

考虑复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型及粒子群算法

李 军, 周建力

(电子科技大学 经济与管理学院, 成都 611731)

摘要: 投资组合模型中期望收益等参数的估计误差对最优投资组合策略的稳定性产生重要影响. 在提出考虑复杂约束和交易成本的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型的基础上, 设计改进粒子群算法来求解该模型. 应用实际交易数据对所提出的模型和算法进行数值实验和比较, 结果表明改进粒子群算法能有效地求解该模型, 产生更稳定的最优投资策略, 从而能够更好地适合实际投资环境.

关键词: 鲁棒优化; 投资组合; 条件风险价值; 复杂约束; 粒子群算法

中图分类号: F224.3; O221

文献标志码: A

Robust mean-CVaR portfolio selection model with complicated realistic constraints and its improved particle swarm optimization algorithm

LI Jun, ZHOU Jian-li

(School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China. Correspondent: LI Jun, E-mail: lijun@uestc.edu.cn)

Abstract: Errors in the estimation of expected return of securities of portfolio selection models may have large effect on the stability of optimal strategy. A robust portfolio selection model with complicated realistic constraints is proposed. Then an improved particle swarm optimization is proposed to solve the model. The empirical analysis and comparisons from the real market data indicate that the proposed improved particle swarm optimization algorithm can solve the proposed model more efficiently, and the proposed model obtains more stable optimal portfolio strategy.

Keywords: robust optimization; portfolio selection; CVaR; complicated realistic constraints; particle swarm optimization

0 引 言

自1952年Markowitz^[1]提出著名的均值方差模型, 投资组合理论得到了快速的发展. 后来人们又相继提出了如均值-VaR和均值-CVaR^[2]等模型. 然而, 由这些模型得到的最优投资策略对输入参数(如期望收益)的扰动非常敏感, 输入参数的微小变化可能导致投资策略产生很大波动^[3].

鲁棒优化方法是解决内部结构和外部环境不确定情形下的一种新的不确定优化方法. 1973年, Soyster^[4]基于worst-case思想最早提出了鲁棒线性优化方法. 近十几年来, 以Ben-Tal等^[5-7]、Ghaoui等^[8]、Bertsimas等^[9]为代表的一批学者在建立鲁棒优化理论方面做了重要工作. 由于鲁棒优化方法能够最大程

度降低参数不确定性对投资组合策略的影响, 许多学者对鲁棒投资组合模型进行了深入研究^[10-11]. 如: Goldfarb等^[12]研究了鲁棒worst-case VaR投资组合选择模型; Ghaoui等^[13]构建了资产收益分布部分信息已知条件下的鲁棒worst-case VaR投资组合选择模型; Huang等^[14-15]分别在退出时间与资产收益分布信息部分已知, 或引入专家意见确定资产收益的条件下, 基于worst-case VaR和worst-case CVaR建立了鲁棒投资组合选择优化模型; Zhu等^[16]在资产收益服从混合不确定分布的假设下构建了鲁棒worst-case CVaR投资组合选择模型; Natarajan等^[17]研究了已知随机变量部分矩信息条件下的鲁棒worst-case CVaR投资组合模型.

收稿日期: 2015-09-13; **修回日期:** 2016-01-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71571031); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(ZYGX2013J133).

作者简介: 李军(1975—), 女, 副教授, 博士, 从事鲁棒优化、多目标决策等研究; 周建力(1987—), 男, 硕士生, 从事鲁棒优化、投资组合选择的研究.

在投资组合实践中往往存在诸多复杂约束条件的制约,如最小交易量、资产数量限制、单个资产的购买量及交易成本等.考虑带复杂约束的投资组合选择模型是 NP-Hard 问题,难以用传统的优化算法求解. Sadjadi 等^[18]通过设计遗传算法求解带资产数目限制约束的鲁棒投资组合选择模型; Fastrich 等^[19]通过设计混合启发式算法求解一个更符合实际投资环境的鲁棒投资组合优化模型.但是现有的研究并没有针对以 CVaR 为风险度量的鲁棒投资组合选择模型开展研究.

