

NGM(1, 1, k) 模型的背景值及时间响应函数优化

刘震, 党耀国, 魏龙

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106)

摘要: 针对 NGM(1, 1, k) 的基本形式与白化微分方程的跳跃性关系, 尝试对 NGM(1, 1, k) 模型进行优化. 首先对白化微分方程积分, 得到新的 NGM(1, 1, k) 参数估计基本形式, 通过定义其中的前置与后置背景值, 分析误差产生的几何原因, 进而推导背景值计算公式; 然后利用误差平方和构建期望函数, 求解时间响应函数中的最优常数表达式; 总结优化后的 NGM(1, 1, k) 模型的建模步骤, 并证明该模型具有非齐次白指数重合性; 最后, 通过两个算例将优化模型与经典模型进行对比, 取得了良好的效果, 进而验证了所提出模型的有效性和实用性.

关键词: 灰色预测; NGM(1, 1, k); 背景值; 时间响应函数

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Optimization of background value and time response function in NGM(1, 1, k)

LIU Zhen, DANG Yao-guo, WEI Long

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China.

Correspondent: LIU Zhen, E-mail: liuzhen_nuaa@126.com)

Abstract: According to the jumping relation between the basic form and the whitenization differential equation in NGM(1, 1, k), the model is optimized. Firstly, the whitenization differential equation is integrated in the interval $[k-1, k]$ to obtain the new parameter estimation basic form of NGM(1, 1, k). The front and before background value are defined and the precise calculation formulas are derived. The causes of error are also analyzed in the geometric relationship. Then the desirability function is built based on the sum of the error square, to determine the optimal constant value in the time response function. The optimized modeling steps of NGM(1, 1, k) are summarized, and it is proved that the model has a non-homogeneous white exponential superposition. Finally, the optimization model and the classical model are contrasted by two examples, the good results obtained show the effectiveness and practicality of the proposed optimization model.

Key words: grey prediction; NGM(1, 1, k); background value; time response function

0 引言

灰色预测理论是灰色系统的一个重要组成部分, 由于其在数据量较少的情况下可得到较为准确的拟合与预测结果^[1], 已经广泛应用于城市环境、交通管理、能源分析等众多领域^[2-4]. GM(1, 1) 是灰色预测模型的经典形式, 众多学者对其进行了深入研究, 背景值研究就是其中的重要组成部分. 文献[5]首先提出 GM(1, 1) 参数估计基本形式中的背景值概念, 并给出了几何解释; 文献[6]依据这一思路利用积分解出 GM(1, 1) 背景值的精确值; 文献[7]将背景值的研究

继续向前推进, 利用非齐次指数函数拟合一阶累加序列, 进而通过积分推导出最优背景值计算公式, 实现了 GM(1, 1) 对于齐次指数函数的无偏拟合. 基于以上研究, 文献[8]研究了非等间距 GM(1, 1) 模型的背景值优化; 文献[9-10]对反向累加 GOM(1, 1) 模型的背景值进行了优化; 文献[11-12]对 MGM(1, m) 和灰色 Verhulst 模型的背景值进行了研究; 文献[13]探讨了发展系数与背景值间的关系, 从背景值误差最小化的角度构建了新的 GM(1, 1) 优化模型. 此外, 时间响应函数优化也是影响模型精度的重要原因. 文献

收稿日期: 2015-11-06; 修回日期: 2015-12-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077, 71371098); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(NC2012001, NR2013033); 江苏省研究生培养创新工程项目(KYZZ_0106); 江苏高校哲学社会科学重点研究基地项目(2012JDXM005).

作者简介: 刘震(1987-), 男, 博士生, 从事灰色系统理论的研究; 党耀国(1964-), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与数量经济等研究.

[14]通过控制一阶累加序列预测值和原始值的误差平方达到最小,对GM(1,1)时间响应函数的常数C进行优化;文献[15]根据新信息优先原理,提出了采用第n变量作为初始条件的GM(1,1)和灰色Verhulst模型.

