

线性多变量系统有限时间最优解耦控制

富月, 李婧怡

(东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110004)

摘要: 针对线性多变量系统, 将前馈解耦控制与有限时间最优跟踪控制相结合, 提出一种新的最优解耦控制方法. 首先, 将关于状态的微分方程转化成关于输出的微分方程, 将系统内部矩阵和控制输入矩阵分别分解成对角矩阵和对角元为零的矩阵; 然后, 通过引入中间虚拟变量, 采用前馈和输出反馈的方法对系统进行解耦; 最后, 采用有限时间最优跟踪控制方法实现系统对任意参考输入的跟踪. 仿真结果表明了所提出方法的有效性和优越性.

关键词: 前馈解耦; 最优跟踪控制; 最优解耦控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite-time optimal decoupling control for linear multi-variable systems

FU Yue, LI Jing-yi

(State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: FU Yue, E-mail: fuyue@mail.neu.edu.cn)

Abstract: A new optimal decoupling control method is proposed for linear multi-variable systems, by combining feedforward decoupling control with finite-time optimal tracking control. Firstly, the differential equation on outputs is derived, and then the internal matrix and control input matrix are respectively decomposed into a diagonal matrix and the one whose diagonal elements are zeros. Then, an intermediate virtual variable is introduced, and the feedforward and output feedback methods are used to decouple the system. Finally, the finite-time optimal tracking control method is adopted to realize the tracking of the outputs of the closed-loop system to arbitrary reference inputs. Simulation results show the effectiveness and superiority of the proposed method.

Keywords: feedforward decoupling; optimal tracking control; optimal decoupling control

0 引言

自20世纪60年代, Morgan^[1]针对由输入输出模型描述的多变量线性系统, 首次提出解耦控制问题以来, 多变量系统回路间的解耦控制就引起了人们的广泛关注. 到了20世纪80年代, 线性多变量自适应解耦控制已成为自适应控制和多变量控制的重要研究领域^[2].

20世纪90年代末期, 随着神经网络、模糊推理等智能方法的引入, 控制学者和工程师们开始了非线性多变量智能解耦控制方法的研究. 文献[3-6]分别将一步超前自适应解耦控制方法、一步超前加权自适应前馈解耦控制方法、自适应广义预测解耦控制方法和自适应PID解耦控制方法与多模型切换相结合, 提出了基于多模型与神经网络的自适应解耦控制方法, 证明了闭环系统的有界输入、有界输出稳定性和跟踪

误差的有界性. 文献[7-9]分别将基于神经网络前馈补偿的一步超前最优加权解耦控制、基于神经网络前馈补偿的近似动态解耦控制与多模型切换相结合, 提出了基于多模型与神经网络的智能解耦控制方法, 证明了闭环系统的有界输入、有界输出稳定性和跟踪误差的有界性.

上述方法虽然可以实现复杂工业过程的解耦控制, 但是由于控制器的设计没有考虑系统对性能的要求, 无法满足日渐提高的性能指标, 影响了以节能降耗为目标的复杂工业过程的整体优化控制. 随着科学技术的迅速发展, 人们对许多控制系统(如宇宙飞船、导弹、卫星和现代工业设备与生产过程等)的性能要求越来越高, 希望它们在某种性能指标的意义下是最优的.

本文针对线性多变量系统, 将前馈解耦控制与有

收稿日期: 2015-10-09; 修回日期: 2015-12-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573090); 中央高校基本科研业务费种子基金项目(N130408003).

作者简介: 富月(1978—), 女, 副教授, 博士, 从事自适应控制、智能解耦控制等研究; 李婧怡(1991—), 女, 硕士生, 从事最优控制、智能解耦控制的研究.

长时间最优跟踪控制相结合, 提出一种新的最优解耦控制方法. 该方法可以实现系统对任意参考输入的跟踪, 并使控制系统在某一性能指标的意义下最优.

