文章编号: 1001-0920 (2016) 12-2280-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1537

广义毕达哥拉斯模糊集成算子及其决策应用

刘卫锋, 常 娟, 何 霞

(郑州航空工业管理学院 理学院，郑州 450015)

摘 要: 研究毕达哥拉斯模糊决策环境下的集成算子及其决策应用. 给出拟加权几何集成算子和拟有序加权几何算子的概念, 并分析它们的性质. 将有序加权平均算子、有序加权几何算子、拟有序加权平均算子和拟有序加权几何算子推广到毕达哥拉斯模糊决策环境, 定义毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子、广义毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子、毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子、广义毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子、拟毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子和拟毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子. 提出基于广义毕达哥拉斯模糊集成算子的决策方法, 并通过实例验证其可行性.

关键词: 毕达哥拉斯模糊集；广义毕达哥拉斯模糊集成算子；拟毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子；拟毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子

中图分类号: C934；O223 **文献标志码:** A

Generalized Pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making

LIU Wei-feng, *CHANG Juan*, *HE Xia*

(School of Science，Zhengzhou University of Aeronautics，Zhengzhou 450015，China．Correspondent：LIU Wei-feng，E-mail：lwf0519@163.com)

Abstract: Aggregation operators under the Pythagorean fuzzy environment and their applications to decision making are discussed. The Quasi-weighted geometric(QWG) operator and the Quasi-ordered weighted geometric(QOWG) operator are defined, and their natures are studied. Then, a class of aggregation operators called Pythagorean fuzzy aggregation operators are proposed, including the Pythagorean fuzzy order weighted average(PFOWA) operator, the generalized Pythagorean fuzzy order weighted average(GPFOWA) operator, the Pythagorean fuzzy order weighted geometric(PFOWG) operator, the generalized Pythagorean fuzzy order weighted geometric(GPFOWG) operator, the Quasi Pythagorean fuzzy order weighted average(QPFOWA) operator and the Quasi Pythagorean fuzzy order weighted geometric(QPFOWG) operator. A method based on generalized Pythagorena fuzzy aggregation operators for decision making is presented, and an example is given to illustrate the feasibility of the proposed method.

Keywords: Pythagorean fuzzy sets；generalized Pythagorean fuzzy aggregation operator；quasi Pythagorean fuzzy order weighted average operator；quasi Pythagorean fuzzy order weighted geometric operator

0 引 言

在决策过程中, 由于集成算子的有效性能够更加明确地反映决策结果, 正确地体现决策效果, 关于集成算子的研究一直是多属性决策研究的一个核心问题. 目前, 最常见的集成算子有 (加权) 算术平均算子[1]、(加权) 几何平均算子[2]、有序加权平均算子[3]、有序加权几何算子[4]以及有序加权调和平均算子[5]、广义有序加权平均算子[6]、拟有序加权平均算子[7]等. 其中, 拟有序加权平均算子最为广泛, 它囊括了几乎常见的集成算子. 该算子通过生成函数将多种信息集成算子综合在一个函数表达式中, 决策者通过控制生成函数调整决策结果, 不同的生成函数对应于不同的集成算子, 因此研究该算子及相关的广义集成算子对于发展多属性决策具有重要的理论和现实意义. 考虑到决策中信息往往具有不确定性, 将上述集成算子推广到不确定性决策环境势在必行. 许多学

收稿日期: 2015-12-13；**修回日期:** 2016-03-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501525)；郑州航空工业管理学院青年科研基金项目(2014113001).

作者简介: 刘卫锋 (1976−), 男, 副教授, 硕士, 从事数学建模、模糊数学等研究；常娟 (1979−), 女, 讲师, 硕士, 从事应用数学的研究.

者为此做出了努力, 提出了诸如广义区间数有序加权平均算子[8]、广义语言有序加权平均算子[9]、广义直觉模糊有序加权平均算子[10]、广义直觉模糊几何算子[11]、不确定诱导拟算术 OWA 算子[12]、拟算术直觉模糊 OWA 算子[13]、诱导拟算术不确定语言集成算子[14]、犹豫模糊集成算子[15]、拟算术三角模糊 OWA 算子[16]等.