背景值和时间响应函数的优化可有效提升灰色预测模型精度,但是由于GM(1,1)是以齐次指数函数为基础的模型,很难精确拟合具有近似非齐次指数函数规律的数据.针对这一问题,文献[16]首先提出了拟合结果为非齐次指数函数的新型灰色预测模型NGM(1,1,k)^[16];文献[17]提出了含时间幂次项的灰色GM(1,1,t^α)模型,该模型通过控制参数α的取值可分别拟合齐次、非齐次或其他类型的指数函数,当参数α=1时,该模型与NGM(1,1,k)等价;文献[18]分析了灰色预测模型拟合非齐次指数函数序列时产生误差的原因,并据此对NGM(1,1,k)的基本形式和白化微分方程进行改进.而后学者们又针对NGM(1,1,k)模型的无偏化展开研究,文献[19]首先通过优化灰导数得出无偏NGM(1,1,k)模型;文献[20]通过时间响应函数直接求解模型参数,得到NGM(1,1,k)无偏形式;文献[21]将NGM(1,1,k)称为非齐次GM(1,1)模型,通过递推解法推导非齐次灰色无偏预测公式,并给出了不同初始条件对于公式的影响.这3项研究从不同角度实现了NGM(1,1,k)对于非齐次指数函数的完全拟合,并且相互验证.而后文献[22]又对NGM(1,1,k)的初始值进行了优化;文献[23]研究了非等间距NGM(1,1,k)的建模方法.

上述研究极大地推动了灰色预测理论的发展,但是目前NGM(1,1,k)模型的理论基础仍然不够完善,尤其是NGM(1,1,k)基本形式的建立缺乏依据,并且没有针对NGM(1,1,k)背景值优化方面的研究.另一方面,在时间响应函数优化中,现有研究通常采用一阶累加序列误差平方和作为优化依据,但是这一优化条件与模型精度并不完全相关.因此,本文首先对NGM(1,1,k)模型进行定义,分析原始NGM(1,1,k)基本形式与白化微分方程的跳跃关系;然后,根据背景值优化思想,对白化微分方程左右同时积分得到背景值优化后的NGM(1,1,k)参数估计基本形式,定义前置背景值和后置背景值,并且推导两类背景值的精确计算公式;同时对NGM(1,1,k)的时间响应函数进行优化,通过还原序列与原始序列的误差平方和构建新的效用函数,以此为条件求出最优常数,最终形成完整的背景值和时间响应函数优化的NGM(1,1,k)模型建模方法.

1 NGM(1,1,k)的背景值优化

NGM(1,1,k)是GM(1,1)的一种拓展,该模型的还原值为含有常数项的指数函数,可拟合非齐次指数序列.对NGM(1,1,k)模型有如下定义.

定义1 设 $\mathbf{X}_0 = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为非负序列, \mathbf{X}_1 为 \mathbf{X}_0 的一阶累加序列, $\mathbf{X}_1 = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$.则称

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = bk + d \quad (1)$$

为NGM(1,1,k)的原始形式;称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk + d \quad (2)$$

为NGM(1,1,k)的基本形式,其中

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k));$$

称

$$dx^{(1)}(t)/dt + ax^{(1)}(t) = b(t) + d \quad (3)$$

为NGM(1,1,k)模型的白化微分方程.其中: a, b, d 为未知参数.

明确定义后对模型进行求解,即对白化微分方程(3)求解.求解过程如下:设 $u = -ax^{(1)}(t) + bt + d$,将其代入式(3)可得 $du/dt = b - au$,解出 $u = Ce^{-at} + b/a$,将 u 代入原假设,可得时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}, \quad (4)$$

其中C为微分方程解的待定常数.进而可以得出时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = Ce^{-ak} + \frac{b}{a}(k) - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}, \quad (5)$$

还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(1) = Ce^{-a} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}, k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = Ce^{-ak}(1 - e^a) + b/a, \\ k = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

其中:参数 a, b 和 d 需要由模型基本形式的最小二乘估计确定,但是原始NGM(1,1,k)的基本形式(2)与白化微分方程(3)之间存在跳跃性关系,即

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k))$$

与 $x^{(1)}(t)$ 的跳跃性关系,这说明利用式(2)估计的参数来确定式(3)显然缺乏理论根据.因此本文尝试根据背景值优化思想,推导出由白化微分方程(3)变形得到的新的NGM(1,1,k)基本形式,具体方法如下.

对式(3)在区间 $[k-1, k]$ ($k = 2, 3, \dots, n$)取定积分,可得

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b \int_{k-1}^k t dt + d. \quad (7)$$

将式(7)化简后可得

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b\left(k - \frac{1}{2}\right) + d, \\ x^{(0)}(k) - a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b\left(k - \frac{1}{2}\right) + d. \quad (8)$$

其中 $k = 2, 3, \dots, n$.