本文将考虑现实复杂约束的鲁棒投资组合问题.在假设期望收益属于某椭圆不确定集合的条件下,首先给出带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合选择模型;然后,设计改进粒子群算法以求解该模型;最后,应用实际交易数据对所提出的模型和算法进行数值实验和比较研究.

1 预备知识

1.1 均值-CVaR 投资组合模型

假定投资者打算将其财富投资于 n 种风险资产,资产收益为随机变量.假设 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 表示 n 种风险资产的随机收益率, r 的联合概率密度函数为 $p(r)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示第 i 种风险资产的投资比例.损失函数定义为 $f(x, r) = -x^T r$.对于任意投资策略 x 而言,损失函数 $f(x, r)$ 不超过损失值 α 的概率为

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x, r) \leq \alpha} p(r) dr.$$

对于每一个投资策略 x ,在给定置信水平值 β 的条件下, $\beta \in (0, 1)$, VaR 和 CVaR 分别定义为^[2]

$$\text{VaR}_\beta(x) = \min\{\alpha \in \mathbf{R} : \Psi(x, \alpha) \geq \beta\},$$

$$\text{CVaR}_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(x, r) \geq \text{VaR}_\beta(x)} f(x, r) p(r) dr.$$

因此,均值-CVaR 投资组合模型可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \min & \text{CVaR}_\beta(x). \\ \text{s.t.} & \begin{cases} E(r)^T x \geq r_0; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 r_0 表示投资者期望达到的收益率水平值.文献[3]通过极小化辅助函数 $F_\beta(x, \alpha)$ 计算 $\text{CVaR}_\beta(x)$,有

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{r \in \mathbf{R}^n} [f(x, r) - \alpha]^+ p(r) dr,$$

其中 $[t]^+ = \max\{t, 0\}$.令 $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ 为 n 支股票初始价格, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 为 n 支股票考察期末价格.考察期内损失函数 $f(x, y, q) = -y^T x + q^T x$.对 y 的概率密度函数 $p(y)$ 抽样后得到样本 $y^1, y^2, \dots, y^K, F_\beta(x, \alpha)$ 的近似值为

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{K(1-\beta)} \sum_{k=1}^K [-y^{kT} x + q^T x - \alpha]^+.$$

于是,均值-CVaR 投资组合模型可改写为

$$\begin{aligned} \min & \alpha + \frac{1}{K(1-\beta)} \sum_{k=1}^K z_k. \\ \text{s.t.} & \begin{cases} z_k \geq -y^{kT} x + q^T x - \alpha, k = 1, 2, \dots, K; \\ E(r)^T x \geq r_0; \\ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1, i = 1, 2, \dots, n; \\ z_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, K. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 鲁棒均值-CVaR 投资组合模型

考虑线性规划 (LP) 问题

$$\begin{aligned} \min & c^T x; \\ \text{s.t.} & a_i^T x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $c, x, a_i \in \mathbf{R}^n; b_i \in \mathbf{R}$.不失一般性,假设 c 为确定系数,不确定系数 $(a_i, b_i) \in U_i, U_i$ 为不确定集合.线性规划 (2) 的鲁棒对应形式 (LP_U) 为

$$\begin{aligned} \min & c^T x; \\ \text{s.t.} & a_i^T x \leq b_i, \forall (a_i, b_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

如果 x 满足 $a_i^T x \leq b_i, \forall (a_i, b_i) \in U_i$,则称 x 为 (LP_U) 的鲁棒可行解;如果对于任意鲁棒可行解 x ,有 $c^T x^* \leq c^T x$ 成立,则称 x^* 为 (LP_U) 的鲁棒最优解.

文献中不确定集合 U_i 常取为椭圆不确定集和盒状不确定集.由于盒状不确定集存在过于保守的问题,以下仅考虑 (a_i, b_i) 属于椭圆不确定集 U_i 的情形,有

$$U_i = \left\{ [a_i; b_i] = [a_i^0; b_i^0] + \sum_{l=1}^L u_l [a_i^l; b_i^l] : \|u\|_2 \leq \Omega \right\}.$$

引理 1^[7] 线性规划模型 (2) 的鲁棒对应形式为

$$\begin{aligned} \min & c^T x; \\ \text{s.t.} & a_i^{0T} x + \Omega \sqrt{\sum_{l=1}^L ((a_i^l)^T x - b_i^l)^2} \leq b_i^0, \forall i. \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型