作为模糊集[17]的一种有效推广, 由于直觉模糊集[18]可以从支持、反对、中立 3 方面全面描述客观世界, 受到了许多学者的关注[19-23]. 但是, 在直觉模糊决策过程中, 可能出现如下情况: 决策者给出的方案满足属性的隶属度和非隶属度之和大于 1. 为此, 文献 [24-25] 在研究了各种模糊集的补运算基础上, 结合上述情况, 提出了允许隶属度和非隶属度之和超过 1, 而其平方和不超过 1 的毕达哥拉斯模糊集, 使得决策者在决策过程中不必重新修改直觉模糊属性值也可以进行决策; 同时, Yager 提出了毕达哥拉斯模糊信息集成的加权平均 (PFWA) 算子和有序加权几何算子 (PFOWG). 近期, 一些学者研究了毕达哥拉斯模糊集及其决策应用. 文献 [26] 定义了毕达哥拉斯模糊数的运算及距离等概念, 研究了毕达哥拉斯模糊 TOPSIS 法及其决策应用; 文献 [27] 将毕达哥拉斯模糊集与软集[28]相结合, 提出了毕达哥拉斯模糊软集, 并探讨了其决策应用; 文献 [29-30] 研究了区间值毕达哥拉斯模糊集及其决策应用; 文献 [31] 研究了毕达哥拉斯模糊数的连续性及微分等内容. 由这些研究文献可以看出, 关于毕达哥拉斯模糊集的研究还是非常薄弱的, 有待进一步完善和深入研究.

在上述研究基础上, 本文继续研究和完善毕达哥拉斯模糊集成算子理论和方法. 首先, 提出拟加权几何 (QWG) 算子和拟有序加权几何 (QOWG) 算子, 并证明它们具有幂等性、单调性和有界性等性质; 其次, 在毕达哥拉斯模糊数运算[26]基础上, 定义毕达哥拉斯模糊有序加权平均 (PFOWA) 算子、广义毕达哥拉斯模糊有序加权平均 (GPFOWA) 算子, 毕达哥拉斯模糊有序加权几何 (PFOWG) 算子以及广义毕达哥拉斯模糊有序加权几何 (GPFOWG) 算子, 并分别研究它们的性质; 然后, 将拟有序加权平均 (QOWA) 算子和 QOWG 算子推广到毕达哥拉斯模糊决策环境, 分别定义拟毕达哥拉斯模糊有序加权平均 (QPFOWA) 算子和拟毕达哥拉斯模糊有序加权几何 (QPFOWG) 算子, 它们分别将多种毕达哥拉斯模糊信息集成算子综合在一个函数表达式中, 使得 PFOWA 算子、GPFOWA 算子以及 PFOWG 算子和 GPFOWG 算子成为它们的特例; 最后, 提出基于广义毕达哥拉斯模糊集成算子的决策方法, 并通过实例说明其可行性和有效性.

1　相关概念

定义 1[3]　设 $a_i \in R^+ (i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据, 其中 $R^+=\{x \mid x>0\}$, 如果函数 $\mathrm{OWA}:(R^+)^n \to R^+$, $\mathrm{OWA}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{j=1}^{n} w_j b_j$, 则称 OWA 为有序加权平均算子, 简称 OWA 算子. 其中: b_j 为 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数, 权重向量 $(w_1, w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j=1$.

定义 2[4]　设 $a_i \in R^+ (i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据, 其中 $R^+=\{x \mid x>0\}$, 如果函数 $\mathrm{OWG}:(R^+)^n \to R^+$, $\mathrm{OWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\prod\limits_{j=1}^{n} b_j^{w_j}$, 则称 OWG 为有序加权几何算子, 简称 OWG 算子. 其中: b_j 为 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数, 权重向量 $(w_1, w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j=1$.

定义 3[6]　设 $a_i \in R^+ (i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据, 其中 $R^+=\{x \mid x>0\}$, 如果函数 $\mathrm{GOWA}:(R^+)^n \to R^+$, $\mathrm{GOWA}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\Big)^{\frac{1}{\lambda}}$, 则称 GOWA 为广义有序加权平均算子, 简称 GOWA 算子. 其中: b_j 为 $a_i (i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j=1$, 参数 $\lambda \in R-\{0\}$.

定义 4[7]　设 $a_i \in R^+ (i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据, $R^+=\{x \mid x>0\}$, 若函数 $\mathrm{QOWA}:(R^+)^n \to R^+$, $\mathrm{QOWA}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} w_j f(b_j)\Big)$, 则称 QOWA 为拟有序加权平均算子, 简称 QOWA 算子. 其中: b_j 为 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j=1$.

