [10] Ma C, Zhang J. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(5): 1263-1268.
- [11] Li Z, Duan Z, Chen G. On H_∞ and H_2 performance regions of multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 797-803.
- [12] Wang J, Duan Z, Zhao Y, et al. H_∞ and H_2 control of multi-agent systems with transient performance improvement[J]. *Int J of Control*, 2013, 86(12): 2131-2145.
- [13] Wang J, Duan Z, Li Z, et al. Distributed H_∞ and H_2 consensus control in directed networks[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 8(3): 193-201.
- [14] Zhang X, Liu X. Further results on consensus of second-order multi-agent systems with exogenous disturbance[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, 60(12): 3215-3226.
- [15] Ding Z. Consensus disturbance rejection with disturbance observers[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2015, 62(9): 5829-5837.
- [16] Wang J, Duan Z, Wen G, et al. Distributed robust control of uncertain linear multi-agent systems[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(13): 2162-2179.
- [17] Zhou S, Liu W, Wu Q, et al. Leaderless consensus of linear multi-agent systems: matrix decomposition approach[C]. *Proc of the 7th Int Conf on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*. Hangzhou: IEEE Press, 2015: 327-331.
- [18] Cben C T. *Linear system theory and design*[Z]. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.
- [19] Balandin D V, Kogan M M. LMI-based H_∞ -optimal control with transients[J]. *Int J of Control*, 2010, 83(8): 1664-1673.

(责任编辑: 闫 妍)