1 问题描述

考虑如下线性多变量连续时间时不变系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0; \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制向量, $y(t) \in \mathbf{R}^m$ 为输出向量, $0 < m \leq n$; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为时不变矩阵, 并且 $C^T C$ 可逆. 本文的目标是求取最优解耦控制律 $u^*(t)$ 使得闭环系统输出 $y(t)$ 尽可能跟踪事先指定的参考输入 $y_r(t)$ 的变化, 尽可能减小回路间耦合的影响, 并使闭环系统具有一定的最优特性.

2 最优解耦跟踪控制

2.1 解耦控制策略

为进行解耦控制器设计, 首先将关于状态的微分方程转化成关于输出的微分方程, 即

$$\dot{y}(t) = \bar{A}y(t) + \bar{B}u(t), \quad y(t_0) = y_0 = Cx_0. \tag{2}$$

其中: $\bar{A} = CA(C^T C)^{-1}C^T$, $\bar{B} = CB$. 然后, 将系统中第 i 个通道输入 $u_i(t)$ 对第 j 个通道的输出 $y_j(t)$ ($i \neq j$) 的耦合影响视为可测干扰, 采用前馈方法予以消除, 并采用反馈方法消除自治系统 ($u(t) = 0$) 中第 i 个输出变量对第 j 个输出变量的影响. 于是, 式 (2) 可写成

$$\dot{y}(t) = \bar{A}_1 y(t) + \bar{A}_2 y(t) + \bar{B}_1 u(t) + \bar{B}_2 u(t). \tag{3}$$

其中: $\bar{A}_1 = \text{diag} \bar{A}_{ii}$ 为对角矩阵, 其对角线上的元素等于 \bar{A} 主对角线上的元素; $\bar{A}_2 = \bar{A} - \bar{A}_1$ 为主对角线元素为零的矩阵, 代表自治系统中不同变量之间的相互影响; $\bar{B}_1 = \text{diag} \bar{B}_{ii}$ 为对角矩阵, 其对角线上的元素等于 \bar{B} 主对角线上的元素; $\bar{B}_2 = \bar{B} - \bar{B}_1$ 为主对角线元素为零的矩阵, 代表不同通道间的耦合. 最后通过引入辅助输入向量 $v(t) \in \mathbf{R}^m$, 设计如下解耦控

制器:

$$S_1 u(t) + S_2 u(t) = -Ky(t) + Lv(t). \tag{4}$$

其中: S_1, L 为相应维数的对角矩阵, S_1 可逆; S_2, K 为主对角元素为零的矩阵. 用 S_1 左乘式 (3), 并用 \bar{B}_1 左乘式 (4), 得到

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= S_1^{-1}(S_1 \bar{A}_1)y(t) + S_1^{-1}(S_1 \bar{A}_2 - \bar{B}_1 K)y(t) + \\ &S_1^{-1}(S_1 \bar{B}_2 - \bar{B}_1 S_2)u(t) + S_1^{-1} \bar{B}_1 Lv(t). \end{aligned} \tag{5}$$

由式 (5) 可知, 为实现式 (2) 的解耦, 应选择 S_1, S_2, K 使得如下等式成立:

$$S_1 \bar{A}_2 = \bar{B}_1 K, \tag{6}$$

$$S_1 \bar{B}_2 = \bar{B}_1 S_2, \tag{7}$$

则式 (5) 转化为

$$\dot{y}(t) = \bar{A}_1 y(t) + S_1^{-1} \bar{B}_1 Lv(t). \tag{8}$$

因为矩阵 \bar{A}_1 和 $S_1^{-1} \bar{B}_1 L$ 均为对角矩阵, 所以式 (2) 实现了完全解耦.