通过将式(7)和(8)与原始 NGM(1, 1, k) 基本形式(2)进行比较可知, 式(7)用背景值 $\int_{k-1}^k x^{(1)}(t)dt$ 和 $\int_{k-1}^k t dt$ 分别代替了式(2)中的 $\frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$ 和 k , 如图 1 所示.

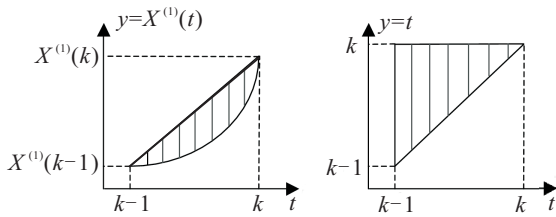


图 1 背景值差异分析

图 1 中的阴影面积即为两类背景值之间的误差. 式(2), (7)和(8)的主要作用是估计白化微分方程(3)中的参数 a, b 和 d , 因此由白化微分方程推导出的式(7)和(8)显得更为合理. 由此可以得到背景值优化后的参数估计基本形式定义如下.

定义 2 已知有非负原始序列 $\mathbf{X}_0 = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 和一阶累加序列 $\mathbf{X}_1 = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, 白化微分方程为 $dx^{(1)}(t)/dt + ax^{(1)} = bt + d$, 其中 a, b, d 为未知参数. 令

$$Z_1^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}x^{(1)}(t) dt, \quad (9)$$

$$Z_2^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k t dt = k - \frac{1}{2}, \quad (10)$$

则称

$$x^{(0)}(k) + aZ_1^{(1)}(k) = bZ_2^{(1)}(k) + d \quad (11)$$

为背景值优化后的 NGM(1, 1, k) 参数估计基本形式. 其中: $Z_1^{(1)}(k)$ 称为前置背景值, $Z_2^{(1)}(k)$ 称为后置背景值, $k = 2, 3, \dots, n$.

定义 2 中已经得出后置背景值的计算公式, 但是前置背景值的计算公式尚不明确, 因此在参数估计之前还需要对前置背景值 $Z^{(1)}(k)$ 的公式进行推导. 由于 NGM(1, 1, k) 模型的还原值为非齐次指数序列, 设

$$x^{(0)}(k) = gA^k + p, \quad (12)$$

累加后可得

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) = \frac{gA}{A-1}A^k + pk - \frac{gA}{A-1}. \quad (13)$$

为了计算简便, 令 $G = gA/(A-1)$, 并且将离散形式转化为连续形式, 得到

$$x^{(1)}(t) = GA^t + pt - G. \quad (14)$$

将式(14)代入前置背景值公式(9)可得

$$Z_1^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t)dt = \int_{k-1}^k (GA^t + pt - G)dt = \frac{GA^k - GA^{k-1}}{\ln A} + p\left(k - \frac{1}{2}\right) - G. \quad (15)$$

由 $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = GA^k - GA^{k-1} + p$ 可得

$$GA^k - GA^{k-1} = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) - p = x^{(0)}(k) - p,$$

将其代入式(15), 可得

$$Z_1^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k) - p}{\ln A} + p\left(k - \frac{1}{2}\right) - G. \quad (16)$$

至此问题转化为求解参数 A, p 和 G , 首先求 A . 为了覆盖 $k = 2, 3, \dots, n$ 的取值范围, 考虑如下两类公式:

$$\frac{x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)} = \frac{1}{A}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1; \quad (17)$$

$$\frac{x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2)}{x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)} = \frac{1}{A}, \quad k = 3, 4, \dots, n. \quad (18)$$

由式(17)可得

$$A = \frac{x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)}. \quad (19)$$

继续求 p , 由于

$$x^{(0)}(k) - Ax^{(0)}(k-1) = p(1-A) \quad (20)$$

可变形为

$$p = \frac{x^{(0)}(k) - Ax^{(0)}(k-1)}{1-A}, \quad (21)$$

将 A 代入式(21), 可得

$$p = \frac{[x^{(0)}(k)]^2 - x^{(0)}(k+1)x^{(0)}(k-1)}{2x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k+1)}. \quad (22)$$

