

## 损失数据线性参数系统的递推最小二乘辨识方法

丁 锋, 汪菲菲

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对损失数据线性参数系统的参数辨识问题, 借助辅助模型辨识思想推导出其变递推间隔辅助模型递推最小二乘算法. 为了提高该算法的计算效率, 利用分解技术得到变递推间隔分解递推最小二乘算法估计系统参数. 此外, 在变递推间隔分解递推最小二乘算法中引入遗忘因子, 从而提高参数估计精度和收敛速度. 仿真结果表明, 所提出的算法能有效估计系统参数.

**关键词:** 参数估计; 辅助模型; 分解技术; 损失数据; 线性参数系统

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Recursive least squares identification algorithms for linear-in-parameter systems with missing data

DING Feng, WANG Fei-fei

(School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: DING Feng, E-mail: fding@jiangnan.edu.cn)

**Abstract:** An interval-varying auxiliary model based recursive least squares (AM-RLS) algorithm is derived for linear-in-parameter systems with missing data by means of the auxiliary model identification idea. In order to improve the computation efficiency, an interval-varying decomposition AM-RLS algorithm is proposed for estimating the system parameters. The introduction of the forgetting factors can improve the parameter estimation accuracy and accelerate the convergence rates of the interval-varying decomposition based AM-RLS algorithm. The simulation results show that the proposed algorithms can effectively estimate the parameters of the system.

**Keywords:** parameter estimation; auxiliary model; decomposition technique; missing data; linear-in-parameter system

### 0 引 言

在工业中, 系统总是存在许多不可测的变量, 如状态变量和内部变量. 辅助模型辨识思想对于信息向量中包含不可测变量系统的辨识是非常有效的, 其基本思想是利用可测信息建立一个辅助模型, 用辅助模型的输出代替不可测的变量<sup>[1]</sup>. 近年来发展出一些基于辅助模型的辨识方法, 例如有色噪声干扰的双率输出误差系统基于辅助模型的递推增广最小二乘方法<sup>[2]</sup>, 线性参数系统基于辅助模型的分解最小二乘迭代算法<sup>[3]</sup>和伪线性自回归滑动平均系统基于辅助模型的滤波递推最小二乘估计算法<sup>[4]</sup>.

模型分解技术是一种用来处理参数数目多的大规模系统参数辨识问题的有效工具. 它的关键是将一个系统分为几个子模型, 每个子模型中涉及的协方差

矩阵的维数变小, 从而减小辨识算法的计算负担<sup>[5]</sup>. 文献[6]针对方程误差自回归滑动平均系统提出了基于分解的递阶梯度迭代算法和递阶最小二乘迭代算法; 文献[7]针对输入非线性系统, 基于分解技术和关键变量分离原理推导了最小二乘辨识算法.

在实际应用中, 由于传感器故障或硬件设备限制等原因, 常常会使系统出现在某些采样点的观测数据难以得到的情况. 对丢失数据的重建是信号滤波或信号建模的基础<sup>[8-10]</sup>, 丢失的数据可以用动态模型重建<sup>[11]</sup>. Ding 等针对含不规则损失数据系统, 推导了带遗忘因子的辅助模型最小二乘算法<sup>[12]</sup>; 基于粒子滤波方法和最大期望算法, Gopaluni 研究了缺失观测数据的非线性过程的辨识问题<sup>[13]</sup>. 含损失数据系统的辨识问题是很重要的, 但是常规的辨识算法不能直接应

收稿日期: 2015-11-03; 修回日期: 2016-01-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273194).

作者简介: 丁锋(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统辨识、自适应控制等研究; 汪菲菲(1991—), 女, 硕士生, 从事系统辨识的研究.

用. 本文针对存在损失数据的线性参数系统的参数辨识问题, 推导基于辅助模型的变递推间隔递推最小二乘算法, 并在此基础上使用模型分解技术提高算法的计算效率, 同时引入遗忘因子, 从而提高算法的参数估计精度和收敛速度.

## 1 系统描述与辨识模型

为方便起见定义一些符号: “ $A =: X$ ”或“ $X := A$ ”代表  $A$  被定义为  $X$ ; 符号  $\mathbf{I}_n$  代表一个  $n \times n$  维的单位矩阵; 上标  $\mathbf{T}$  代表矩阵/向量的转置;  $\mathbf{1}_n$  代表一个元素都是 1 的  $n$  维列向量.