假定投资者购买 n 支股票,股票的期望收益率向量为 $E(r)$,第 i 支股票的购买量为 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$,投资组合策略为 x ,购买股票的总数量为 S .交易成本对最优投资策略确定起到关键作用^[20-21].下面针对交易成本提出如下假设: t_1 表示购买时券商佣金, t_2 表示出售时券商佣金和印花税的总和.同时,假设投资者能接受的最大交易成本 R_{ac} 与期望收益向量 $E(r)$ 相关,令 $R_{ac} = w(e + E(r))^T (q \times x), q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ 表示 n 支股票价格, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$. w 表示允许交易成本占收益最大比例,符号 \times 表示向量

间点乘运算. 构建交易成本约束

$$t_1 e^T(q \times x) + t_2 (e + E(r))^T(q \times x) \leq w(e + E(r))^T(q \times x). \quad (5)$$

此外, 还考虑如下约束条件:

$$\sum_{i=1}^n x_i = S, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

$$k_{\text{low}} \leq \sum \text{Sign}(x_i) \leq k_{\text{up}}, \quad k_{\text{low}}, k_{\text{up}} \in \mathbf{N}^+; \quad (7)$$

$$v_{\text{low}}^i \leq x_i \leq v_{\text{up}}^i, \quad v_{\text{low}}^i, v_{\text{up}}^i \in \mathbf{N}^+; \quad (8)$$

$$x_i = y_i \times g_i, \quad g_i \in \mathbf{N}^+; \quad (9)$$

$$x_i \geq d_i, \quad \text{if } x_i \geq 0; \quad (10)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

约束 (6) 表示投资者股票购买数量总和限制; (7) 表示对投资组合股票种类数量限制, k_{low} 和 k_{up} 分别表示股票种类数量的下限和上限; (8) 表示对第 i 支股票购买数量限制, v_{low}^i 和 v_{up}^i 分别表示第 i 支股票购买量下限和上限; (9) 表示股票单位购买数量限制, g_i 表示第 i 支股票单位购买数量, \mathbf{N}^+ 表示正整数集合; (10) 表示股票最小购买数量的限制, 其中 d_i 表示投资者购买第 i 支股票的最小购买量; (11) 表示不允许卖空. 考虑如下带复杂约束的均值-CVaR 投资组合选择模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha + \frac{1}{K(1-\beta)} \sum_{k=1}^K z_k. \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} z_k \geq -y^k T x + q^T x - \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\ E(r)^T x \geq r_0; \\ \text{约束 (5) ~ (11)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

注意到模型 (12) 中交易成本约束 (5) 和 $E(r)^T x \geq r_0$ 中存在不确定系数 $E(r)$.

定理 1 假设 $E(r)$ 属于椭球不确定集合

$$U := \left\{ E(r) \mid E(r) = r_c + \sum_{p=1}^g u_p r_p, \|u\|_2 \leq 1 \right\},$$

其中 r_c 为椭球中心, 表示股票历史收益率向量, 则期望收益约束 $E(r)^T x \geq r_0$ 的鲁棒对应形式为

$$r_c^T x - r_0 \geq \sqrt{\sum_{p=1}^g (r_p^T x)^2};$$

交易成本约束 (5) 的鲁棒对应形式为

$$\begin{aligned} (w - t_2) \sqrt{\sum_{p=1}^g (r_p^T(q \times x))^2} \leq \\ [(w - t_2)r_c - (t_1 + t_2 - w)e]^T(q \times x). \end{aligned}$$

