

## 带宽受限下的基于一致性的分布式融合估计器

卢建华<sup>1</sup>, 韩旭<sup>1</sup>, 李冀鑫<sup>2</sup>

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东烟台 264001; 2. 海军航空兵学院 飞行理论系, 辽宁葫芦岛 125001)

**摘要:** 研究带宽受限下的基于一致性的分布式融合估计问题. 建立以一致性滤波增益为决策变量, 以所有传感器有限时域下融合估计误差协方差矩阵的迹的和为代价函数的优化问题. 在给定一致性权重的前提下, 给出使得系统融合估计误差在无噪声时渐近稳定的一致性滤波增益存在的充分条件, 并通过最小化代价函数的上界得到一组最优的一致性滤波增益. 最后通过算例仿真验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 一致性滤波; 带宽受限; 融合节点; 渐近稳定; 代价函数

中图分类号: TJ765.2

文献标志码: A

## Consensus-based distributed fusion estimator with communication bandwidth constraints

LU Jian-hua<sup>1</sup>, HAN Xu<sup>1</sup>, LI Ji-xin<sup>2</sup>

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China;

2. Department of Flight Theory, Naval Aviation Institute, Huludao 125001, China. Correspondent: HAN Xu, E-mail: hxyy713@163.com)

**Abstract:** The consensus-based distributed fusion estimation problem with communication bandwidth constraints is investigated. An optimization problem which sets the consensus filter gains and the sum of the traces of all sensors' finite horizon estimation error covariance matrices to be the decision variables and the cost function, respectively, is established. For given consensus weights, sufficient conditions for the existence of the consensus filter gains which makes the dynamics of the estimation errors without noise asymptotically stable are given. Then, a set of sub-optimal consensus filter gains are computed by minimizing an upper bound of the cost function. Finally, simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** consensus filter; communication bandwidth constraints; fusion node; asymptotically stable; cost function

### 0 引言

无线网络化多传感器分布式融合估计<sup>[1-3]</sup>已广泛应用于工业控制、环境监测、远程医疗等领域. 基于一致性方法的分布式融合估计方法以其融合估计精度高、收敛速度快的优点得到了广泛的关注和研究<sup>[4-6]</sup>. 网络中每个传感器都可以作为融合节点, 并根据网络的拓扑结构与邻近的可通讯传感器进行信息传递与交换<sup>[7-9]</sup>. 文献[10]考虑数据包丢失的情况下基于一致性的分布式滤波方法, 研究了丢包率对滤波精度的影响. 文献[11]通过研究一致性矩阵、单位采样时间内的信息交换量和卡尔曼增益三者之间的联系, 得出当单位采样时间内的信息交换量小于某个量

时, 使一致性矩阵和增益最优并不能保证最优的滤波结果. 文献[12-13]均提出了一种有限时域下基于一致性方法的分布式滤波方法, 不同的是, 文献[12]研究的是系统噪声和量测噪声统计特性未知的情况, 文献[13]则在文献[12]的基础上, 增加了系统参数存在随机扰动且系统方程存在非线性的情况. 文献[14]在一致性权重已知的前提下, 通过设计一致性滤波增益, 给出了系统融合估计误差渐近稳定的充分条件.

以上文献均假设通信网络的带宽是足够的, 而在实际的无线传感器网络应用中, 通信带宽往往是受限的. 文献[15-16]利用量化的方法, 将被传输的数据编码成少数字节传输到融合中心, 大大减轻了带宽的负

收稿日期: 2015-11-30; 修回日期: 2016-03-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473306).

作者简介: 卢建华(1970—), 男, 副教授, 从事控制与导航等研究; 韩旭(1990—), 男, 博士生, 从事飞行器综合导航技术的研究.

担. 文献 [17-18] 提出了一种无结构压缩策略, 将测量信号各分量加权求和后实现降维. 文献 [19] 利用一种对角矩阵实现降维, 避免了传感器之间的交联. 类似于文献 [19] 的降维思想, 文献 [20] 提出了一种直接选取传输分量的方法, 并利用遍历搜索得到最优传输策略.

本文提出一种带宽受限下的基于一致性的分布式融合估计方法. 在一致性滤波框架下, 每个传感器作为分布式融合节点, 分两步完成融合估计. 每个传感器节点采用直接选取待传输信号的部分分量传输到融合节点的降维策略. 建立以一致性滤波增益为决策变量, 以所有传感器有限域下融合估计误差协方差矩阵的迹的和为代价函数的优化问题. 在给定一致性权重的前提下, 给出使得系统融合估计误差在无噪声时渐近稳定的一致性滤波增益存在的充分条件. 考虑到求取最优的一致性滤波增益的解析形式是极困难的, 利用矩阵不等式理论, 通过最小化代价函数的上界, 得到一组次优的一致性滤波增益. 最后通过算例仿真验证了所提出方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下离散不确定性时变系统:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k), \quad (1)$$

$$y_i(k) = C_i(k)x(k) + v_i(k), \quad (2)$$

$$1 \leq i \leq N.$$

其中:  $x(k) \in R^n$  和  $y_i(k) \in R^{m_i}$  分别为系统状态和第  $i$  个传感器的测量输出;  $A(k) \in R^{n \times n}$ ,  $C_i(k) \in R^{m_i \times n}$ ;  $w(k) \in R^n$  和  $v_i(k) \in R^{m_i}$  为零均值互不相关的高斯白噪声, 且满足

$$\begin{cases} E\{w(k)w^T(k_1)\} = W\delta_{kk_1}, \\ E\{v_i(k)w^T(k_1)\} = 0, \\ E\{v_i(k)v_j^T(k_1)\} = V_i\delta_{ij}\delta_{kk_1}. \end{cases} \quad (3)$$

$W > 0$ ,  $V_i > 0$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 且有界. 假设系统初值为  $x(0) = x_0$ ,  $x_0$  服从期望为  $\mu_0$ 、方差矩阵为  $\Sigma_0$  的高斯分布, 并与  $w(k)$ 、 $v_i(k)$  互不相关.