再求 G , 由于 $G = gA/(A-1)$, 需要先求 g . 根据 $x^{(0)}(k) = gA^k + p$, 有

$$g = (x^{(0)}(k) - p)/A^k. \quad (23)$$

代入 A 和 p 后可得

$$g = \frac{[x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)]^{1-k} [x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)]^{k+1}}{x^{(0)}(k-1) + x^{(0)}(k+1) - 2x^{(0)}(k)}. \quad (24)$$

再将式(24)和(19)代入原假设 $G = gA/(A-1)$, 可得

$$G = \frac{[x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)]^{2-k} [x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)]^{k+1}}{[2x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k+1)]^2}. \quad (25)$$

将 A, p 和 G 代入式(16)并化简, 可得前置背景值的第 1 类表达式为

$$Z_{11}^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \frac{[x^{(0)}(k)]^2 - x^{(0)}(k+1)x^{(0)}(k-1)}{2x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k+1)}}{\ln[x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)] - \ln[x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)]} + \frac{[x^{(0)}(k)]^2 - x^{(0)}(k+1)x^{(0)}(k-1)}{2x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k+1)} \left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{[x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)]^{2-k} [x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)]^{k+1}}{[2x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k+1)]^2}, \\ k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (26)$$

由式(2)可得

$$A = \frac{x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2)}. \quad (27)$$

同理求解 p 和 G , 可得前置背景值的第 2 类表达式为

$$Z_{12}^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \frac{[x^{(0)}(k-1)]^2 - x^{(0)}(k)x^{(0)}(k-2)}{2x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2) - x^{(0)}(k)}}{\ln[x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)] - \ln[x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2)]} + \frac{[x^{(0)}(k-1)]^2 - x^{(0)}(k)x^{(0)}(k-2)}{2x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2) - x^{(0)}(k)} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{[x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)]^{3-k} [x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2)]^k}{[2x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k-2) - x^{(0)}(k)]^2}, \quad k = 3, 4, \dots, n. \quad (28)$$

通过算数平均融合两类前置背景值计算公式, 可得

$$Z_1^{(1)}(k) = \begin{cases} Z_{11}^{(1)}(k), & k = 2; \\ \frac{1}{2}[Z_{11}^{(1)}(k) + Z_{12}^{(1)}(k)], & k = 3, 4, \dots, n-1; \\ Z_{12}^{(1)}(k), & k = n. \end{cases} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} 2x^{(0)} &\neq x^{(0)}(k-1) + x^{(0)}(k+1), \\ 2x^{(0)}(k-1) &\neq x^{(0)}(k) + x^{(0)}(k-2), \\ x^{(0)}(k+1) &\neq x^{(0)}(k), \quad x^{(0)}(k) \neq x^{(0)}(k-1), \\ x^{(0)}(k-1) &\neq x^{(0)}(k-2). \end{aligned}$$

式(29)为优化后的 NGM(1, 1, k) 前置背景值计算公式. 需要说明的是, 该公式通过两类公式相互补充的方法覆盖了定义 2 中 $k = 2, 3, \dots, n$ 的取值范围, 中间部分由于计算结果重合而进行算数平均, 首末两点由于只有唯一计算结果, 可直接取值.

2 GM(1, 1, k) 的时间响应函数优化

在背景值优化后, 时间响应函数

$$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}$$

中待定常数 C 的选取也是影响 NGM(1, 1, k) 模型精度的重要原因. 原始 NGM(1, 1, k) 模型通常采用 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 作为初始条件确定常数 C , 但是这种确定常数的方法缺乏理论依据. 本文尝试以原始序列和还原序列间拟合误差平方和最小为条件选取最优常数 C .

定理 1 已知有非负原始序列 $\mathbf{X}_0 = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 相应的离散时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = Ce^{-ak} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a},$$

其中 a, b, d 为已确定参数, 则该时间响应函数的最优常数为

$$C^* = \frac{e^{-a} \left[x^{(0)}(1) + \frac{b}{a^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{a} \right]}{e^{-2a} + (1 - e^a)^2 \sum_{k=2}^n e^{-2ak}} + \frac{(e^a - 1) \sum_{k=2}^n e^{-ak} \left[\frac{b}{a} - x^{(0)}(k) \right]}{e^{-2a} + (1 - e^a)^2 \sum_{k=2}^n e^{-2ak}}. \quad (30)$$

证明 首先根据离散时间响应序列得到模型的还原序列

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(1) = Ce^{-a} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}, & k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = Ce^{-ak}(1 - e^a) + \frac{b}{a}, & k = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