定义 5[18]　设 X 为论域, 则称三元组 $A=\{\langle x, \mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$ 为 X 上的一个直觉模糊集. 其中: $\nu_A: X\to[0,1]$, $\nu_A: X\to[0,1]$ 为 X 上的模糊集, $\mu_A(x)$、$\nu_A(x)$ 分别表示 X 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度, 且对于 $\forall x\in X, \mu_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$, 有 $\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$.

定义 6[24-25]　设 X 为论域, 则称三元组 $A=\{\langle x, \mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$ 为 X 上的一个毕达哥拉斯模糊集. 其中: $\nu_A: X\to[0,1]$, $\nu_A: X\to[0,1]$ 为 X 上的模糊集, $\mu_A(x)$、$\nu_A(x)$ 分别表示 X 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度, 且对于 $\forall x\in X, \mu_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$, 有 $\mu_A^2(x)+\nu_A^2(x)\leqslant 1$.

称 $\pi_A(x)=\sqrt{1-\mu_A^2(x)-\nu_A^2(x)}$ 为 x 属于 A 的犹豫度.

称 $\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$ 为毕达哥拉斯模糊数[26]. 全体毕达哥拉斯模糊数集合记作 PHN.

定义 7[26] 设 $\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$, $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2)$ 为毕达哥拉斯模糊数, 定义:

1) $\alpha_1\bigoplus\alpha_2=\langle\sqrt{\mu_{\alpha_1}^2+\mu_{\alpha_2}^2-\mu_{\alpha_1}^2\mu_{\alpha_2}^2},\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}\rangle$;

2) $\alpha_1\bigotimes\alpha_2=\langle\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},\sqrt{\nu_{\alpha_1}^2+\nu_{\alpha_2}^2-\nu_{\alpha_1}^2\nu_{\alpha_2}^2}\rangle$;

3) $\lambda\alpha=\langle\sqrt{1-(1-\mu_\alpha^2)^\lambda},\nu_\alpha^\lambda\rangle$, $\lambda>0$;

4) $\alpha^\lambda=\langle\mu_\alpha^\lambda,\sqrt{1-(1-\nu_\alpha^2)^\lambda}\rangle$, $\lambda>0$.

定义 8[25] 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2)$ 为毕达哥拉斯模糊数, 定义 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\Leftrightarrow\mu_{\alpha_1}\geqslant\mu_{\alpha_2},\nu_{\alpha_1}\leqslant\nu_{\alpha_2}$.

定义 9[26] 设 $\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$ 为毕达哥拉斯模糊数, 定义 $s_\alpha=\mu_\alpha^2-\nu_\alpha^2$ 为 α 的得分函数.

定义 10[26] 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2)$ 为毕达哥拉斯模糊数, 定义: 1) 若 $s_{\alpha_1}<s_{\alpha_2}$, 则 $\alpha_1<\alpha_2$; 2) 若 $s_{\alpha_1}=s_{\alpha_2}$, 则 $\alpha_1\approx\alpha_2$.

2 拟有序加权几何算子

定义 11 设 $a_i\in R^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据, $R^+=\{x\mid x>0\}$, 若函数 $\mathrm{QWG}:(R^+)^n\to R^+$, $\mathrm{QWG}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f^{-1}\Big(\prod\limits_{i=1}^n(f(a_i))^{w_i}\Big)$, 则称 QWG 为拟加权几何算子, 简称 QWG 算子. 其中: f 为严格单调连续函数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_i\geqslant0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n w_i=1$.

定理 1 设 $a_i\in R^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据.

1) 幂等性. 如果 $a_i=a$, $i=1,2,\cdots,n$, 则有 $\mathrm{QWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a$.

2) 单调性. 设 $c_i\in R^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为另一组待集成数据, 且 $a_i\leqslant c_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\mathrm{QWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\mathrm{QWG}\,(c_1,c_2,\cdots,c_n)$.

3) 有界性. 令 $a_{\min}=\min\limits_i\{a_i\}$, $a_{\max}=\max\limits_i\{a_i\}$, 则 $a_{\min}\leqslant\mathrm{QWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant a_{\max}$.

定义 12 设 $a_i\in R^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据, $R^+=\{x\mid x>0\}$, 若函数 $\mathrm{QOWG}:(R^+)^n\to R^+$, $\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f^{-1}\Big(\prod\limits_{j=1}^n(f(b_j))^{w_j}\Big)$, 则称 QOWG 为拟有序加权几何算子, 简称 QOWG 算子. 其中: b_j 为 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数; f 为严格单调连续函数; $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是与 QOWG 算子相关联的权重向量, 且满足 $w_j\geqslant0$, $\sum\limits_{j=1}^n w_j=1$.