$N$  个传感器根据设定的拓扑结构进行通信, 每个传感器均可视为分布式融合节点, 第  $i$  个传感器分两步计算出融合估计值  $\hat{x}_i(k)$ .

**Step 1:** 每个传感器节点利用 Luenberger 型状态估计器产生一个中介状态估计值, 记为  $\lambda_j(k) \in R^n$ , 状态估计器形式为

$$\lambda_j(k) = A(k)\hat{x}_j(k) + L_j(k)(y_j(k) - C_j(k)\hat{x}_j(k)). \quad (4)$$

**Step 2:** 由于带宽的限制, 直接选取各传感器的

中介状态估计值的部分分量到融合节点  $i$ , 分量的选择用分量选择矩阵表示. 具体可描述为, 在  $k$  时刻, 传感器节点  $j$  的中介状态估计  $\lambda_j(k)$  只能被允许传输  $t_{ji}(k)$  ( $1 \leq t_{ji}(k) \leq n$ ,  $i \neq j$ ) 个分量到融合节点  $i$ , 未被传输的分量在融合节点得到补偿, 称为补偿中介状态估计, 记为  $\lambda_{ji}^c(k)$ . 将每个融合节点  $i$  处的受限建模为

$$\sum_{j=1}^N t_{ji}(k) = t_i,$$

$$t_i \in N^+, i = 1, 2, \dots, N, i \neq j.$$

设  $T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k)$  为被传输的  $t_{ji}(k)$  个分量的选择矩阵, 其中

$$\sigma_{ji} \in \{1, 2, \dots, \Delta_{ji}\},$$

$$\Delta_{ji} \triangleq C_n^{t_{ji}(k)} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-t_{ji}(k)+1)}{t_{ji}(k)(t_{ji}(k)-1)(t_{ji}(k)-2)\cdots 1}.$$

显然,  $T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k)$  为包含  $t_{ji}(k)$  个对角元素 1 和  $n - t_{ji}(k)$  个对角元素 0 的对角矩阵, 且有

$$T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k) \in \{T_1^{j_i}(k), \dots, T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k), \dots, T_{\Delta_{ji}^i}^{j_i}(k)\},$$

并假设

$$T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k) = T_{\sigma_{ij}^j}^{i_j}(k). \quad (5)$$

当  $i = j$  时,  $T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k) = I$ ,  $I$  为单位矩阵. 为了表示和计算的方便, 后文用  $T_{ji}(k)$  代替  $T_{\sigma_{ji}^i}^{j_i}(k)$ . 设计  $\lambda_{ji}^c(k)$  的计算公式为

$$\lambda_{ji}^c(k) = T_{ji}(k)\lambda_j(k) + (I - T_{ji}(k))A(k)\hat{x}_i(k). \quad (6)$$

式 (6) 表明, 没有被传输到融合节点的  $\lambda_j(k)$  的  $n - t_{ji}(k)$  个分量, 由前一时刻的分布式融合估计值的一步预测值代替. 将到达融合节点  $i$  的  $n$  个补偿中介状态估计按照给定的一致性权重进行加权融合, 得到一致性分布式融合估计值为

$$\hat{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^N p_{ij}(k)\lambda_{ji}^c(k). \quad (7)$$

其中:  $p_{ij}(k) = p_{ji}(k) \geq 0$  为一致性权重, 且满足  $\sum_{j=1}^N p_{ij}(k) = 1$ ,  $p_{ij}(k) = 0$  表示传感器节点  $i$  和传感器节点  $j$  之间没有通信.

以上即为融合节点  $i$  的一致性分布式融合估计的两步计算过程, 并且容易证明, 当  $E\{x(0)\} = E\{\hat{x}_i(0)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 成立时, 所设计的  $\lambda_{ji}^c(k)$  是  $x(k)$  的无偏估计, 即满足

$$E\{\lambda_{ji}^c(k)\} = E\{x(k)\}. \quad (8)$$

将式 (5) 代入 (6), 得到

$$\hat{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^N p_{ij}(k)[T_{ji}(k)\lambda_j(k) + (I - T_{ji}(k))A(k)\hat{x}_i(k)]. \quad (9)$$

注意到, 一致性分布式结构中, 每个节点都可以作为周围可通信传感器的融合中心, 这与传统的分布式结构中只有唯一的融合中心节点是不同的.

**注 1** 出于书写方便和便于阅读, 将下文中不会引起误会和不会影响阅读性的时间标志忽略, 如将  $T_{ji}(k)$  简化为  $T_{ji}$ ,  $A(k)$  简化为  $A$  等.

设  $e_i(k)$  为融合节点  $i$  的一致性分布式融合估计误差, 即

$$e_i(k) \triangleq x(k) - \hat{x}_i(k). \quad (10)$$

令  $\bar{T}_{ji} = I - T_{ji}$ , 结合式 (4)、(8) 和 (9), 得到

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & - \sum_{j=1}^N p_{ij} \{ T_{ji} [ A \hat{x}_j(k) + L_j (y_i(k) - C_j \hat{x}_j(k)) ] + \\ & \bar{T}_{ji} A \hat{x}_i(k) \} + Ax(k) + w(k). \end{aligned} \quad (11)$$

由  $\bar{T}_{ji} = I - T_{ji}$  可得

$$Ax(k) = T_{ji} Ax(k) + \bar{T}_{ji} Ax(k). \quad (12)$$

结合式 (2)、(10) 和 (11) 可得

$$\begin{aligned} e_i(k+1) = & \sum_{j=1}^N p_{ij} [ T_{ji} (A - L_j C_j) e_j(k) - \\ & T_{ji} L_j v_j(k) + \bar{T}_{ji} A e_i(k) + w(k) ], \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

出于对整个传感器网络系统总体一致性融合估计性能的考虑, 建立有限时域下融合估计代价函数

$$J_K(L(K)) = \sum_{k=0}^K \sum_{i=1}^N E[ \| e_i(k) \|^2 ], \quad (14)$$

其中  $L(K) \triangleq \{ L_i(k), k = 0, 1, \dots, K-1 \}_{i=1}^N$  表示决策变量, 即在给定一致性权重  $p(k) \triangleq \{ p_{ij}(k) \}_{i,j=1}^N$  和分量选择矩阵  $T(k) \triangleq \{ T_{ji}(k) \}_{i,j=1}^N$  时, 通过设计一致性增益  $L(K)$ , 使系统达到所期望的融合估计性能指标.