证明 由引理 1 可得, 期望收益约束 $E(r)^T x \geq r_0$ 的鲁棒对应形式为

$$\min_{E(r) \in U} \left\{ E(r)^T x \right\} \geq r_0 \Leftrightarrow$$

$$r_c^T x + \min_{\|u\|_2 \leq 1} \left\{ \sum_{p=1}^g u_p r_p^T x \right\} \geq r_0 \Leftrightarrow$$

$$\max_{\|u\|_2 \leq 1} \left\{ - \sum_{p=1}^g u_p r_p^T x \right\} \leq r_c^T x - r_0 \Leftrightarrow$$

$$r_c^T x - r_0 \geq \sqrt{\sum_{p=1}^g (r_p^T x)^2}.$$

同理, 由引理 1 可得其鲁棒对应形式为

$$\min_{E(r) \in U} (w - t_2) E(r)^T(q \times x) \geq$$

$$(t_1 + t_2 - w) e^T(q \times x) \Leftrightarrow$$

$$(w - t_2) \left[r_c^T(q \times x) + \min_{\|u\|_2 \leq 1} \sum_{p=1}^g u_p r_p^T(q \times x) \right] \geq$$

$$(t_1 + t_2 - w) e^T(q \times x) \Leftrightarrow$$

$$(w - t_2) \left[r_c^T(q \times x) - \max_{\|u\|_2 \leq 1} - \sum_{p=1}^g u_p r_p^T(q \times x) \right] \geq$$

$$(t_1 + t_2 - w) e^T(q \times x) \Leftrightarrow$$

$$(w - t_2) \sqrt{\sum_{p=1}^g (r_p^T(q \times x))^2} \leq$$

$$[(w - t_2)r_c - (t_1 + t_2 - w)e]^T(q \times x). \quad \square$$

由定理 1 可得, 带复杂约束的均值-CVaR 投资组合模型 (12) 对应的鲁棒对应形式为

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha + \frac{1}{K(1-\beta)} \sum_{k=1}^K z_k. \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} z_k \geq -y^k T x + q^T x - \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\ r_c^T x - r_0 \geq \sqrt{\sum_{p=1}^g (r_p^T x)^2}; \\ (w - t_2) \sqrt{\sum_{p=1}^g (r_p^T(q \times x))^2} \leq \\ [(w - t_2)r_c - (t_1 + t_2 - w)e]^T(q \times x); \\ \text{约束 (6) ~ (11)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

由于模型 (13) 是 NP-hard 问题, 难以用传统优化算法求解, 本文提出一种改进粒子群算法来求解该模型.

2 改进粒子群算法

粒子群算法 (PSO) 是一种模拟鸟群捕食行为的群聚智能算法, 于 1995 年由 Kennedy 和 Eberhart^[22] 提出. 尽管粒子群算法具有容易实现且快速收敛等特性, 但也存在易早熟收敛、陷入局部最优等缺陷. 本节将提出改进粒子群算法以求解模型 (12) 和 (13).

解的表示: 模型 (13) 中决策变量包括向量 $x =$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $z_k (k = 1, 2, \dots, K)$ 及 $\alpha \in \mathbf{R}$. 粒子 θ 的前 n 维对应于向量 x , 即 $\theta_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n$; 从第 $n+1$ 维到第 $n+K$ 维对应于变量 z_k , 即 $\theta_{n+k} = z_k, k = 1, 2, \dots, K$; 粒子 θ 的第 $n+K+1$ 维对应于变量 α , 即 $\theta_{n+K+1} = \alpha$.

初始化: 随机产生初始粒子 θ 的 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 以及 θ_{n+K+1} 的位置和方向.

约束处理: 1) 使用归一法, 即每次粒子获得新位置之后, 令 $\theta_i = \theta_i \times S / \sum_{i=1}^n \theta_i$, 可以保证约束 (6) 恒成立. 2) 对于约束 (9), 按照 g_i 的倍数进行取整操作, 之后再行归一化处理. 3) 判断当前 θ_i 的取值是否满足约束 (10), 若不满足, 则令 $\theta_i = 0$ 并重复以上操作 1) 和 2). 4) 根据当前 θ_i 的值得到 $\sum_{i=1}^n \text{Sign}(\theta_i)$, 并判断约束 (7) 是否满足, 若不满足, 则按照当前 θ_i 值进行降序排列, 令第 k_{up} 之后的分量 θ_i 取值为 0, 然后采用死亡函数法重新初始化并重复以上所有操作. 5) 判断当前解是否同时满足模型 (13) 中第 2 个、第 3 个约束和约束 (8), 若不满足, 则采用死亡函数法重新初始化并重复以上所有操作. 6) 令 $\theta_{n+k} = -y^{kT}x + q^T x - \alpha$, $k = 1, 2, \dots, K$. 如果 $\theta_{n+k} \geq 0$, 则模型 (13) 中第 1 个约束条件成立; 否则重新产生非负实数 α . 如此可以保证第 1 个约束条件成立.