定理 2 设 $a_i\in R^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组待集成数据.

1) 幂等性. 如果 $a_i=a$, $i=1,2,\cdots,n$, 则有 $\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a$.

2) 单调性. 设 $c_i\in R^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为另一组待集成数据, $a_i\leqslant c_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\mathrm{QOWG}\,(c_1,c_2,\cdots,c_n)$.

3) 有界性. 令 $a_{\min}=\min\limits_i\{a_i\}$, $a_{\max}=\max\limits_i\{a_i\}$, 则 $a_{\min}\leqslant\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant a_{\max}$.

4) 置换不变性. 设 $a_i'\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个置换, 则 $\mathrm{QOWG}\,(a_1',a_2',\cdots,a_n')=\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

证明 由于定理 2 中的 3) 和 4) 可由 1) 和 2) 得到, 这里只证 1) 和 2).

1) 若 $a_i=a, i=1,2,\cdots,n$, 则

$$\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=$$
$$f^{-1}\Big(\prod_{j=1}^n(f(a))^{w_j}\Big)=f^{-1}\Big((f(a))^{\sum\limits_{j=1}^n w_j}\Big)=a.$$

2) 设

$$\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f^{-1}\Big(\prod_{j=1}^n(f(b_j))^{w_j}\Big),$$
$$\mathrm{QOWG}\,(c_1,c_2,\cdots,c_n)=f^{-1}\Big(\prod_{j=1}^n(f(d_j))^{w_j}\Big).$$

其中: b_j 为 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数, d_j 为 $c_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的数.

由 $a_i\leqslant c_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 可知, $c_i\leqslant d_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 则有:

① 当 f 严格增加时, f^{-1} 也严格增加, 即 $f(b_i)\leqslant f(d_i)$, 从而有

$$\prod_{j=1}^n(f(b_i))^{w_j}\leqslant\prod_{j=1}^n(f(d_i))^{w_j},$$

由此可得

$$f^{-1}\Big(\prod_{j=1}^n(f(b_i))^{w_j}\Big)\leqslant f^{-1}\Big(\prod_{j=1}^n(f(d_i))^{w_j}\Big),$$

故

$$\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\mathrm{QOWG}\,(c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

② 当 f 严格递减时, f^{-1} 也严格递减, 即 $f(b_i)\geqslant f(d_i)$, 从而有

$$\prod_{j=1}^n(f(b_i))^{w_j}\geqslant\prod_{j=1}^n(f(d_i))^{w_j},$$

由此可得

$$f^{-1}\Big(\prod_{j=1}^n(f(b_i))^{w_j}\Big)\leqslant f^{-1}(\prod_{j=1}^n(f(d_i))^{w_j}\Big),$$

因此有 $\mathrm{QOWG}\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\mathrm{QOWG}\,(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. □

3 广义毕达哥拉斯模糊集成算子

3.1 广义毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子

定义 13 设 $\alpha_i = \langle \mu_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i} \rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 如果函数 $\mathrm{PFOWA}: \mathrm{PFN}^n \to \mathrm{PFN}$, $\mathrm{PFOWA}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \bigoplus_{j=1}^{n} w_j\beta_j$, 则称 PFOWA 为毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子, 简称 PFOWA 算子. 其中: β_j 为 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的毕达哥拉斯模糊数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

定理 3 设 $\alpha_i = \langle \mu_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i} \rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 则

$$\mathrm{PFOWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \bigoplus_{j=1}^{n} w_j\beta_j = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\beta_j}^2)^{w_j}}, \prod_{j=1}^{n}\nu_{\beta_j}^{w_j} \right\rangle.$$

证明 当 $n=2$ 时, 有

$$\mathrm{PFOWA}\,(\alpha_1,\alpha_2) = \bigoplus_{j=1}^{2} w_j\beta_j = \langle \sqrt{1-(1-\mu_{\beta_1}^2)^{w_1}}, \nu_{\beta_1}^{w_1} \rangle \bigoplus \langle \sqrt{1-(1-\mu_{\beta_2}^2)^{w_2}}, \nu_{\beta_2}^{w_2} \rangle = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{2}(1-\mu_{\beta_j}^2)^{w_j}}, \prod_{j=1}^{2}\nu_{\beta_j}^{w_j} \right\rangle.$$