## 2 次优的局部估计器增益设计

### 2.1 融合估计误差渐近稳定充分条件

**引理 1**<sup>[14]</sup> 对于正整数  $N$ 、正定矩阵  $R$ , 矢量组  $\{x_i\}_{i=1}^N$ 、非负标量组  $\{p_i\}_{i=1}^N$  和  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ , 有如下不等式成立:

$$\left( \sum_{i=1}^N p_i x_i \right)^T R \left( \sum_{i=1}^N p_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^N p_i x_i^T R x_i. \quad (15)$$

**引理 2**<sup>[14]</sup> 对于任意正整数  $N$ 、矩阵组  $\{B_i\}_{i=1}^N$ , 矢量组  $\{x_i\}_{i=1}^N$ 、非负标量组  $\{p_i\}_{i=1}^N$  和  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ , 有如下不等式成立:

$$\left( \sum_{i=1}^N p_i B_i x_i \right) \left( \sum_{i=1}^N p_i B_i x_i \right)^T \leq \sum_{i=1}^N p_i B_i x_i x_i^T B_i^T. \quad (16)$$

**引理 3**<sup>[21]</sup> 对于任意正整数  $\mu$ 、正定对称矩阵  $P$ 、矢量  $x$  和  $y$ , 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} 2x^T P y & \leq \frac{1}{\mu} x^T P x + \mu y^T P y, \\ x, y & \in R^n. \end{aligned} \quad (17)$$

通过定理 1 给出融合估计误差在无噪声时渐近稳定的充分条件.

**定理 1** 对于给定的一组一致性权重

$$p(k) \triangleq \{ p_{ij}(k) \}_{i,j=1}^N,$$

分量选择矩阵

$$T(k) \triangleq \{ T_{ji}(k) \}_{i,j=1}^N,$$

在任一时刻  $k$ , 如果存在一致性增益组  $\{L_i(k)\}_{i=1}^N$ 、正定对称矩阵组  $\{Q_i\}_{i=1}^N$  和正定矩阵组  $\{S_i\}_{i=1}^N$ , 使得

$$\begin{aligned} Q_i = & \sum_{j=1}^N 2p_{ij} [(A - L_j C_j)^T T_{ji}^T Q_j T_{ji} (A - L_j C_j) + \\ & A^T \bar{T}_{ji}^T Q_i \bar{T}_{ji} A] + S_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (18)$$

成立, 则融合估计误差在无噪声时是渐近稳定的, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0.$$

**证明** 无噪声时的动态融合估计误差方程为

$$\begin{aligned} e_i(k+1) = & \sum_{j=1}^N p_{ij} [ T_{ji} (A - L_j C_j) e_j(k) + \bar{T}_{ji} A e_i(k) ], \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

为证明式 (19) 是渐近稳定的, 定义 Lyapunov 函数

$$V(k) = \sum_{i=1}^N e_i(k)^T Q_i e_i(k). \quad (20)$$

结合式 (19) 和 (20) 可得

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) = & \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N p_{ij} [ T_{ji} (A - L_j C_j) e_j(k) + \bar{T}_{ji} A e_i(k) ] \right\}^T \times \end{aligned}$$

$$Q_i \left\{ \sum_{j=1}^N p_{ij} [T_{ji}(A - L_j C_j) e_j(k) + \bar{T}_{ji} A e_i(k)] \right\} - \sum_{i=1}^N e_i(k)^T Q_i e_i(k). \quad (21)$$

由引理 1 和引理 3 可得

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N p_{ij} [T_{ji}(A - L_j C_j) e_j(k) + \bar{T}_{ji} A e_i(k)] \right\}^T \times \\ &Q_i [T_{ji}(A - L_j C_j) e_j(k) + \bar{T}_{ji} A e_i(k)] - \sum_{i=1}^N e_i(k)^T Q_i e_i(k) \leq \\ &2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} \{ [T_{ji}(A - L_j C_j) e_j(k)]^T Q_i \times \\ &[T_{ji}(A - L_j C_j) e_j(k) + (\bar{T}_{ji} A e_i(k))^T \times \\ &Q_i (\bar{T}_{ji} A e_i(k))] \} - \sum_{i=1}^N e_i(k)^T Q_i e_i(k). \end{aligned} \quad (22)$$

通过交换求和顺序, 式 (22) 等价于

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &\leq 2 \sum_{i=1}^N e_i(k)^T \left\{ \sum_{j=1}^N p_{ij} [T_{ji}(A - L_j C_j)]^T \times \right. \\ &Q_j [T_{ji}(A - L_j C_j)] + (\bar{T}_{ji} A)^T Q_i (\bar{T}_{ji} A) \left. \right\} e_i(k) - \sum_{i=1}^N e_i(k)^T Q_i e_i(k). \end{aligned} \quad (23)$$

进一步合并式 (23), 可得

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &\leq \sum_{i=1}^N e_i(k)^T \left\{ 2 \sum_{j=1}^N p_{ij} \left\{ [T_{ji}(A - L_j C_j)]^T Q_j \times \right. \right. \\ &[T_{ji}(A - L_j C_j)] + (\bar{T}_{ji} A)^T Q_i (\bar{T}_{ji} A) \left. \right\} - Q_i \left. \right\} e_i(k). \end{aligned} \quad (24)$$

令

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^N p_{ij} \{ [T_{ji}(A - L_j C_j)]^T Q_j [T_{ji}(A - L_j C_j)] + \\ (\bar{T}_{ji} A)^T Q_i (\bar{T}_{ji} A) \} - Q_i = -S_i, \end{aligned}$$

可以得到式 (18).