2.2 最优跟踪控制策略

下面针对式 (8) 设计辅助输入量 $v(t)$, 使得如下性能指标达到最小:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} e^T(t_f) F e(t_f) + \\ &\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q e(t) + v^T(t) R v(t)] dt. \end{aligned} \tag{9}$$

其中: $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 为跟踪误差, $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$, $F = F^T \geq 0$ 为加权矩阵. 令 $\bar{\bar{A}} = \bar{A}_1$, $\bar{\bar{B}} = S_1^{-1} \bar{B}_1 L$, 则由最优控制理论^[10]可知, 最优跟踪控制 $v(t)$ 为

$$v(t) = -R^{-1} \bar{\bar{B}}^T P(t)y(t) + R^{-1} \bar{\bar{B}}^T g(t). \tag{10}$$

其中: $P(t)$ 和 $g(t)$ 根据下式求解:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t) \bar{\bar{A}} - \bar{\bar{A}}^T P(t) + \\ &P(t) \bar{\bar{B}} R^{-1} \bar{\bar{B}}^T P(t) - Q, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\dot{g}(t) = -[\bar{\bar{A}}^T - P(t) \bar{\bar{B}} R^{-1} \bar{\bar{B}}^T] g(t) - Q y_r(t), \tag{12}$$

其边界条件分别为

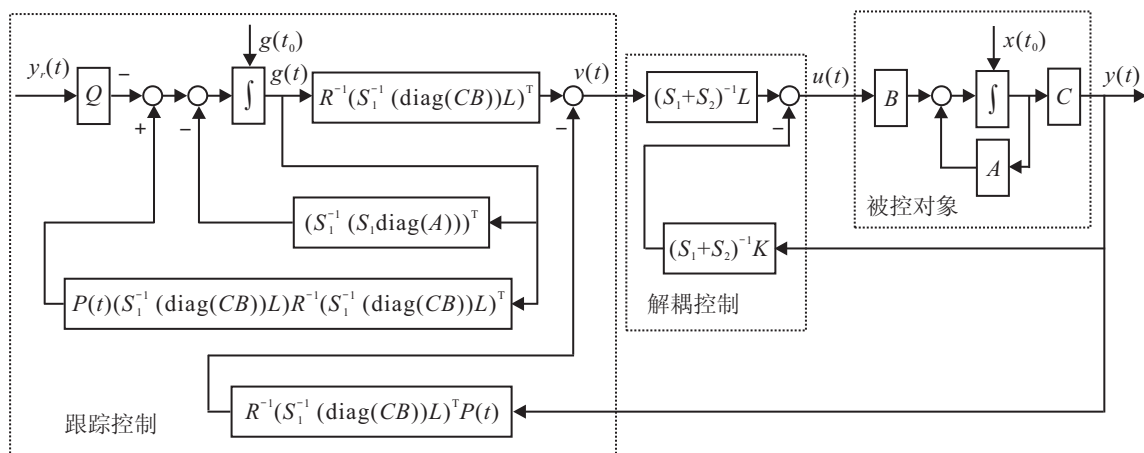


图 1 最优解耦跟踪控制系统结构

$$P(t_f) = F, \tag{13}$$

$$g(t_f) = Fy_r(t_f). \tag{14}$$

综上所述, 最优解耦跟踪控制器是由内环解耦控制器和外环跟踪控制器组成的双环控制器. 由式(4)和(10)可知, 最优解耦控制律为

$$u(t) = -(S_1 + S_2)^{-1}Ky(t) + (S_1 + S_2)^{-1}L[-R^{-1}\bar{B}^T P(t)y(t) + R^{-1}\bar{B}^T g(t)], \tag{15}$$

其结构如图 1 所示.

3 仿真研究

为验证本文所提出的最优解耦控制方法的有效性, 本文分别针对内部矩阵为对角和非对角的被控对象进行仿真实验.

3.1 内部矩阵为对角阵的数值算例

考虑如下被控对象:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0; \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{16}$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^2$, $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$, $y = [y_1, y_2]^T \in \mathbf{R}^2$ 分别为系统的状态、输入和输出量; 系统的内部动态矩阵、控制输入矩阵和输出矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据 Bristol 耦合性度量法则^[11], 对于一对调节量与被调量, 当相对增益在 0.3~0.7 之间或者大于 1.5 时, 表明系统存在非常严重的耦合, 此时必须进行解耦设计. 易知, 上述系统的相对增益矩阵为

$$RGA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

由于相对增益矩阵中对角线元素都是大于 1.5 的, 表明 u_2 - y_1 回路和 u_1 - y_2 回路分别对 u_1 - y_1 回路和 u_2 - y_2 回路有非常严重的耦合影响. 针对上述系统, 选择期望输出为

$$y_r(t) = \begin{bmatrix} y_{1r}(t) \\ y_{2r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \times \text{sign}(\cos(\pi t/20)) \\ 0.2 \times \text{sign}(\sin(\pi t/20)) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