考虑如下线性参数系统:

$$A(z)y(t) = \frac{\phi^T(t)\theta}{F(z)} + v(t). \quad (1)$$

其中:  $y(t) \in \mathbf{R}$  是系统输出;  $\theta \in \mathbf{R}^m$  是系统的部分参数向量; 信息向量  $\phi(t) \in \mathbf{R}^m$  是由系统的观测数据构成的;  $v(t) \in \mathbf{R}$  是一个零均值, 方差为  $\sigma^2$  的随机噪声;  $A(z)$  和  $F(z)$  是单位后移算子  $z^{-1}[z^{-1}y(t) = y(t-1)]$  的常系数多项式, 即

$$A(z) := 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_{n_a}z^{-n_a},$$

$$a_i \in \mathbf{R};$$

$$F(z) := 1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \cdots + f_{n_f}z^{-n_f},$$

$$f_i \in \mathbf{R}.$$

假设阶次  $n_a$  和  $n_f$  都是已知的. 为了不失一般性, 设  $t \leq 0$  时,  $y(t) = 0$ ,  $\phi(t) = \mathbf{0}$ ,  $v(t) = 0$ . 记  $n := m + n_a + n_f$ .

辨识目标是利用系统的观测数据  $\{y(t), \phi(t)\}$ , 基于辅助模型辨识思想和分解技术推导递推算法, 从而估计系统的参数向量  $\theta$  及多项式  $A(z)$  和  $F(z)$  的系数  $a_i$  和  $f_i$ , 并通过计算机仿真评估参数估计精度.

定义中间变量

$$x(t) := \frac{\phi^T(t)\theta}{F(z)} \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

定义参数向量  $\vartheta$  和信息向量  $\varphi(t)$  如下:

$$\vartheta := [\mathbf{a}^T, \mathbf{f}^T, \theta^T]^T \in \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{a} := [a_1, a_2, \cdots, a_{n_a}]^T \in \mathbf{R}^{n_a},$$

$$\mathbf{f} := [f_1, f_2, \cdots, f_{n_f}]^T \in \mathbf{R}^{n_f},$$

$$\varphi(t) := [\varphi_y^T(t), \varphi_x^T(t), \phi^T(t)]^T \in \mathbf{R}^n,$$

$$\varphi_y(t) :=$$

$$[-y(t-1), -y(t-2), \cdots, -y(t-n_a)]^T \in \mathbf{R}^{n_a},$$

$$\varphi_x(t) :=$$

$$[-x(t-1), -x(t-2), \cdots, -x(t-n_f)]^T \in \mathbf{R}^{n_f}.$$

借助上述定义, 式 (2) 可以写为

$$x(t) =$$

$$[1 - F(z)]x(t) + \phi^T(t)\theta = \varphi_x^T(t)\mathbf{f} + \phi^T(t)\theta. \quad (3)$$

将式 (3) 代入 (1), 则系统 (1) 可以写为下列辨识模型:

$$y(t) = [1 - A(z)]y(t) + x(t) + v(t),$$

$$y(t) = \varphi_y^T(t)\mathbf{a} + \varphi_x^T(t)\mathbf{f} + \phi^T(t)\theta + v(t), \quad (4)$$

$$y(t) = \varphi^T(t)\vartheta + v(t), \quad (5)$$

其中参数向量  $\vartheta$  包含所有待辨识参数  $\theta$ 、 $a_i$  和  $f_i$ .

## 2 变递推间隔辅助模型递推最小二乘算法

对于损失数据系统的参数辨识问题, 常规的最小二乘方法不能直接应用, 本节研究损失数据系统的变递推间隔递推方法解决这个问题.

损失数据系统是指在一段时间内系统大部分数据是可得到的, 少量数据是缺失的. 因为在实践中输入信号通常是由计算机生成的, 所以系统的输入可认为一般在每一个时刻  $t$  都是可得到的, 本文着重于研究损失输出数据系统的参数辨识问题. 损失输出数据情形如图 1 所示.

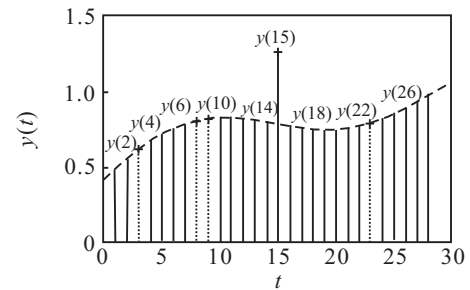


图 1 损失输出数据情形

在图 1 中: “+”代表损失数据或者坏数据(异常数据或不可信数据), 即输出  $y(3)$ ,  $y(8)$ ,  $y(9)$ ,  $y(23)$ ,  $\cdots$  是损失数据,  $y(15)$ ,  $\cdots$  是不可信数据.