由  $\{S_i\}_{i=1}^N$  为正定矩阵组, 可得

$$V(k+1) - V(k) < 0. \quad (25)$$

由此得到式 (19) 是渐近稳定的.  $\square$

若证明充分条件是存在的, 即满足式 (18) 的矩阵组  $\{L_i(k)\}_{i=1}^N$  和  $\{Q_i\}_{i=1}^N$  是存在的, 则直接求解式 (18) 较为困难, 因此利用 Schur 补引理<sup>[22]</sup>, 将式 (18) 转化成由线性矩阵不等式表示的等价形式, 即证明线性

矩阵不等式可解性与式 (18) 的可解性是等价的.

在给出主要结论前, 首先定义如下算子:

$$\begin{cases} \text{diag}_n^i \{M_i\} \triangleq \text{diag} \{M_1, M_2, \dots, M_n\}, \\ \text{vec}_n^i \{M_i\} \triangleq [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n]. \end{cases}$$

**定理 2** 定义变量

$$\begin{cases} \Gamma_{12} = \text{vec}_n^j \{ \sqrt{2p_{ij}} A^T \bar{T}_{ji}^T X_i \}, \\ \Gamma_{13} = \text{vec}_n^j \{ \sqrt{2p_{ij}} (A^T T_{ji}^T X_j - C_j^T Y_j^T) \}, \\ \Gamma_{22} = \text{diag}_n \{X_j\}, \\ \Gamma_{33} = \text{diag}_n \{X_j\}. \end{cases}$$

对于对称正定矩阵组  $\{X_i\}_{i=1}^N$  和正定矩阵组  $\{Y_i\}_{i=1}^N$ , 当一致性增益矩阵组  $\{L_i(k)\}_{i=1}^N$  满足

$$L_i = T_{ji}^- X_i^{-1} Y_i$$

时, 以  $\{X_i\}_{i=1}^N$  和  $\{Y_i\}_{i=1}^N$  为自变量的线性矩阵不等式的可解性与式 (18) 的可解性是等价的. 其中:  $T_{ji}^-$  表示  $T_{ji}$  的广义逆, 线性矩阵不等式为

$$\begin{bmatrix} X_i & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} & 0 \\ \Gamma_{13}^T & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix} > 0. \quad (26)$$

**证明** 根据 Schur 补引理, 若使不等式 (26) 可解, 则只需存在对称正定矩阵组  $\{X_i\}_{i=1}^N$  和正定矩阵组  $\{Y_i\}_{i=1}^N$ , 使得如下不等式成立:

$$\begin{aligned} X_i - \sum_{j=1}^N 2p_{ij} [(X_j T_{ji} A - Y_j C_j)^T X_j^{-1} (X_j T_{ji} A - \\ Y_j C_j) + A^T \bar{T}_{ji}^T X_i \bar{T}_{ji} A] > 0, \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (27)$$

进一步将式 (27) 变形, 得到

$$\begin{aligned} X_i - \sum_{j=1}^N 2p_{ij} [(T_{ji} A - X_j^{-1} Y_j C_j)^T X_j (T_{ji} A - \\ - X_j^{-1} Y_j C_j) + A^T \bar{T}_{ji}^T X_i \bar{T}_{ji} A] > 0, \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (28)$$

由  $L_i = T_{ji}^- X_i^{-1} Y_i$ , 可将式 (28) 化简为

$$\begin{aligned} X_i - \sum_{j=1}^N 2p_{ij} [(A - L_j C_j)^T T_{ji}^T X_j T_{ji} (A - \\ L_j C_j) + A^T \bar{T}_{ji}^T X_i \bar{T}_{ji} A] > 0, \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (29)$$

由此可知, 存在正定矩阵组  $\{S_i\}_{i=1}^N$ , 使得

$$\begin{aligned} X_i - \sum_{j=1}^N 2p_{ij} [(A - L_j C_j)^T T_{ji}^T X_j T_{ji} (A - \\ L_j C_j) + A^T \bar{T}_{ji}^T X_i \bar{T}_{ji} A] = S_i, \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (30)$$

式 (30) 与 (18) 形式相同, 结论得证.  $\square$

### 2.2 次优的一致性分布式融合估计器

记  $\Sigma_i(k)$  为  $k$  时刻融合节点  $i$  的分布式融合估计误差协方差矩阵, 结合式 (13) 可得

$$\begin{aligned} \Sigma_i(k+1) &= \mathbb{E}\{e_i(k+1)e_i(k+1)^T\} = \\ &\mathbb{E}\left[\left\{\sum_{j=1}^N p_{ij}[T_{ji}(A-L_jC_j)e_j(k) - T_{ji}L_jv_j(k) + \right. \right. \\ &\left. \left. \bar{T}_{ji}Ae_i(k) + w(k)\right\}\left\{\sum_{j=1}^N p_{ij}[T_{ji}(A-L_jC_j)e_j(k) - \right. \right. \\ &\left. \left. T_{ji}L_jv_j(k) + \bar{T}_{ji}Ae_i(k) + w(k)\right\}^T\right], \\ &i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (31)$$

式 (14) 等价于

$$J_K(L(K)) = \sum_{k=0}^K \sum_{i=1}^N \text{tr}(\Sigma_i(k)). \quad (32)$$

由式 (31) 可知, 通过最小化式 (32) 中的代价函数求得最优的一致性滤波增益的解析形式是极困难的, 因此在保证一定融合估计性能的前提下, 通过最小化代价函数的上界, 可求取一组次优的一致性滤波增益  $L(K)$ .