终端时间 $t_f = 40$. 根据式(6)和(7), 选择加权矩阵

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此 $\bar{A} = A$, $\bar{B} = L$. 选择

$$P(t_f) = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0005 \end{bmatrix}.$$

图 2 为采用本文所提出的最优解耦控制方法的闭环系统输出曲线. 从图 2 可以看出, 当 $t = 10$ s 时, 虽然 $y_{1r}(t)$ 发生跳变, 但没有影响 $y_2(t)$ 的跟踪效果; 当 $t = 20$ s 时, 虽然 $y_{2r}(t)$ 发生跳变, 但没有影响 $y_1(t)$ 的跟踪效果; 同时, 当 $t = 30$ s 时, 虽然 $y_{1r}(t)$ 发生跳变, 但同样没有影响 $y_2(t)$ 的跟踪效果. $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 都能很好地跟踪参考输入的变化.

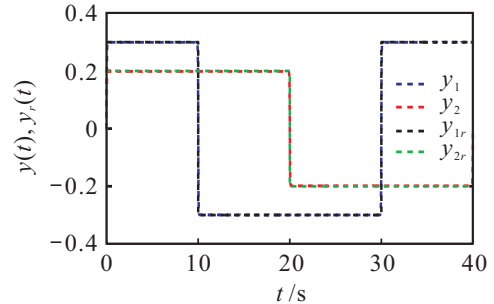


图 2 采用最优解耦控制方法的闭环系统输出与参考输入

为进行比较, 采用经典的最优跟踪控制方法^[9]的仿真结果如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 在 0~10 s 之间, 参考输入没有发生变化的情况下, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 都能很好地跟踪参考输入; 但在 10~20 s 之间, 由于 $y_{1r}(t)$ 发生了跳变, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 都没有跟踪上参考输入. 同理, 在 30~40 s 之间, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 也没有跟踪上参考输入.

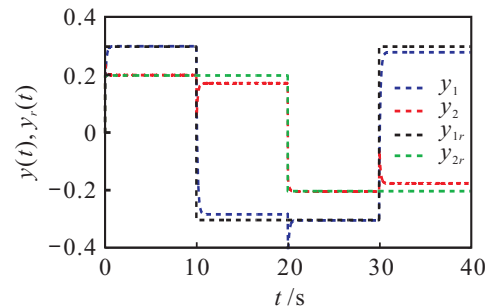


图 3 采用经典最优跟踪控制方法的闭环系统输出与参考输入

3.2 内部矩阵为非对角阵的数值算例

考虑如下被控对象:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0; \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{18}$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^2$, $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$, $y = [y_1, y_2]^T \in \mathbf{R}^2$ 分别为系统的状态、输入和输出量; 系统的内部动态矩阵、控制输入矩阵和输出矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

易知, 上述系统的相对增益矩阵为

$$\text{RGA} = \begin{bmatrix} 1.6 & -0.6 \\ -0.6 & 1.6 \end{bmatrix}.$$

因此 u_2 - y_1 回路和 u_1 - y_2 回路分别对 u_1 - y_1 回路和 u_2 - y_2 回路有非常严重的耦合影响. 选择期望输出为

$$y_r(t) = \begin{bmatrix} y_{1r}(t) \\ y_{2r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\pi t/10) \\ \cos(\pi t/10) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

终端时间 $t_f = 20$, 根据式 (6) 和 (7), 选择加权矩阵

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此 $\bar{A} = A_1, \bar{B} = L$. 选择

$$P(t_f) = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix}.$$

图4为采用本文所提出的最优解耦控制方法的输出曲线. 从图4可以看出, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 都能很好地跟踪参考输入的变化.