由此构造误差平方和函数

$$F(C) = [\hat{x}^{(0)}(1) - x^{(0)}(1)]^2 + \sum_{k=2}^n [\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)]^2 = \left[Ce^{-a} + \frac{b}{a} + \frac{d}{a} - \frac{b}{a^2} - x^{(0)}(1) \right]^2 + \sum_{k=2}^n \left[Ce^{-ak}(1 - e^a) + \frac{b}{a} - x^{(0)}(k) \right]^2.$$

为了求解该误差平方和的最小值, 令 $F'(C) = 0$, 可得

$$C = \frac{e^{-a} \left[x^{(0)}(1) + \frac{b}{a^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{a} \right]}{e^{-2a} + (1 - e^a)^2 \sum_{k=2}^n e^{-2ak}} + \frac{(1 - e^a) \sum_{k=2}^n e^{-ak} \left[x^{(0)}(k) - \frac{b}{a} \right]}{e^{-2a} + (1 - e^a)^2 \sum_{k=2}^n e^{-2ak}}.$$

又由于 $F''(C) = 2e^{-2a} + 2(1 - e^a)^2 \sum_{k=2}^n e^{-2ak} > 0$, 由此可知该点即为误差平方和最小点的常数. \square

优化后的 NGM(1, 1, k) 模型建模步骤如下:

Step 1: 根据背景值优化后的 NGM(1, 1, k) 参数估计基本形式(11), 令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= [a \quad b \quad d]^T, \\ \mathbf{Y} &= [x^{(0)}(2) \quad x^{(0)}(3) \quad \dots \quad x^{(0)}(n)]^T, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -Z_1^{(1)}(2) & Z_2^{(1)}(2) & 1 \\ -Z_1^{(1)}(3) & Z_2^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -Z_1^{(1)}(n) & Z_2^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

模式(11)所代表的方程组可转化为矩阵相乘形式 $Y = B\mu$, 其中前置背景值 $Z_1^{(1)}(k)$ 和后置背景值 $Z_2^{(1)}(k)$ 的计算公式见式(29)和(10). 利用最小二乘法可得出参数估计为

$$\hat{\mu} = (B^T B)^{-1} B^T Y = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{d}]^T.$$

Step 2: 求解最优常数

$$C^* = \frac{e^{-\hat{a}} \left[x^{(0)}(1) + \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} - \frac{\hat{d}}{\hat{a}} \right] + e^{-2\hat{a}} + (1 - e^{\hat{a}})^2 \sum_{k=2}^n e^{-2\hat{a}k}}{(e^{\hat{a}} - 1) \sum_{k=2}^n e^{-\hat{a}k} \left[\frac{\hat{b}}{\hat{a}} - x^{(0)}(k) \right] + e^{-2\hat{a}} + (1 - e^{\hat{a}})^2 \sum_{k=2}^n e^{-2\hat{a}k}}.$$

Step 3: 将 Step 1 和 Step 2 中的参数估计值代入式(5)和(6), 可得离散时间响应序列和还原值的估计值为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = C^* e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} k - \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} + \frac{\hat{d}}{\hat{a}}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} C^* e^{-\hat{a}} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} - \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} + \frac{\hat{d}}{\hat{a}}, & k = 1; \\ C^* e^{-\hat{a}k} (1 - e^{\hat{a}}) + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, & k = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

性质 1 背景值及时间响应函数优化后的 NGM(1, 1, k) 模型具有非齐次白指数重合性.

证明 假设原始序列为具有完全非齐次指数函数规律的原始序列

$$x^{(0)}(k) = de^{a(k-1)} + b, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

则其一阶累加序列为

$$x^{(1)}(k) = d \frac{1 - e^{ak}}{1 - e^a} + bk, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

此时, 由式(29)和(10)可得

$$Z_1^{(1)}(k) = \frac{d}{a} e^{a(k-1)} + b \left(k - \frac{1}{2} \right) + \frac{d}{1 - e^a},$$

$$Z_2^{(1)}(k) = k - \frac{1}{2}.$$

构建矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} de^a + b \\ de^{2a} + b \\ \vdots \\ de^{(n-1)a} + b \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{a} e^a + \frac{3}{2} b + \frac{d}{1 - e^a} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{d}{a} e^{2a} + \frac{5}{2} b + \frac{d}{1 - e^a} & \frac{5}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d}{a} e^{(n-1)a} + \left(n - \frac{1}{2} \right) b + \frac{d}{1 - e^a} & n - \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