**引理 4** 考虑如下离散差分方程:

$$\begin{aligned} M_i(k+1) &= \\ &\sum_{j=1}^N 2p_{ij}[T_{ji}(A-L_jC_j)M_j(k)(A-L_jC_j)^T T_{ji}^T + \\ &\bar{T}_{ji}AM_i(k)A^T \bar{T}_{ji}^T] + \sum_{j=1}^N p_{ij}T_{ji}L_jV_jL_j^T T_{ji}^T + W, \end{aligned} \quad (33)$$

且满足  $M_i(0) = \Sigma_i(0)$ , 对于任意  $i$  和  $k$ ,  $\Sigma_i(k) \leq M_i(k)$  恒成立.

**证明** 对式 (31) 应用引理 2, 可得

$$\begin{aligned} \Sigma_i(k+1) &\leq \\ &\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^N p_{ij}[T_{ji}(A-L_jC_j)e_j(k) + \bar{T}_{ji}Ae_i(k)] \times \right. \\ &\left. [T_{ji}(A-L_jC_j)e_j(k) + \bar{T}_{ji}Ae_i(k)]^T\right\} + \\ &\sum_{j=1}^N p_{ij}T_{ji}L_jV_jL_j^T T_{ji}^T + W. \end{aligned} \quad (34)$$

对式 (34) 应用引理 3, 可得

$$\begin{aligned} \Sigma_i(k+1) &\leq \\ &\sum_{j=1}^N 2p_{ij}[T_{ji}(A-L_jC_j)\Sigma_j(k)(A-L_jC_j)^T T_{ji}^T + \\ &\bar{T}_{ji}A\Sigma_i(k)A^T \bar{T}_{ji}^T] + \sum_{j=1}^N p_{ij}T_{ji}L_jV_jL_j^T T_{ji}^T + W. \end{aligned} \quad (35)$$

利用数学归纳法, 由  $M_i(0) = \Sigma_i(0)$  可得, 当  $k = 0$  时

结论成立. 假设  $k$  时刻,  $\Sigma_i(k) \leq M_i(k)$  成立, 则有

$$\begin{aligned} &T_{ji}(A-L_jC_j)\Sigma_j(k)(A-L_jC_j)^T T_{ji}^T + \\ &\bar{T}_{ji}A\Sigma_i(k)A^T \bar{T}_{ji}^T \leq \\ &T_{ji}(A-L_jC_j)M_j(k)(A-L_jC_j)^T T_{ji}^T + \\ &\bar{T}_{ji}AM_i(k)A^T \bar{T}_{ji}^T. \end{aligned} \quad (36)$$

结合式 (33) 和 (36) 可得, 在  $k+1$  时刻, 有

$$\Sigma_i(k+1) \leq M_i(k+1), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad \square$$

定义函数

$$\bar{J}_K(L(K)) = \sum_{k=0}^K \sum_{i=1}^N \text{tr}(M_i(k)). \quad (37)$$

由引理 4 结论易证

$$J_K(L(K)) \leq \bar{J}_K(L(K)). \quad (38)$$

即  $\bar{J}_K(L(K))$  为  $J_K(L(K))$  的上界函数. 由式 (33) 可知, 通过最小化  $\bar{J}_K(L(K))$  求得一组次优一致性滤波增益的解析形式是可行的, 因此, 问题变为求解优化问题

$$L_s(K) = \arg \min_{L(K)} \bar{J}_K(L(K)). \quad (39)$$

**定理 3** 优化问题 (39) 的最优解为

$$L_i^*(k) = AM_i^*(k)C_i^T \left[ C_iM_i^*(k)C_i^T + \frac{1}{2}V_i \right]^{-1}. \quad (40)$$

$\bar{J}_K(L(K))$  的最小值为

$$\bar{J}_K^*(L^*(K)) = \sum_{k=0}^K \sum_{i=1}^N \text{tr}(M_i^*(k)). \quad (41)$$

在初始值满足  $M_i^*(0) = \Sigma_i(0)$  时,  $M_i^*(k)$  的递推公式为

$$\begin{aligned} M_i^*(k+1) &= \\ &\sum_{j=1}^N p_{ij} \left\{ 2T_{ji}AM_j^*(k)A^T T_{ji}^T + \right. \\ &2\bar{T}_{ji}AM_i^*(k)A^T \bar{T}_{ji}^T - 2T_{ji}AM_j^*(k)C_j^T \times \\ &\left. \left[ C_jM_j^*(k)C_j^T + \frac{1}{2}V_j \right]^{-1} C_jM_j^*(k)A^T T_{ji}^T \right\} + W. \end{aligned} \quad (42)$$

**证明** 设

$$L^*(K) \triangleq \{L_i^*(k), k = 0, 1, \dots, K-1\}_{i=1}^N$$

为优化问题 (39) 的最优解,

$$L(K) \triangleq \{L_i(k), k = 0, 1, \dots, K-1\}_{i=1}^N$$

为任意一组解,  $\{M_i^*(k)\}_{i=1}^N$  和  $\{M_i(k)\}_{i=1}^N$  分别由  $L^*(K)$  和  $L(K)$  经式 (33) 计算得到.

若证明式 (40) 为优化问题 (39) 的最优解, 则只需证明  $\bar{J}_K^*(L^*(K))$  为  $\bar{J}_K(L(K))$  的最小上界, 即对于任意  $k$  和  $i$ , 均有  $\bar{J}_K^*(L^*(K)) \leq \bar{J}_K(L(K))$  成立, 且由式 (37) 和 (41) 可知, 只需证明  $M_i^*(k) \leq M_i(k)$  成立即可.

下面利用数学归纳法证明, 对于式(40), 有  $M_i^*(k) \leq M_i(k)$  成立.