为了处理数据丢失情况, 定义一个整数序列  $\{t_s, s = 0, 1, \cdots\}$  满足  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{s-1} < t_s < \cdots$ , 且  $t_s^* := t_s - t_{s-1} \geq 1$ , 使得当  $t = t_s$  ( $s = 0, 1, \cdots$ ) 时, 观测数据  $y(t)$  和  $\varphi_y(t)$  可得到, 并且序列  $\{y(t_s), \varphi(t_s) : s = 0, 1, \cdots\}$  包含所有可得到的观测输出数据.

将式 (3)~(5) 中的  $t$  用  $t_s$  代替, 可以得到

$$x(t_s) = \varphi_x^T(t_s)\mathbf{f} + \phi^T(t_s)\theta, \quad (6)$$

$$y(t_s) = \varphi_y^T(t_s)\mathbf{a} + \varphi_x^T(t_s)\mathbf{f} + \phi^T(t_s)\theta + v(t_s) = \varphi^T(t_s)\vartheta + v(t_s), \quad (7)$$

$$\varphi(t_s) := [\varphi_y^T(t_s), \varphi_x^T(t_s), \phi^T(t_s)]^T,$$

$$\varphi_y(t_s) := [-y(t_s-1), \cdots, -y(t_s-n_a)]^T, \quad (8)$$

$$\varphi_x(t_s) := [-x(t_s-1), \cdots, -x(t_s-n_f)]^T.$$

辨识模型 (7) 的信息向量  $\varphi(t_s)$  中包含 3 个信息向量  $\varphi_y(t_s)$ 、 $\varphi_x(t_s)$  和  $\phi(t_s)$ .  $\phi(t_s)$  是已知的;  $\varphi_x(t_s)$

包含中间变量  $x(t_s - i)$ , 变量是未知的, 但可以用辅助模型的输出定义其估计  $\hat{\varphi}_x(t_s)$ ; 要实现辨识参数的目的,  $\varphi_y(t_s)$  必须是已知的, 但是存在丢失少量数据的情况. 对此定义一个整数序列  $\{t_s, s = 0, 1, 2, \dots\}$ , 使得所有的  $\{y(t_s), \varphi_y(t_s)\}$  是可得到的, 这种方法一般认为是可行的. 例如, 对于图 1 中的损失输出数据情形, 当  $n_a = 3$  时, 定义一个整数序列  $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_9, \dots\}$ , 对应的  $t_0 = 0, t_1 = 7, t_2 = 13, \dots, t_9 = 28, \dots$ , 使得  $\{y(t_0), \varphi_y(t_0)\}, \{y(t_1), \varphi_y(t_1)\}, \{y(t_2), \varphi_y(t_2)\}, \dots, \{y(t_9), \varphi_y(t_9)\}, \dots$  是可得到的.

对于辨识模型 (7), 辨识的困难是信息向量  $\varphi(t_s)$  中含有未知中间变量  $x(t_s - i)$ , 解决方式是在推导辨识方法时, 利用辅助模型辨识思想<sup>[4]</sup>, 将信息向量中的未知量  $x(t_s - i)$  用辅助模型的输出代替.

建立与式 (2) 结构相同的辅助模型

$$x_a(t_s) = \frac{\phi^T(t_s)\theta_a}{F_a(z)}$$

带辅助模型的线性参数系统如图 2 所示.

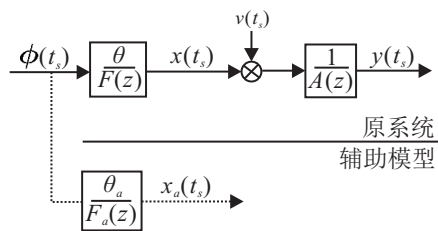


图 2 带辅助模型的线性参数系统

参考式 (2) 写成式 (3) 的方法, 上式可以写为

$$x_a(t_s) = \varphi_{x_a}^T(t_s)\mathbf{f}_a + \phi^T(t_s)\theta_a,$$

其中:  $\mathbf{f}_a$  和  $\theta_a$  是辅助模型的参数向量,  $\varphi_{x_a}(t_s)$  和  $\phi(t_s)$  是辅助模型在时刻  $t_s$  的信息向量. 因为辅助模型是根据系统的可测信息构造的,  $\phi(t_s)$  是已知的观测向量, 故可应用于辅助模型中.