并将其代入

$$\hat{\mu} = (B^T B)^{-1} B^T Y = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{d}]^T.$$

由于计算过程过于复杂, 此处直接给出结果

$$\hat{a} = -a, \ \hat{b} = -ab, \ \hat{d} = \frac{ad - b + be^a}{e^a - 1},$$

再根据式(30)计算出 $C^* = \frac{d}{e^a - 1}$. 将以上参数估计值代入式(5), 可得时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = d \frac{1 - e^{ak}}{1 - e^a} + bk.$$

该式与原始数据的一阶累加序列相同. □

需要注意, 本文模型与文献[19-22]中的模型从不同角度对 NGM(1, 1, k) 模型进行优化, 虽然都实现了对于非齐次指数函数的无偏拟合, 但优化路径与建模方法差异较大. 若原始序列在非齐次指数函数基础上逐渐偏移, 则最终结果的差异也会逐渐变大, 这在下面的算例中将有所体现.

3 算例

例 1 为了全面考察模型优化后的效果变化, 本文采用文献[19]中的 6 组不同形态数据进行模拟. 这 6 组数据分别表现为上升凸、上升凹、下降凸、下降凹、严格非齐次以及近似非齐次, 分别采用经典 GM(1, 1) 模型、文献[7]中的背景值优化 GM(1, 1) 模型、初值优化后的无偏 NGM(1, 1, k) 模型以及本文背景值与时间响应函数同时优化后的 NGM(1, 1, k) 模型对模拟效果进行比较, 所得结果如表 1 所示.

由表 1 可以看出, 本文所构建的背景值与时间响应函数优化后的 NGM(1, 1, k) 模型在 6 种类型数据中均取得了最高的精度. 虽然无偏 NGM(1, 1, k) 模型与本文模型的精度相似, 并且在第 5 组严格非齐次数据中同时实现了完全拟合, 但通过仔细观察发现其精度始终有所差别, 这表明了本文模型的有效性.

例 2 为了进一步验证本文所构建模型在处理实际问题时的效果, 同样采用经典 GM(1, 1) 模型、文献[7]中的背景值优化 GM(1, 1) 模型、初值优化无偏 NGM(1, 1, k) 模型以及本文构建的背景值与时间响应函数同时优化的 NGM(1, 1, k) 模型对南京市天然气供气总量进行预测. 由于南京市居民天然气改造自 2004 年开始, 至今只有 10 年的时间, 并且初始阶段数据受外界干扰较大, 导致其不具有规律性, 因此选用 2009~2013 年的数据进行建模, 预留 2014 年数据验证模型的预测效果, 结果如表 2 所示.

由表 2 可见, 本文模型在拟合误差和预测误差中均取得了最优的结果, 这说明在预测天然气供气总量问题中取得了较好的效果, 表明了本文模型的实用性.