目标值评价: 对当前每个粒子 θ , 根据模型 (13) 的目标函数值计算并保存粒子适应度值.

更新操作: 按照 PSO 算法迭代公式进行更新操作

$$v_{i,t+1}^l = wv_{i,t}^l + c_1r_1(p_{i,t}^l - \theta_{i,t}^l) + c_2r_2(g_{i,t}^l - \theta_{i,t}^l), \quad (14)$$

$$\theta_{i,t+1}^l = \theta_{i,t}^l + v_{i,t+1}^l. \quad (15)$$

其中: i 为第 i 维搜索空间, l 为第 l 个粒子, t 为迭代数, $x_{i,t}^l$ 为粒子的位置, $v_{i,t}^l$ 为粒子运行的速度, $p_{i,t}^l$ 为粒子的历史最优位置, $g_{i,t}^l$ 为整个搜索区域的全局最优位置, $i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, L, t = 1, 2, \dots, T$. 惯性权重 w 取为动态权重, 即令

$$w = \frac{w_{\max} - (w_{\max} - w_{\min}) \times t}{\text{gen}}$$

其中: 动态权重上限 $w_{\max} := 0.9$, 动态权重下限 $w_{\min} := 0.5$, gen 为总迭代次数. 可以看到, 随着迭代次数 t 的增加, w 会越来越小, 代表粒子的原始速度所占比例越来越小, 这样就可以一定程度上避免粒子运动后期陷入局部最优. 加速因子 c_1 和 c_2 被选取为动态加速因子, 即令 $c_1 = c_2 = c_0 + \frac{t}{\text{gen}}$, c_0 表示初设的原始速度. 随着迭代次数的增加, 加速因子 c_1, c_2 越来越大, 这样能够保证粒子的收敛速度. r_1 和 r_2 是属于区

间 $[0, 1]$ 的随机数.

保留精英集: 存储每次迭代后产生的最优粒子.

变异操作: 为了避免算法收敛于局部最优解, 同时也保证算法后期粒子的多样性, 采取如下变异操作: 在区间 $[0, 1]$ 之间产生随机数 r . 设 P_m 表示变异系数. 如果 $r < P_m$, 则更新粒子 $\theta_{i,t}^l$ 的位置, $\theta_{i,t}^l = \theta_{i,t}^l + \delta_{i,t}^l$, $\delta_{i,t}^l$ 是基于标准高斯分布产生的随机数, $\delta_{i,t}^l \sim N(0, 1)$. 变异操作可以使搜索过程跳出局部最优解; 同时, 精英集存储每次迭代后产生的最优粒子, 可以防止因变异导致部分具有优良性能粒子的流失.

改进粒子群算法步骤如下.

1) 初始化操作: 初始化 L 个粒子作为一个种群, 随机产生粒子 l 的位置和速度, $l = 1, 2, \dots, L$.

2) 约束处理: 对初始化后不符合约束条件的粒子按上述方法处理, 要保证所有粒子可行性. 令 $t = 1$.

3) 评价操作: 计算并保存粒子的适应度值.

4) 更新操作: 更新粒子的历史最优位置 $p_{i,t}^l$ 和全局最优位置 $g_{i,t}^l$, 将有历史最优位置的粒子存储在精英集中.

5) 比较操作: 由式 (14) 和 (15) 更新粒子 l 的位置和速度, 并重复步骤 2) 以保证粒子的可行性.

6) 变异操作: 按照一定比例对当前粒子种群进行变异操作, 并重复步骤 2). 比较变异粒子适应度值和该粒子的历史最优值, 如果变异粒子适应度值更优, 则更新变异粒子的历史最优值, 同时更新精英集.

7) 重复以上步骤 3)~6) 至指定运行次数, 算法终止.

8) 输出模型 (13) 的最优解和最优值.