使用参数向量  $\mathbf{f}$  和  $\theta$  的估计  $\hat{\mathbf{f}}(t_s)$  和  $\hat{\theta}(t_s)$  作为辅助模型的参数向量  $\mathbf{f}_a$  和  $\theta_a$ , 即  $\mathbf{f}_a = \hat{\mathbf{f}}(t_s)$  和  $\theta_a = \hat{\theta}(t_s)$ , 信息向量  $\varphi_x(t_s)$  的估计  $\hat{\varphi}_x(t_s)$  作为辅助模型的信息向量  $\varphi_{x_a}(t_s)$ , 即  $\varphi_{x_a}(t_s) = \hat{\varphi}_x(t_s)$ , 那么辅助模型的输出  $x_a(t_s + i)$  可以用下式计算:

$$x_a(t_s + i) = \hat{\varphi}_x^T(t_s + i)\hat{\mathbf{f}}(t_s) + \phi^T(t_s + i)\hat{\theta}(t_s),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, t_{s+1}^* - 1.$$

用辅助模型的输出  $x_a(t_s - i)$  代替未知变量  $x(t_s - i)$  并定义  $\varphi(t_s)$  的估计

$$\hat{\varphi}_x(t_s) := [-x_a(t_s - 1), \dots, -x_a(t_s - n_f)]^T \in \mathbf{R}^{n_f}.$$

令  $\hat{\vartheta}(t_s) := [\hat{\mathbf{a}}^T(t_s), \hat{\mathbf{f}}^T(t_s), \hat{\theta}^T(t_s)]^T$  和  $\hat{\varphi}(t_s)$  分别为  $\vartheta$  和  $\varphi(t_s)$  在时刻  $t = t_s$  的估计. 根据式 (7) 定义并极小化准则函数

$$J(\vartheta) := \sum_{j=1}^s [y(t_j) - \varphi^T(t_j)\vartheta]^2,$$

可以得到估计参数向量  $\vartheta$  的变递推间隔辅助模型递推最小二乘 (V-AM-RLS) 算法

$$\hat{\vartheta}(t_s) = \hat{\vartheta}(t_{s-1}) + \mathbf{P}(t_s)\hat{\varphi}(t_s)[y(t_s) - \hat{\varphi}^T(t_s)\hat{\vartheta}(t_{s-1})], \tag{9}$$

$$\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t_s), t_s \leq t \leq t_{s+1} - 1, \tag{10}$$

$$\mathbf{P}^{-1}(t_s) = \mathbf{P}^{-1}(t_{s-1}) + \hat{\varphi}(t_s)\hat{\varphi}^T(t_s). \tag{11}$$

式 (10) 表示在数据丢失的区间  $[t_s, t_{s+1} - 1]$  内, 参数估计保持不变.

为了避免协方差阵  $\mathbf{P}(t_s)$  求逆计算, 定义如下增益向量:

$$\mathbf{L}(t_s) := \mathbf{P}(t_s)\varphi(t_s) = \mathbf{P}(t_{s-1})\hat{\varphi}(t_s)[1 + \hat{\varphi}^T(t_s)\mathbf{P}(t_{s-1})\hat{\varphi}(t_s)]^{-1},$$

则协方差矩阵  $\mathbf{P}(t_s)$  可以用下式更新:

$$\mathbf{P}(t_s) = [\mathbf{I}_n - \mathbf{L}(t_s)\hat{\varphi}^T(t_s)]\mathbf{P}(t_{s-1}).$$

初始化算法, 一般取  $\hat{\vartheta}(t_0)$  为一个小的实向量,  $\mathbf{P}(t_0)$  为一个大的正定矩阵, 例如, 置  $\hat{\vartheta}(t_0) = \mathbf{1}_n/p_0$ ,  $\mathbf{P}(t_0) = p_0\mathbf{I}_n$ ,  $p_0 = 10^6$ .

### 3 变递推间隔分解递推最小二乘算法

当系统参数数目很多时, 最小二乘算法协方差矩阵的维数大, 因此算法计算量大. 为了提高算法的计算效率, 利用辨识模型分解研究损失数据线性参数系统的辨识问题.