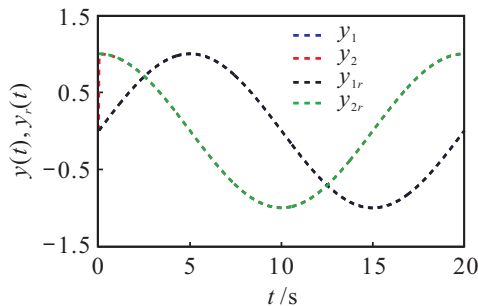


图4 采用最优解耦控制方法的闭环系统输出与参考输入

同样为了进行比较, 采用经典的最优跟踪控制方法^[10]的仿真结果如图5所示. 从图5可以看出, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 都没有跟上参考输入的变化.

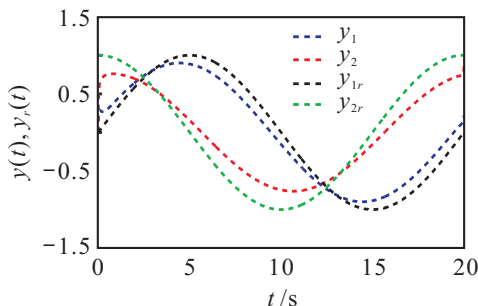


图5 采用经典最优跟踪控制方法的闭环系统输出与参考输入

4 结论

本文针对一类连续时间线性多变量系统, 提出了一种有限时间最优解耦控制方法. 该解耦控制器是由内环前馈解耦控制和外环有限时间最优跟踪控制组成的. 首先, 通过引入中间虚拟变量, 采用前馈和输出

反馈的方法对系统进行解耦; 然后, 针对解耦后系统, 采用有限时间最优跟踪控制方法, 实现系统对任意参考输入的跟踪; 最后, 通过仿真对比验证了所提出方法的有效性及其优越性.

参考文献(References)

- [1] Morgan B S. The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1964, 9: 404-411.
- [2] 柴天佑. 多变量自适应解耦控制及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 1-2.
(Chai T Y. Adaptive decoupling control and application of multivariable[M]. Beijing: Science Press, 2001: 1-2.)
- [3] Fu Y, Chai T Y. Nonlinear multivariable adaptive control using multiple models and neural networks[J]. Automatica, 2007, 43(6): 1101-1110.
- [4] Fu Y, Chai T Y. Nonlinear adaptive decoupling control based on neural networks and multiple models[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2012, 8(3): 1867-1878.
- [5] 石宇静, 柴天佑. 基于神经网络与多模型的非线性自适应广义预测解耦控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 634-640.
(Shi Y J, Chai T Y. Nonlinear adaptive generalized predictive decoupling control based on neural networks and multiple models[J]. Control Theory & Application, 2008, 25(4): 634-640.)
- [6] Zhai L F, Chai T Y. Nonlinear decoupling PID control using neural networks and multiple models[J]. J of Control Theory and Application, 2006, 23(1): 62-69.
- [7] 王昕. 多模型自适应解耦控制器的研究[D]. 沈阳: 东北大学信息科学与工程学院, 2002.
(Wang X. Study on multi-model adaptive decoupling controller[D]. Shenyang: College of Information Science and Engineering, Northeastern University, 2002.)
- [8] Fu Y, Chai T Y. Intelligent decoupling control and its applications to a wind tunnel system[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 2009, 17(6): 1376-1384.
- [9] Chai T Y, Zhai L F, Yue H. Multiple models and neural networks based decoupling control of ball mill coal-pulverizing systems[J]. J of Process Control, 2011, 21(3): 351-366.
- [10] 李传江, 马广富. 最优控制[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 310-313.
(Li C J, Ma G F. Optimal control[M]. Beijing: Science Press, 2011: 310-313.)
- [11] Bristol E H. On a new measure of interaction for multivariable process control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1966, 11(1): 133-134.

(责任编辑: 李君玲)