表1 3种模型计算结果及精度比较

序列	建模数据	模型	模拟数据	平均相对误差/%
X_1	1.2, 2.9, 4.2, 5.1, 5.8 (上升凸)	经典 GM(1, 1)	1.200 0, 3.213 0, 3.947 9, 4.850 8, 5.960 2	4.889 1
		背景值优化 GM(1, 1)	1.200 0, 3.251 9, 3.820 3, 4.488 1, 5.272 5	8.453
		优化无偏 NGM(1, 1, k)	1.200 0, 2.903 0, 4.187 2, 5.117 7, 5.791 8	0.979
		本文模型	1.212 4, 2.898 2, 4.170 7, 5.150 7, 5.905 5	0.921 2
X_2	8.5, 16.4, 32.3, 64.2, 128.1 (上升凹)	经典 GM(1, 1)	8.500 0, 15.345 0, 29.760 1, 57.716 8, 111.936 2	7.402 6
		背景值优化 GM(1, 1)	8.500 0, 16.183 9, 32.331 7, 64.591 2, 129.038 2	0.551 5
		优化无偏 NGM(1, 1, k)	8.500 4, 16.396 0, 32.307 4, 64.195 1, 128.101 1	0.120 0
		本文模型	8.482 6, 16.369 7, 32.284 2, 64.182 6, 128.118 5	0.095 8
X_3	5.8, 5.1, 4.2, 2.9, 1.2 (下降凸)	经典 GM(1, 1)	5.800 0, 5.329 2, 3.718 8, 2.595 1, 1.810 9	15.474 9
		背景值优化 GM(1, 1)	5.800 0, 4.471 8, 4.224 1, 3.990 1, 3.769 0	52.912 7
		优化无偏 NGM(1, 1, k)	5.800 0, 5.107 3, 4.180 8, 2.917 5, 1.194 7	2.328 5
		本文模型	5.836 3, 5.127 3, 4.206 7, 2.923 6, 1.135 5	1.502 5
X_4	128.1, 64.2, 32.3, 16.4, 8.5 (下降凹)	经典 GM(1, 1)	128.100 0, 62.461 3, 32.414 4, 16.821 5, 8.729 5	1.666 6
		背景值优化 GM(1, 1)	128.100 0, 64.599 7, 29.859 4, 13.801 7, 6.379 4	9.793 9
		优化无偏 NGM(1, 1, k)	128.100 0, 64.201 1, 32.295 1, 16.407 4, 8.496 0	0.921 7
		本文模型	128.135 2, 64.175 7, 32.340 0, 16.572 4, 8.763 0	0.867 0
X_5	5, 11, 29, 83, 245 (严格非齐次)	经典 GM(1, 1)	5.000 0, 7.556 0, 20.095 8, 53.446 7, 142.146 3	27.920 2
		背景值优化 GM(1, 1)	5.000 0, 9.046 8, 26.947 2, 80.265 8, 239.082 8	6.108 9
		优化无偏 NGM(1, 1, k)	5.000 0, 11.000 0, 29.000 0, 83.000 0, 245.000 0	0.000 0
		本文模型	5.000 0, 11.000 0, 29.000 0, 83.000 0, 245.000 0	0.000 0
X_6	1.4, 2.0, 2.8, 3.9, 5.4 (近似非齐次)	经典 GM(1, 1)	1.400 0, 1.990 6, 2.759 8, 3.826 2, 5.304 8	1.112 0
		背景值优化 GM(1, 1)	1.400 0, 2.014 1, 2.789 8, 3.864 1, 5.352 3	0.574 8
		优化无偏 NGM(1, 1, k)	1.400 0, 1.999 4, 2.801 4, 3.898 8, 5.400 3	0.063 6
		本文模型	1.401 8, 2.000 2, 2.799 4, 3.896 1, 5.401 2	0.056 5

表2 南京城市天然气供气总量(万立方米)拟合与预测精度比较

模型	2009年	2010年	2011年	2012年	2013年	平均拟合相对误差/%	2014年	预测相对误差/%
原始数据	45 195	57 891	67 921	82 413	86 128	—	103 868	—
经典 GM(1, 1)	45 195	59 651	68 066	77 669	88 627	2.98	101 130	2.64
背景值优化 GM(1, 1)	45 195	61 608	68 178	75 449	83 495	3.66	92 400	11.04
优化无偏 NGM(1, 1, k)	45 009	55 776	72 606	80 811	84 812	2.89	86 763	16.47
本文模型	45 047	57 985	69 571	81 364	93 366	2.52	105 581	1.65

4 结 论

NGM(1, 1, k) 是 GM(1, 1) 的一类拓展, 该模型不仅可以拟合非齐次指数序列, 还可以拟合齐次指数函数序列, 因此也可以说 GM(1, 1) 是 NGM(1, 1, k) 的一种特殊形式. 但是, 由于 NGM(1, 1, k) 增加了一个参数, 对于模型的控制难度也就相应增加. 对此, 本文从背景值优化角度提出了一种新的 NGM(1, 1, k) 模型参数估计方法, 该模型可以完全拟合具有非齐次或者齐次指数函数的序列. 同时, 本文还构建了一种待定常数选取方法, 该方法可促进模型精度进一步提高.

参考文献(References)

- [1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 226-227.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its applications[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 226-227.)
- [2] Rucy-Jing Lian. Enhanced adaptive grey-prediction self-organizing fuzzy sliding-mode controller for robotic systems[J]. Information Sciences, 2012, 236(1): 186-204.
- [3] Dinh Quang Truong, Kyoung Kwan Ahn, Nguyen Thanh

Trung. Design of an advanced time delay measurement and a smart adaptive unequal interval grey predictor for real-time nonlinear control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2013, 60(10): 4547-4589.