辨识模型 (7) 中包含了 3 个子信息向量  $\varphi_y(t_s)$ 、 $\varphi_x(t_s)$  和  $\phi(t_s)$ , 令已知信息向量  $\varphi_y(t_s)$  和  $\phi(t_s)$  为一组, 未知信息向量  $\varphi_x(t_s)$  为一组, 定义已知组信息向量为

$$\varphi_1(t_s) := [\varphi_y^T(t_s), \phi^T(t_s)]^T \in \mathbf{R}^{n_a+m}, \tag{12}$$

对应的参数向量为

$$\theta_1 := [\mathbf{a}^T, \theta^T]^T \in \mathbf{R}^{n_a+m}.$$

引入两个中间变量

$$y_1(t_s) := y(t_s) - \varphi_x^T(t_s)\mathbf{f},$$

$$y_2(t_s) := y(t_s) - \varphi_1^T(t_s)\theta_1.$$

根据递阶辨识原理, 将辨识模型 (7) 分解为两个虚拟子辨识模型

$$y_1(t_s) = \varphi_1^T(t_s)\theta_1 + v(t_s), \tag{13}$$

$$y_2(t_s) = \varphi_x^T(t_s)\mathbf{f} + v(t_s). \tag{14}$$

待辨识的参数向量  $\theta_1 = [\mathbf{a}^T, \theta^T]^T$  和  $\mathbf{f}$  分别被包含在这两个子辨识模型中.

令  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  ( $0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ ) 为遗忘因子, 根据辨

识模型 (13) 和辨识模型 (14) 定义两个二次函数

$$J_1(\boldsymbol{\theta}_1) := \sum_{j=1}^s \lambda_1^{s-j} [y_1(t_j) - \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_j) \boldsymbol{\theta}_1]^2,$$

$$J_2(\mathbf{f}) := \sum_{j=1}^s \lambda_2^{s-j} [y_2(t_j) - \boldsymbol{\varphi}_x^T(t_j) \mathbf{f}]^2.$$

令  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_s) = [\hat{\mathbf{a}}^T(t_s), \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t_s)]^T$  和  $\hat{\mathbf{f}}(t_s)$  分别是  $\boldsymbol{\theta}_1$  和  $\mathbf{f}$  在时刻  $t_s$  的估计. 极小化  $J_1(\boldsymbol{\theta}_1)$  和  $J_2(\mathbf{f})$ , 可以得到估计参数向量  $\boldsymbol{\theta}_1$  和  $\mathbf{f}$  的带遗忘因子的变递推间隔分解递推最小二乘 (V-FF-D-RLS) 算法<sup>[15-16]</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_s) &= \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1}) + \mathbf{P}_1(t_s) \boldsymbol{\varphi}_1(t_s) [y_1(t_s) - \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1})] &= \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1}) + \mathbf{P}_1(t_s) \boldsymbol{\varphi}_1(t_s) [y(t_s) - & \\ \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1}) - \boldsymbol{\varphi}_x^T(t_s) \mathbf{f}], & \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(t_s) &= \\ \frac{1}{\lambda_1} \left[ \mathbf{P}_1(t_{s-1}) - \frac{\mathbf{P}_1(t_{s-1}) \boldsymbol{\varphi}_1(t_s) \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \mathbf{P}_1(t_{s-1})}{\lambda_1 + \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \mathbf{P}_1(t_{s-1}) \boldsymbol{\varphi}_1(t_s)} \right], & \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}(t_s) &= \\ \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1}) + \mathbf{P}_2(t_s) \boldsymbol{\varphi}_x(t_s) [y_2(t_s) - \boldsymbol{\varphi}_x^T(t_s) \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1})] &= \\ \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1}) + \mathbf{P}_2(t_s) \boldsymbol{\varphi}_x(t_s) [y(t_s) - & \\ \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\varphi}_x^T(t_s) \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1})], & \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(t_s) &= \\ \frac{1}{\lambda_2} \left[ \mathbf{P}_2(t_{s-1}) - \frac{\mathbf{P}_2(t_{s-1}) \boldsymbol{\varphi}_x(t_s) \boldsymbol{\varphi}_x^T(t_s) \mathbf{P}_2(t_{s-1})}{\lambda_2 + \boldsymbol{\varphi}_x^T(t_s) \mathbf{P}_2(t_{s-1}) \boldsymbol{\varphi}_x(t_s)} \right]. & \end{aligned} \quad (18)$$

信息向量  $\boldsymbol{\varphi}_x(t_s)$  中包含未知项  $x(t_s - i)$ , 因此上述算法不能实现. 为了解决这个问题, 构造一个辅助模型

$$\begin{aligned} x_a(t_s + i) &:= \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x^T(t_s + i) \hat{\mathbf{f}}(t_s) + \boldsymbol{\phi}^T(t_s + i) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_s), \\ i &= 0, 1, 2, \dots, t_{s+1}^* - 1. \end{aligned} \quad (19)$$