3 数值实验

从上证 180 指数股中选取来自不同行业的 30 支股票作为样本数据, 选取自 2006 年 6 月 30 日~2007 年 4 月 30 日为止共 40 个周收益率数据和 200 个日收盘价数据. 假设 $\hat{r}_j = 0.1E(r_j)$, 股票未来不确定收益率的盒状不确定集表示为 $[\bar{r}_j - \hat{r}_j, \bar{r}_j + \hat{r}_j]$, $\bar{r}_j = E(r_j), j = 1, 2, \dots, 30$. 为简便起见, 用 r_{low}^i 和 r_{up}^i 分别代替 $\bar{r}_j - \hat{r}_j$ 和 $\bar{r}_j + \hat{r}_j$, 如表 1 所示. 令 $g = n = 30$ 并构建不确定收益率 $E(r)$ 属于的椭球不确定集.

在对 CVaR 的计算中, 置信度水平 $\beta = 0.95$, 投资组合持有期为一周, 于是需要最小化 5 个交易日风险. 利用历史数据中某交易日收盘价和 5 个交易日后收盘价的比值来估算以当前价格为基准的未来预期价格^[19]. 每支股票 5 个交易日后可能价格集为

$$y_i = \left\{ y_{ij} - q_i \times \frac{p_{ij}^{e+5}}{p_{ij}^e}, e \in \mathbf{N}^+, j = 1, 2, \dots, J \right\},$$

其中 J 为用历史数据产生的情景数量, $J = 196$.

表 1 股票不确定周收益率数据 %

Stock	\bar{r}_i	r_{low}^i	r_{up}^i	Stock	\bar{r}_i	r_{low}^i	r_{up}^i
600000	3.002 2	2.702 0	3.302 4	600110	2.436 2	2.192 6	2.679 8
600004	2.147 4	1.932 7	2.362 1	600138	2.606 8	2.346 1	2.867 5
600011	2.750 2	2.475 2	3.025 2	600151	1.222 6	1.100 3	1.344 9
600012	1.585 7	1.427 1	1.744 3	600161	2.541 7	2.287 5	2.795 9
600026	2.933 1	2.639 8	3.226 4	600166	3.981 9	3.583 7	4.380 1
600028	2.520 1	2.268 1	2.772 1	600171	1.810 8	1.629 7	1.991 9
600029	3.369 2	3.032 3	3.706 1	600180	1.887 9	1.699 1	2.076 7
600030	3.966 9	3.570 2	4.363 6	600236	2.824 61	2.542 1	3.107 1
600031	4.289 6	3.860 6	4.718 6	600333	2.107 9	1.897 1	2.318 7
600050	2.385 4	2.146 7	2.623 9	600345	2.309	2.078 1	2.539 9
600062	2.716 1	2.444 5	2.987 7	600421	2.115 6	1.904	2.327 2
600073	1.974 1	1.776 7	2.171 5	600489	2.069	1.862 1	2.275 9
600088	1.82	1.638	2.002	600663	3.592 8	3.233 5	3.952 1
600089	3.814	3.432 6	4.195 4	600816	5.633 2	5.069 9	6.196 5
600100	3.185 8	2.867 2	3.504 4	600887	1.056 1	0.950 5	1.161 7

表 2 鲁棒最优投资组合策略

Stock	x_i	Stock	x_i	Stock	x_i	Stock	x_i
600000	3 000	600031	0	600138	0	600345	100
600004	10 100	600050	8 700	600151	200	600421	500
600011	0	600062	0	600161	100	600489	0
600012	4 900	600073	1 100	600166	600	600663	0
600026	4 200	600088	200	600171	5 000	600816	100
600028	0	600089	5 800	600180	29 000	600887	0
600029	18 000	600100	800	600236	300		
600030	0	600110	0	600333	7 300		

表 3 名义最优投资组合策略

Stock	x_i	Stock	x_i	Stock	x_i	Stock	x_i
600000	3 600	600031	0	600138	0	600345	0
600004	5 500	600050	1 700	600151	0	600421	100
600011	100	600062	0	600161	200	600489	0
600012	600	600073	1 400	600166	4 500	600663	100
600026	2 000	600088	0	600171	6 400	600816	2 000
600028	0	600089	7 700	600180	18 800	600887	0
600029	34 400	600100	5 700	600236	0		
600030	0	600110	1 600	600333	3 600		