由  $M_i^*(0) = M_i(0) = \Sigma_i(0)$  可得, 当  $k = 0$  时, 结论成立; 假设  $k$  时刻,  $M_i^*(k) \leq M_i(k)$  成立, 则在  $k + 1$  时刻, 由式(33), 有

$$\begin{aligned} M_i^*(k+1) - M_i(k+1) = & \sum_{j=1}^N 2p_{ij}[T_{ji}(A - L_j C_j)(M_j^*(k) - M_j(k)) \times \\ & (A - L_j C_j)^T T_{ji}^T + \bar{T}_{ji} A (M_i^*(k) - M_i(k)) A^T \bar{T}_{ji}^T] + \\ & T_{ji} \left[ A M_j^*(k) C_j^T - L_j^* \left( C_j M_j^*(k) C_j^T + \frac{1}{2} V_j \right) \right] \times \\ & (L_j^T - L_j^{*T}) T_{ji}^T + T_{ji} (L_j - L_j^*) \left[ C_j M_j^*(k) A^T - \right. \\ & \left. \left( C_j M_j^*(k) C_j^T + \frac{1}{2} V_j \right)^T L_j^{*T} \right] T_{ji}^T - T_{ji} (L_j - L_j^*) \times \\ & \left( C_j M_j^*(k) C_j^T + \frac{1}{2} V_j \right) (L_j^T - L_j^{*T}) T_{ji}^T. \end{aligned} \quad (43)$$

当  $L_i^*(k)$  取式(40)所示的形式时, 由式(43)可得

$$\begin{aligned} M_i^*(k+1) - M_i(k+1) = & \sum_{j=1}^N 2p_{ij}[T_{ji}(A - L_j C_j)(M_j^*(k) - M_j(k)) \times \\ & (A - L_j C_j)^T T_{ji}^T + \bar{T}_{ji} A (M_i^*(k) - M_i(k)) \times \\ & A^T \bar{T}_{ji}^T] - T_{ji} (L_j - L_j^*) \left( C_j M_j^*(k) C_j^T + \frac{1}{2} V_j \right) \times \\ & (L_j^T - L_j^{*T}) T_{ji}^T. \end{aligned} \quad (44)$$

由  $M_i^*(k) \leq M_i(k)$  和矩阵  $C_j M_j^*(k) C_j^T + V_j/2$  的正定性可得

$$M_i^*(k+1) - M_i(k+1) \leq 0. \quad (45)$$

将式(40)代入(33)即得到(42).  $\square$

至此可知,  $\{L_i^*(k)\}_{i=1}^N$  为最小化代价函数(14)的上界而得到的一组次优的一致性滤波增益.

### 3 算例仿真

考虑由4个传感器节点组成的线性时变离散随机系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + w(k), \\ y_i(k) &= C_i(k)x(k) + v_i(k), \\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

其中

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0.1 \\ 0.8 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix},$$

$$C_i(k) = [1 \ 1 \ 0], \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$w(k)$  和  $v_i(k)$  为零均值且互不相关的白噪声, 其协方差矩阵分别为

$$W = \text{diag}\{0.02, 0.06, 0.01\},$$

$$V_i = 0.6, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

传感器节点  $j$  的中介状态估计  $\lambda_j(k)$  只被允许传输  $t_{ji}(k)$  ( $1 \leq t_{ji}(k) \leq 3, i \neq j$ ) 个分量到融合节点  $i$ . 将每个融合节点  $i$  处带宽约束为

$$\sum_{j=1}^4 t_{ji}(k) = 5, \quad i \neq j.$$

为方便对比不同选择矩阵对融合估计效果的影响, 3组不同的分量选择矩阵组合  $T_1$ 、 $T_2$  和  $T_3$  分别为

$$\begin{aligned} T_1 : & \begin{cases} T_{21}^1 = \text{diag}\{0, 1, 0\}, T_{31}^1 = \text{diag}\{1, 1, 0\}, \\ T_{41}^1 = \text{diag}\{0, 1, 1\}, T_{12}^1 = T_{21}^1, \\ T_{32}^1 = \text{diag}\{1, 1, 0\}, T_{42}^1 = \text{diag}\{0, 1, 1\}, \\ T_{13}^1 = T_{31}^1, T_{23}^1 = T_{32}^1, T_{43}^1 = \text{diag}\{0, 1, 0\}, \\ T_{14}^1 = T_{41}^1, T_{24}^1 = T_{42}^1, T_{34}^1 = T_{43}^1; \end{cases} \\ T_2 : & \begin{cases} T_{21}^2 = \text{diag}\{1, 0, 0\}, T_{31}^2 = T_{41}^2 = \text{diag}\{1, 0, 1\}, \\ T_{12}^2 = T_{21}^2, T_{32}^2 = T_{42}^2 = \text{diag}\{1, 0, 1\}, \\ T_{13}^2 = T_{31}^2, T_{23}^2 = T_{32}^2, T_{43}^2 = \text{diag}\{0, 0, 1\}, \\ T_{14}^2 = T_{41}^2, T_{24}^2 = T_{42}^2, T_{34}^2 = T_{43}^2; \end{cases} \\ T_3 : & \begin{cases} T_{21}^3 = \text{diag}\{1, 0, 0\}, T_{31}^3 = \text{diag}\{0, 1, 1\}, \\ T_{41}^3 = \text{diag}\{1, 1, 0\}, T_{12}^3 = T_{21}^3, \\ T_{32}^3 = \text{diag}\{0, 1, 1\}, T_{42}^3 = \text{diag}\{1, 0, 1\}, \\ T_{13}^3 = T_{31}^3, T_{23}^3 = T_{32}^3, T_{43}^3 = \text{diag}\{1, 0, 0\}, \\ T_{14}^3 = T_{41}^3, T_{24}^3 = T_{42}^3, T_{34}^3 = T_{43}^3. \end{cases} \end{aligned}$$