采用辅助模型输出  $x_a(t_s - i)$  定义信息向量  $\boldsymbol{\varphi}_x(t_s)$  的估计

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x(t_s) &:= \\ [-x_a(t_s - 1), -x_a(t_s - 2), \dots, -x_a(t_s - n_f)]^T. & \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (15)、(17) 和 (18) 中的  $\boldsymbol{\varphi}_x(t)$ 、 $\mathbf{f}$  和  $\boldsymbol{\theta}_1$  分别用其相应的估计  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_x(t_s)$ 、 $\hat{\mathbf{f}}(t_{s-1})$  和  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1})$  代替, 可以得到

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_s) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1}) + \mathbf{P}_1(t_s) \boldsymbol{\varphi}_1(t_s) [y(t_s) - \\ \boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1}) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x^T(t_s) \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1})], & \end{aligned} \quad (21)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_s), \quad t \in [t_s, t_{s+1} - 1], \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{f}}(t_s) = \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1}) + \mathbf{P}_2(t_s) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x(t_s) [y(t_s) -$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1^T(t_s) \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_{s-1}) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x^T(t_s) \hat{\mathbf{f}}(t_{s-1})], \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{f}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t_s), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(t_s) &= \\ \frac{1}{\lambda_2} \left[ \mathbf{P}_2(t_{s-1}) - \frac{\mathbf{P}_2(t_{s-1}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x(t_s) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x^T(t_s) \mathbf{P}_2(t_{s-1})}{\lambda_2 + \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x^T(t_s) \mathbf{P}_2(t_{s-1}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_x(t_s)} \right]. & \end{aligned} \quad (25)$$

式 (8)、(12)、(16)、(19)~(25) 构成了估计参数向量  $\boldsymbol{\theta}_1$  和  $\mathbf{f}$  的 V-FF-D-RLS 算法.

当  $t_s \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{P}_1(t_s) \rightarrow 0$  和  $\mathbf{P}_2(t_s) \rightarrow 0$ , 因此, 变递推间隔分解递推最小二乘 (V-D-RLS) 算法 ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ) 是不能跟踪时变参数的. 引入遗忘因子后, 得到的 V-FF-D-RLS 算法具有跟踪时变参数的能力.

V-FF-D-RLS 算法的计算步骤如下.

Step 1: 初始化. 令  $t = 1, s = 0, t_s = 0$ . 置初值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_0) = \mathbf{1}_{n_a+m}/p_0, \hat{\mathbf{f}}(t_0) = \mathbf{1}_{n_f}/p_0, \mathbf{P}_1(t_0) = p_0 \times \mathbf{I}_{n_a+m}, \mathbf{P}_2(t_0) = p_0 \mathbf{I}_{n_f}, x_a(t_s - i) = 1/p_0 (i = 1, 2, \dots, n_f), p_0 = 10^6$ . 选择  $\lambda_1, \lambda_2$  和数据长度  $L_e$ .

Step 2: 采集观测数据  $\phi(t)$ .

Step 3: 如果输出数据  $y(t)$  不可得到, 则令  $t := t + 1$ , 转到 Step 2.

Step 4: 置  $s := s + 1, t_s := t, t_s^* := t_s - t_{s-1}$ . 收集输出数据  $y(t_s)$ , 用式 (8)、(20) 和 (12) 构造信息向量  $\boldsymbol{\varphi}_y(t_s)$ 、 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_x(t_s)$  和  $\boldsymbol{\varphi}_1(t_s)$ .

Step 5: 用式 (16) 和 (25) 计算  $\mathbf{P}_1(t_s)$  和  $\mathbf{P}_2(t_s)$ .

Step 6: 用式 (21) 和 (23) 刷新参数  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_s)$  和  $\hat{\mathbf{f}}(t_s)$ .

Step 7: 用式 (19) 计算辅助模型的输出  $x_a(t_s + i)$ .

Step 8: 用式 (22) 和 (24) 设置  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t)$  和  $\hat{\mathbf{f}}(t)$ , 并从  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t)$  中读取  $\hat{\mathbf{a}}(t)$  和  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ .

Step 9: 如果  $t = L_e$ , 则结束计算, 并获得参数估计  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t_s)$  和  $\hat{\mathbf{f}}(t_s)$ ; 否则,  $t$  增加 1, 转到 Step 2.

辨识算法的计算量可作为评价算法优劣的指标之一, 其大小可以用乘法运算次数和加法运算次数的和表示<sup>[17-19]</sup>. V-AM-RLS 算法的计算量为  $N_1 := 4n^2 + 6n + 2n_f + 2m - 2$ , V-D-RLS 算法的计算量为  $N_2 := 4(n_a + m)^2 + 4n_f^2 + 6n_a + 6n_f + 8m$ . 两种算法的计算量之差为

$$N_1 - N_2 = 8n_a n_f + 8n_f m + 2n_f - 2 > 0.$$

可以看出 V-D-RLS 算法比 V-AM-RLS 算法计算量小.