假设投资购买总股数为 $S = 10^5$, 额定收益 $r_0 = 600$. 假定在 30 支股票中选择 20 支进行投资, 即 $k_{low} = k_{up} = 20$, 各股票在投资组合中所占比例不小于 0.003, 即 $v_{low}^i = 300, v_{up}^i = +\infty$. 根据上海证券交易所规定, 最小购买量和单位购买量都为 100 股, 即 $b_i = d_i = 100$. 取双向经手费为总金额的 0.006 96%, 双向证管费为总金额的 0.002%, 双向券商佣金为总金额的 0.1%, 印花税为总金额的 0.1%, 即 $t_1 = 0.208 96\%, t_2 = 0.317 92\%$. 假定 $w = 0.2$. 改进粒子群算法参数设置如下: 种群数量为 100, 迭代次数为 5 000 次, 惯性权重 $w_{max} = 0.9, w_{min} = 0.4$, 加速因子 $c_0 = 0.01$.

分别利用改进粒子群算法求解模型 (13) 和模型 (12), 并重复进行 100 次, 得到两模型的最优投资组合和最优 CVaR 值, 见表 2 和表 3. 鲁棒最优投资组合的最优 CVaR 值和平均 CVaR 值分别为 17 683.96 和 19 914.57, 名义最优投资组合的最优 CVaR 值和平均 CVaR 值分别为 17 375.80 和 19 827.36. 分析以上数据可知, 鲁棒最优投资组合的最优 CVaR 值劣于名义最优投资组合的最优 CVaR 值 1.773 5%, 鲁棒最优投资组合的平均 CVaR 值劣于名义最优投资组合的平均 CVaR 值 0.439 8%. 上述分析结果符合鲁棒优化的思想, 鲁棒均值-CVaR 投资组合模型 (13) 考虑了期望收益率的不确定性, 所得到的鲁棒最优投资组合兼顾了解的鲁棒性和最优性. 实际上, 鲁棒最优投资组合仅仅牺牲了最优 CVaR 值 1.773 5% 的最优性, 换取的却是允许不确定参数 $E(r)$ 在历史收益率 10% 的范围内波动. 因此, 带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型 (13) 较带复杂约束的均值-CVaR 投资组合模型 (12) 更具优势, 在投资实践中更有现实意义和优越性.

另外, 还用基本粒子群算法求解了带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型 (13), 得到的鲁棒投资最优组合策略如表 4 所示. 利用基本粒子群算法求解模型 (13) 得到的最优 CVaR 值为 30 253.75, 平均最优 CVaR 值为 47 749. 与前面的结果进行比较可知, 利用改进粒子群算法求解带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型 (13) 得到的最优 CVaR 值以及平均最优 CVaR 值都大大优于利用基本粒子群算法得到的模型 (13) 的最优 CVaR 值和平均最优 CVaR 值.

表 4 鲁棒最优投资组合策略 (基本粒子群算法)

Stock	x_i	Stock	x_i	Stock	x_i	Stock	x_i
600000	3 700	600031	0	600138	400	600345	0
600004	3 300	600050	1 600	600151	1 100	600421	2 200
600011	800	600062	2 900	600161	0	600489	1 000
600012	0	600073	2 100	600166	0	600663	1 800
600026	5 400	600088	0	600171	7 000	600816	0
600028	1 700	600089	5 800	600180	34 700	600887	0
600029	15 200	600100	3 100	600236	0		
600030	200	600110	0	600333	6 000		

图 1 和图 2 中分别给出了改进粒子群算法和基本粒子群算法求解模型 (13) 的迭代过程. 可以看出, 在 5 000 次迭代后, 改进粒子群算法搜索到的全局最

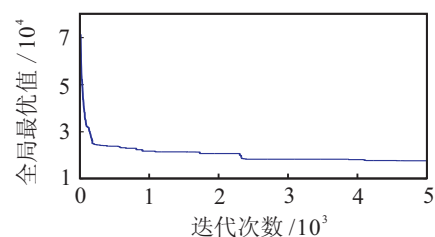


图 1 改进粒子群算法迭代过程

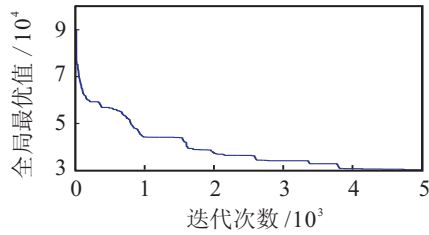


图 2 基本粒子群算法迭代过程

优值远好于基本粒子群算法搜索到的全局最优值,且改进粒子群算法相较于基本粒子群算法能够快速收敛,因此,改进粒子群算法在求解带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型时明显优于基本粒子群算法.