- [4] Wei Niu, Juan Cheng, Guoqing Wang. Applications of extension grey prediction model for power system forecasting[J]. J of Combinatorial Optimization, 2013, 26(3): 555-567.
- [5] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用(I)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, (4): 98-103.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model(I)[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2000, 20(4): 98-103.)
- [6] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)
- [7] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 61-67.

- (Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law [J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(2): 61-67.)
- [8] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距 GM(1,1) 模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162.
(Wang Y M, Dang Y G, Wang Z X. The optimization of background value in non-equidistant GM(1,1) model [J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 159-162.)
- [9] 杨知, 任鹏, 党耀国. 反向累加生成与灰色 GOM(1,1) 模型的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(8): 160-164.
(Yang Z, Ren P, Dang Y G. Grey opposite-direction accumulated generation and optimization of GOM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(8): 160-164.)
- [10] 练郑伟, 党耀国, 王正新. 反向累加生成的特性及 GOM(1,1) 模型的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(9): 2306-2312.
(Lian Z W, Dang Y G, Wang Z X. Properties of accumulated generating operation in opposite-direction and optimization of GOM(1,1) model [J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(9): 2306-2312.)
- [11] 熊萍萍, 党耀国, 王正新. MGM(1,m) 模型背景值的优化[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 806-810.
(Xiong P P, Dang Y G, Wang Z X. Optimization of background value in MGM(1,m) model[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 806-810.)
- [12] 熊萍萍, 党耀国, 姚天祥, 等. 灰色 Verhulst 模型背景值优化的建模方法研究[J]. 中国管理科学, 2012, 20(6): 154-159.
(Xiong P P, Dang Y G, Yao T X, et al. The research on the modeling method of background value optimization in grey Verhulst model [J]. Chinese J of Management Science, 2012, 20(6): 154-159.)
- [13] 徐宁, 党耀国, 丁松. 基于误差最小化的 GM(1,1) 模型背景值优化方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(2): 283-288.
(Xü N, Dang Y G, Ding S. Optimization method of background value in GM(1,1) model based on least error [J]. Control and Decision, 2015, 30(2): 283-288.)
- [14] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1,1) 模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学, 2003, 11(4): 55-58.
(Liu B, Liu S F, Zhai Z J, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(4): 55-58.)
- [15] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J]. 中国管理科学, 2005, 13(1): 133-136.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B. The GM models that $x^{(1)}(n)$ be taken as initial value[J]. Chinese J of Management Science, 2005, 13(1): 133-136.)
- [16] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)
- [17] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色 GM(1, 1, t^α) 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey GM(1, 1, t^α) model with time power and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)
- [18] 站立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 689-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(3): 689-694.)
- [19] 陈芳, 魏勇. 近非齐次指数序列 GM(1,1) 模型灰导数的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2874-2878.
(Chen F, Wei Y. Approximate non-homogeneous index sequence GM(1,1) model of grey derivative optimization[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(11): 2874-2878.)
- [20] 童明余, 周孝华, 曾波. 基于直接估计法的 NGM(1,1) 模型拓展[J]. 控制与决策, 2015, 30(10): 1841-1846.
(Tong M Y, Zhou X H, Zeng B. Expand of NGM(1,1) model based on the direct estimation method[J]. Control and Decision, 2015, 30(10): 1841-1846.)
- [21] 江艺羨, 张岐山. 近似非齐次无偏 GM(1,1) 模型的递推解法及应用[J]. 控制与决策, 2015, 30(12): 2199-2204.
(Jiang Y X, Zhang Q S. Recursive solution to approximate non-homogeneous unbiased GM(1,1) model and its application[J]. Control and Decision, 2015, 30(12): 2199-2204.)
- [22] 鲁宝春, 赵深, 田盈, 等. 优化系数的 NGM(1,1,k) 模型在中长期电量预测中的应用[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(12): 98-103.
(Lu B C, Zhao S, Tian Y, et al. Mid-long term electricity consumption forecasting based on improved NGM(1,1,k) gray model[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(12): 98-103.)
- [23] 姜爱平, 张启敏. 非等间距近似非齐次指数序列的灰色建模方法及其优化[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(12): 3199-3203.
(Jiang A P, Zhang Q M. Methods and optimum of grey modeling for approximation non-homogenous and non-equidistant series[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(12): 3199-3203.)