#### 4 仿真结果及分析

考虑如下线性参数系统:

$$A(z)y(t) = \frac{\phi^T(t)}{F(z)} \boldsymbol{\theta} + v(t),$$

$$A(z) =$$

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 1 + 1.15 z^{-1} + 0.85 z^{-2},$$

$$F(z) =$$

$$1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} = 1 - 0.55 z^{-1} + 0.13 z^{-2},$$

$$\theta = [b_1, b_2]^T = [-0.28, 0.76]^T,$$

$$\vartheta = [a_1, a_2, f_1, f_2, b_1, b_2]^T =$$

$$[1.15, 0.85, -0.55, 0.13, -0.28, 0.76]^T.$$

仿真时, 信息向量  $\{\phi(t)\}$  采用单位方差的零均值不相关持续激励信号序列,  $\{v(t)\}$  采用方差为  $\sigma^2 = 0.50^2$  的零均值不相关白噪声序列. 收集可测量数据  $\{\phi(t), y(t_s)\}$ ,  $t_s^* = t_s - t_{s-1}$  是一个有上界均匀分布的随机整数. 取数据长度  $L_e = 5000$ ,  $\lambda_1 = 0.992$  和  $\lambda_2 = 0.989$ . 应用 V-AM-RLS 算法和 V-D-RLS 算法估计该实例系统的参数. 参数估计及其误差如表 1 所示.

表 1 参数估计及其误差

算法	s	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	δ / %
V-AM-RLS	100	1.173 96	0.888 17	-0.519 43	0.279 16	-0.310 93	0.763 72	9.310 68
	500	1.169 40	0.867 19	-0.483 65	0.160 88	-0.275 93	0.737 51	4.656 82
	1 000	1.163 41	0.859 80	-0.535 78	0.127 01	-0.278 65	0.759 92	1.272 29
	3 000	1.160 77	0.852 26	-0.550 22	0.140 98	-0.291 48	0.758 27	1.116 17
	5 000	1.161 62	0.852 76	-0.547 60	0.132 39	-0.280 76	0.757 26	0.733 19
V-D-RLS	100	1.143 00	0.869 72	-0.382 51	-0.018 48	-0.327 09	0.737 83	13.277 62
	500	1.147 47	0.853 71	-0.450 37	0.066 72	-0.276 78	0.734 02	6.961 11
	1 000	1.142 77	0.844 67	-0.508 65	0.069 74	-0.278 85	0.747 01	4.302 90
	3 000	1.146 65	0.843 66	-0.531 98	0.108 34	-0.291 08	0.750 41	1.873 38
	5 000	1.151 56	0.846 15	-0.532 38	0.107 23	-0.280 87	0.751 62	1.742 40
V-D-FF-RLS	100	1.143 60	0.867 95	-0.383 75	-0.009 21	-0.314 49	0.757 40	12.681 75
	500	1.153 20	0.854 50	-0.466 10	0.098 34	-0.270 39	0.728 25	5.510 77
	1 000	1.147 56	0.844 84	-0.526 38	0.091 98	-0.276 54	0.746 96	2.710 16
	3 000	1.151 81	0.845 74	-0.542 83	0.125 49	-0.292 97	0.752 84	1.017 22
	5 000	1.158 05	0.848 88	-0.538 46	0.118 58	-0.277 48	0.754 87	1.095 09
真值		1.150 00	0.850 00	-0.550 00	0.130 00	-0.280 00	0.760 00	

参数估计误差  $\delta := \|\hat{\vartheta}(t_s) - \vartheta\| / \|\vartheta\| \times 100\%$  随递推步数  $s$  变化曲线如图 3 所示.

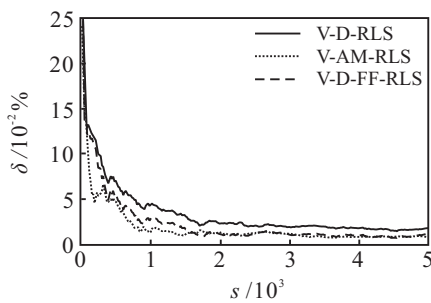


图 3 参数估计误差  $\delta$  随  $s$  变化

由表 1 和图 3 可以得到下列结论: 随着数据长度增加, 所得算法精度越来越高; 噪声方差越小, 参数估计误差越小; V-D-FF-RLS 算法比 V-D-RLS 算法的参数估计精度高, 且收敛速度快. 仿真结果表明算法对初值不敏感.