4 结 论

本文在假设不确定收益属于某椭圆不确定集的条件下,首先分析了交易成本约束和期望收益约束的鲁棒对应形式,并由此提出了考虑复杂约束和交易成本的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型;然后,提出了改进粒子群算法以求解该模型;最后,通过实际交易数据进行了数值分析.研究表明,改进粒子群算法在求解带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型时要明显优于基本粒子群算法,且带复杂约束的鲁棒均值-CVaR 投资组合模型较名义均值-CVaR 投资组合模型具有更多优势,兼顾了解的鲁棒性和最优性.

参考文献(References)

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. J of Finance, 1952, 7(1): 77-91.

[2] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. J of Risk, 2000, 2: 21-42.

[3] 梁锡坤,徐成贤,郑冬.鲁棒投资组合选择优化问题的研究进展[J].运筹学学报,2014,18(2): 87-95.
(Liang X K, Xu C X, Zheng D. Advances in robust portfolio selection problem[J]. OR Transaction, 2014, 18(2): 87-95.)

[4] Soyster A L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming[J]. Operations Research, 1973, 21(5): 1154-1157.

[5] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization[J]. Mathematics of Operations Research, 1998, 23(4): 769-805.

[6] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs[J]. Operations Research Letters, 1999, 25(1): 1-13.

[7] Ben-Tal A, El Ghaoui L, Nemirovski A. Robust optimization[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009.

[8] El Ghaoui L, Lebret H. Robust solution to least squares problems with uncertain data[J]. SIAM J on Matrix Analysis and Applications, 1997, 18(4): 1035-1064.

[9] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness[J]. Operations Research, 2004, 52(1): 35-53.

[10] Fabozzi F J, Huang D, Zhou G. Robust portfolios: Contributions from operations research and finance[J]. Annals of Operations Research, 2010, 176(1): 191-220.

[11] Gabrel V, Murat C, Thiele A. Recent advances in robust optimization: An overview[J]. European J of Operational Research, 2014, 235(3): 471-483.

[12] Goldfarb D, Iyengar G. Robust portfolio selection problems[J]. Mathematics of Operations Research, 2003, 28(1): 1-38.

[13] Ghaoui L El, Oks M, Oustry F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach[J]. Operations Research, 2003, 51(4): 543-556.

[14] Huang D, Fabozzi F J, Fukushima M. Robust portfolio selection with uncertain exit time using worst-case VaR strategy[J]. Operations Research Letters, 2007, 35(5): 627-635.

[15] Huang D, Zhu S, Fabozzi F J, et al. Portfolio selection under distribution uncertainty: A relative robust CVaR approach[J]. European J of Operational Research, 2010, 203(1): 185-194.

[16] Zhu S, Fukushima M. Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management[J]. Operations Research, 2009, 57(5): 1155-1168.

[17] Natarajan K, Pachamanova D, Sim M. Incorporating asymmetric distributional information in robust value-at-risk optimization[J]. Management Science, 2008, 54(3): 573-585.

[18] Sadjadi S J, Gharakhani M, Safari E. Robust optimization framework for cardinality constrained portfolio problem[J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(1): 91-99.

[19] Fastrich B, Winker P. Robust portfolio optimization with a hybrid heuristic algorithm[J]. Computational Management Science, 2012, 9(1): 63-88.

[20] Chen Z, Wang Y. Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization[J]. J of Bank Finance, 2008, 32(12): 2667-2673.

[21] Arnott R D, Wagner W H. The measurement and control of trading costs[J]. Financial Anal J, 1990, 46(6): 73-80.

[22] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C]. Proc of the 6th Int Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya, 1995, 1: 39-43.