3组一致性权重分配  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  分别为

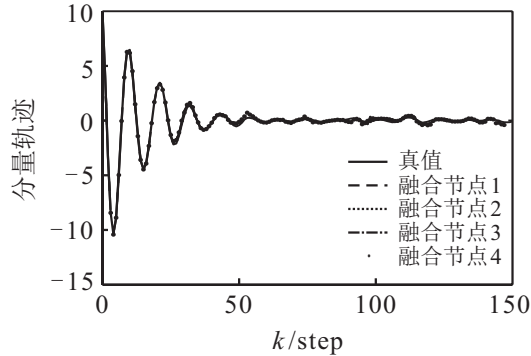
$$\begin{aligned} P_1 : & \begin{cases} p_{11}^1 = p_{22}^1 = p_{33}^1 = p_{44}^1 = 0.25, \\ p_{21}^1 = p_{31}^1 = p_{41}^1 = 0.25, \\ p_{12}^1 = p_{32}^1 = p_{42}^1 = 0.25, \\ p_{13}^1 = p_{23}^1 = p_{43}^1 = 0.25, \\ p_{14}^1 = p_{24}^1 = p_{34}^1 = 0.25; \end{cases} \\ P_2 : & \begin{cases} p_{11}^2 = p_{22}^2 = p_{33}^2 = p_{44}^2 = 0.45, \\ p_{21}^2 = p_{31}^2 = 0.15, p_{41}^2 = 0.25, \\ p_{12}^2 = p_{21}^2, p_{32}^2 = 0.25, p_{42}^2 = 0.15, \\ p_{13}^2 = p_{31}^2, p_{23}^2 = p_{32}^2, p_{43}^2 = 0.15, \\ p_{14}^2 = p_{41}^2, p_{24}^2 = p_{42}^2, p_{34}^2 = p_{43}^2; \end{cases} \\ P_3 : & \begin{cases} p_{11}^3 = p_{22}^3 = p_{33}^3 = p_{44}^3 = 0.65, \\ p_{21}^3 = p_{31}^3 = 0.15, p_{41}^3 = 0.05, \\ p_{12}^3 = p_{21}^3, p_{32}^3 = 0.05, p_{42}^3 = 0.15, \\ p_{13}^3 = p_{31}^3, p_{23}^3 = p_{32}^3, p_{43}^3 = 0.15, \\ p_{14}^3 = p_{41}^3, p_{24}^3 = p_{42}^3, p_{34}^3 = p_{43}^3. \end{cases} \end{aligned}$$

给定初值条件

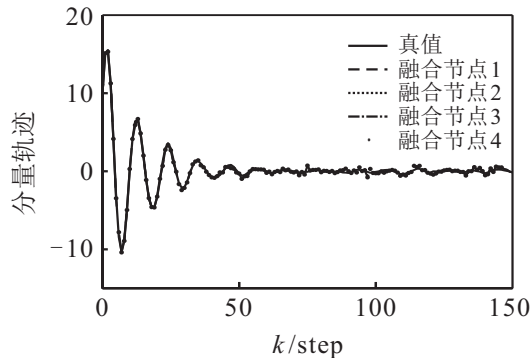
$$\hat{x}_i(0) = x(0) = [10 \ 10 \ 10]^T, i = 1, 2, 3, 4;$$

$$M_i^*(0) = M_i(0) = \Sigma_i(0) = \text{diag}\{0.19, 0.09, 0.08\}, \\ i = 1, 2, 3, 4.$$

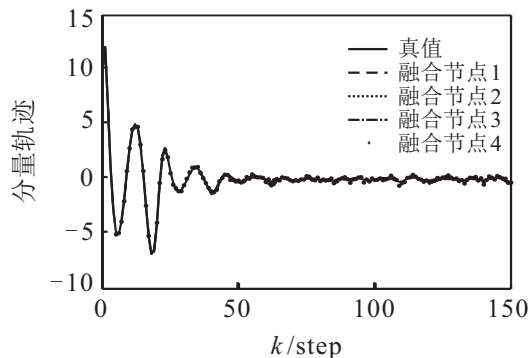
选取分量矩阵组  $T_1$ , 一致性权重组  $P_1$ , 各传感器节点滤波增益均按式 (40) 计算, 分别得到状态真值  $x(k)$  和各融合节点处一致性融合估计值  $\hat{x}_i(k)$ , 仿真结果如图 1 所示.



(a) 第 1 个分量



(b) 第 2 个分量



(c) 第 3 个分量

图 1 状态真值  $x(k)$  与各融合估计值  $\hat{x}_i(k)$  的状态分量轨迹

由图 1 可见, 本文所提出的带宽受限下的一致性融合估计器能够较好地估计目标的状态, 各传感器节点融合估计值能够达到一致.

选取分量矩阵组  $T_1$ , 一致性权重组  $P_1$ , 各传感器节点处融合估计误差协方差随时间变化情况如图 2 所示.

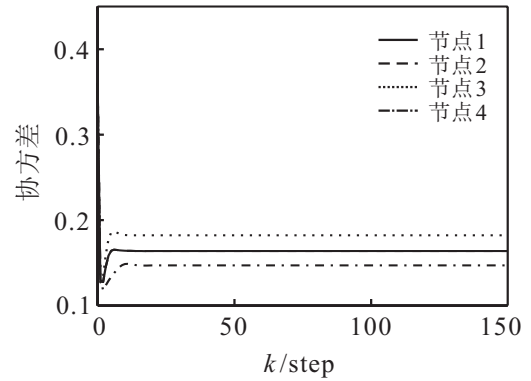


图 2 各节点融合估计误差协方差

由图 2 可见, 各融合节点估计误差协方差是收敛的, 与定理 1 结论一致.

当一致性权重组取  $P_1$  时, 分量选择矩阵组分别取  $T_1$ 、 $T_2$  和  $T_3$  时, 代价函数  $J_K(L(K))$  的仿真结果如图 3 所示.