### 5 结 论

本文基于辅助模型辨识思想和辨识模型分解, 研究了一类包含损失输出数据的线性参数系统的变

递推间隔递推最小二乘辨识算法. 所得 V-D-RLS 算法与 V-AM-RLS 算法相比, 能有效地减小计算量. 仿真结果表明, 所得算法可以获得高精度的参数估计, 引入遗忘因子后得到的 V-FF-D-RLS 算法可以有效提高参数估计精度和收敛速度, 并具有跟踪时变参数的能力. 本文提出的辨识算法的收敛性是需要进一步研究的课题.

### 参考文献(References)

[1] 王冬青. 基于辅助模型的递推增广最小二乘辨识方法[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(1): 51-56. (Wang D Q. Recursive extended least squares identification method based on auxiliary models[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(1): 51-56.)

[2] Ding J, Fan C X, Lin J X. Auxiliary model based parameter estimation for dual-rate output error systems with colored noise[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4051-4058.

[3] Wang F F, Liu Y J, Yang E F. Least squares based iterative identification methods for linear-in-parameters systems

- using the decomposition technique[J]. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 2016, 35(1): 3863-3881.
- [4] Guo L J, Wang Y J, Wang C. A recursive least squares algorithm for pseudo-linear ARMA systems using the auxiliary model and the filtering technique[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2016, 35(7): 2655-2667.
- [5] Li K, Peng J X, Bai E W. A two-stage algorithm for identification of nonlinear dynamic systems[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1189-1197.
- [6] Ding F, Liu X M, Chen H B, et al. Hierarchical gradient based and hierarchical least squares based iterative parameter identification for CARARMA systems[J]. *Signal Processing*, 2014, 97: 31-39.
- [7] Chen H B, Ding F, Xiao Y S. Decomposition-based least squares parameter estimation algorithm for input nonlinear systems using the key term separation technique[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(3): 2027-2035.
- [8] Albertos P, Sanchis R, Sala A. Output prediction under scarce data operation: control applications[J]. *Automatica*, 1999, 35(10): 1671-1681.
- [9] Wallin R, Isaksson A J, Noréus O. Extensions to "Output prediction under scarce data operation: Control applications"[J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 2069-2071.
- [10] Sanchis R, Peñarrocha I, Albertos P. Design of robust output predictors under scarce measurements with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 281-289.
- [11] Ding F, Liu G, Liu X P. Parameter estimation with scarce measurements[J]. *Automatica*, 2011, 47(8): 1646-1655.
- [12] Ding F, Ding J. Least squares parameter estimation with irregularly missing data[J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, 24(7): 540-553.
- [13] Gopaluni R B. A particle filter approach to identification of nonlinear processes under missing observations[J]. *Canadian J of Chemical Engineering*, 2008, 86(6): 1081-1092.
- [14] 丁锋. 系统辨识新论[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 152-169.
- (Ding F. *System identification—New theory and methods*[M]. Beijing: Science Press, 2013: 152-169.)
- [15] 丁锋. 系统辨识——辨识方法性能分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 161-173.
- (Ding F. *System identification—Performances analysis for identification methods*[M]. Beijing: Science Press, 2014: 161-173.)
- [16] 丁锋. 系统辨识——多新息辨识理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 42-48.
- (Ding F. *System identification—Multi-innovation identification theory and methods*[M]. Beijing: Science Press, 2016: 42-48.)
- [17] 丁锋, 汪菲菲, 汪学海. 类多变量输出误差系统的耦合多新息辨识方法[J]. *南京信息工程大学学报: 自然科学版*, 2014, 6(3): 193-210.
- (Ding F, Wang F F, Wang X H. Coupled multi-innovation identification methods for multivariable output-error-like systems[J]. *J of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition*, 2014, 6(3): 193-210.)
- [18] 丁锋, 毛亚文. 输入非线性方程误差自回归系统的多新息辨识方法[J]. *南京信息工程大学学报: 自然科学版*, 2015, 7(1): 1-23.
- (Ding F, Mao Y W. Multi-innovation identification methods for input nonlinear equation-error autoregressive systems[J]. *J of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition*, 2015, 7(1): 1-23.)
- [19] 丁锋, 郭兰杰. 线性参数系统的多新息辨识方法[J]. *南京信息工程大学学报: 自然科学版*, 2015, 7(4): 289-312.
- (Ding F, Guo L J. Multi-innovation identification methods for linear-parameter systems[J]. *J of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition*, 2015, 7(4): 289-312.)

(责任编辑: 闫 妍)