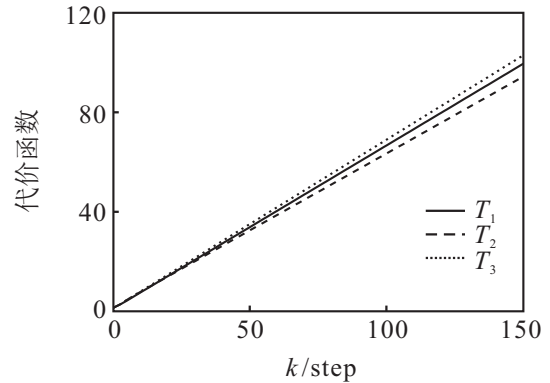


图 3 代价函数  $J_K(L(K))$  与分量选择矩阵的关系

由图 3 可见, 选择不同的分量选择矩阵组时, 融合结果的精度是不同的.

当分量选择矩阵取  $T_1$  时, 一致性矩阵组分别选取  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  时, 代价函数  $J_K(L(K))$  的仿真结果如图 4 所示.

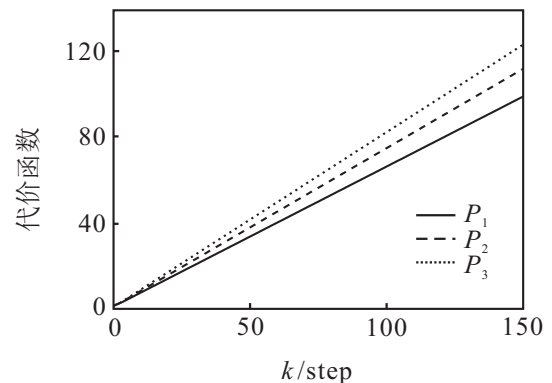


图 4 代价函数  $J_K(L(K))$  与一致性权重的关系

由图 4 可见, 一致性权重在各传感器中的分配越不均匀, 一致性分布融合估计精度越低.

### 4 结 论

本文研究了带宽受限下基于一致性的分布式融

合估计问题. 将各融合节点的带宽约束进行建模, 并采取直接选取传输信号分量到融合节点的降维策略, 以一致性滤波增益为决策变量, 在给定一致性权重和分量选择矩阵的前提下, 以所有传感器有限时域下融合估计误差协方差矩阵的迹的和为代价函数. 为简化问题, 利用不等式理论给出代价函数的上界函数, 得到使上界函数最小的一致性滤波增益. 仿真结果表明, 融合估计精度受分量选择矩阵的选取和一致性权重分配的影响. 如何得到最优的分量选择和一致性权重分配是下一步研究的方向.

### 参考文献(References)

- [1] Bliman P A, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. *Automatica*, 2013, 44(8): 1985-1995.
- [2] Subbotin M V, Smith R S. Design of distributed decentralized estimators for informations with fixed and stochastic communication topologies[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2491-2501.
- [3] Calafiore G C, Abrate F. Distributed linear estimation over sensor networks[J]. *Int J of Control*, 2009, 82(5): 868-882.
- [4] Olfati-Saber R. Distributed Kalman filtering for sensor networks[C]. *Proc of the 46th IEEE Conf on Decision and Control*. New Orleans: IEEE, 2007: 5492-5498.
- [5] Olfati-Saber R. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters[C]. *Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control*. Seville: IEEE, 2005: 8179-8184.
- [6] Stankovic S S, Stankovic M S, Stipanovic D M. Consensus based overlapping decentralized estimation with missing observations and communication faults[J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 1397-1406.
- [7] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [8] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1017-1023.
- [9] Rao B S, Durrant-Whyte H F. Fully decentralized algorithm for multisensor Kalman filtering[J]. *IEE Proc D: Control Theory and Applications*, 1991, 138(5): 413-420.
- [10] 王帅, 杨文, 侍洪波. 带丢包的一致性滤波算法研究[J]. *自动化学报*, 2010, 36(12): 1689-1696.
- (Wang S, Yang W, Shi H B. Consensus-based filtering algorithm with packet-dropping[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(12): 1689-1696.)
- [11] Carli R, Chiuso A, Schenato L, et al. Distributed Kalman filtering based on consensus strategies[J]. *IEEE J on Selected Areas in Communications*, 2008, 26(4): 622-633.
- [12] Shen B, Wang Z D, Hung Y S. Distributed  $H_\infty$ -consensus filtering in sensor networks with multiple missing measurements: The finite-horizon case[J]. *Automatica*, 2010, 46(10): 1682-1688.
- [13] Ding D, Wang Z D, Dong H, et al. Distributed  $H_\infty$  state estimation with stochastic parameters and nonlinearities through sensor networks: The finite-horizon case[J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1575-1585.
- [14] Baras J S, Matei I. Consensus-based linear distributed filtering[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(9): 1294-1299.
- [15] Wong W S, Brockett R W. Systems with finite communication bandwidth constraints-part I: State estimation problem[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2142-2148.
- [16] Tatikonda S, Mitter S. Control under communication constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1056-1068.
- [17] Schizas I D, Giannakis G B, Luo Z Q. Distributed estimation using reduced-dimensionality sensor observations[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2007, 55(8): 4284-4299.
- [18] Behbahani A S, Eltawil A M, Jafarkhani H. Linear decentralized estimation of correlated data for power-constrained wireless sensor networks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6003-6016.
- [19] Song E B, Zhu Y M, Zhou J. Sensors' optimal dimensionality compression matrix in estimation fusion[J]. *Automatica*, 2005, 41(12): 2131-2139.
- [20] Chen B, Zhang W A, Yu L, et al. Distributed fusion estimation with communication bandwidth constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2015, 60(5): 1398-1403.
- [21] Jiang B, Wang J L, Soh Y C. An adaptive technique for robust diagnosis of faults with independent effects on system outputs[J]. *Int J of Control*, 2002, 75(11): 792-802.

(责任编辑: 郑晓蕾)