假设当 $n=k$ 时, 下式成立:

$$\mathrm{PFOWA}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k) = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\beta_j}^2)^{w_j}}, \prod_{j=1}^{k}\nu_{\beta_j}^{w_j} \right\rangle,$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\mathrm{PFOWA}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+1}) = \bigoplus_{j=1}^{k+1} w_j\beta_j = \bigoplus_{j=1}^{k} w_j\beta_j \bigoplus w_{k+1}\beta_{k+1} = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\beta_j}^2)^{w_j}}, \prod_{j=1}^{k}\nu_{\beta_j}^{w_j} \right\rangle \bigoplus \langle \sqrt{1-(1-\mu_{\beta_{k+1}}^2)^{w_{k+1}}}, \nu_{\beta_{k+1}}^{w_{k+1}} \rangle = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{k+1}(1-\mu_{\beta_j}^2)^{w_j}}, \prod_{j=1}^{k+1}\nu_{\beta_j}^{w_j} \right\rangle.$$

由数学归纳法可知, 定理成立. □

容易证明 PFOWA 算子具有幂等性、有界性和置换不变性.

定义 14 设 $\alpha_i = \langle \mu_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i} \rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 若函数 $\mathrm{GPFOWA}: \mathrm{PFN}^n \to \mathrm{PFN}$, $\mathrm{GPFOWA}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \left(\bigoplus_{j=1}^{n} w_j\beta_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$, 则称 GPFOWA 为广义毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子, 简称 GPFOWA 算子. 其中: β_j 为 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的毕达哥拉斯模糊数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, 参数 $\lambda > 0$.

定理 4 设 $\alpha_i = \langle \mu_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i} \rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 则有

$$\mathrm{GPFOWA}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \left\langle \left(\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}\right)^{1/\lambda}, \sqrt{1-\left[1-\prod_{j=1}^{n}(1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda})^{w_j}\right]^{1/\lambda}} \right\rangle.$$

证明 首先, 使用数学归纳法证明 $\bigoplus_{j=1}^{n} w_j\beta_j^{\lambda} = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}, \prod_{j=1}^{n}(\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda}})^{w_j} \right\rangle$.

当 $n=2$ 时, 有

$$\bigoplus_{j=1}^{2} w_j\beta_j^{\lambda} = w_1\beta_1^{\lambda} \bigoplus w_2\beta_2^{\lambda} = w_1\langle \mu_{\beta_1}^{\lambda}, \sqrt{1-(1-\nu_{\beta_1}^2)^{\lambda}} \rangle \bigoplus w_2\langle \mu_{\beta_2}^{\lambda}, \sqrt{1-(1-\nu_{\beta_2}^2)^{\lambda}} \rangle = \langle \sqrt{1-(1-\mu_{\beta_1}^{2\lambda})^{w_1}}, (\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_1}^2)^{\lambda}})^{w_1} \rangle \bigoplus \langle \sqrt{1-(1-\mu_{\beta_2}^{2\lambda})^{w_2}}, (\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_2}^2)^{\lambda}})^{w_2} \rangle = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{2}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}, \prod_{j=1}^{2}(\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda}})^{w_j} \right\rangle.$$

假设当 $n=k$ 时, 有

$$\bigoplus_{j=1}^{k} w_j\beta_j^{\lambda} = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}, \prod_{j=1}^{k}(\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda}})^{w_j} \right\rangle,$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\bigoplus_{j=1}^{k+1} w_j\beta_j^{\lambda} = \bigoplus_{j=1}^{k} w_j\beta_j^{\lambda} \bigoplus w_{k+1}\beta_{k+1}^{\lambda} = \left\langle \sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}, \prod_{j=1}^{k}(\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda}})^{w_j} \right\rangle \bigoplus \langle \sqrt{1-(1-\mu_{\beta_{k+1}}^{2\lambda})^{w_{k+1}}}, (\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_{k+1}}^2)^{\lambda}})^{w_{k+1}} \rangle =$$

$$\Big\langle\sqrt{1-\prod_{j=1}^{k+1}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}},\prod_{j=1}^{k+1}(\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda}})^{w_j}\Big\rangle.$$

并有

$$\Big(\bigoplus_{j=1}^{n}w_j\beta_j^{\lambda}\Big)^{1/\lambda}=$$

$$\Big(\Big\langle\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}},\prod_{j=1}^{n}(\sqrt{1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda}})^{w_j}\Big\rangle\Big)^{1/\lambda}=$$

$$\Big\langle\Big(\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}\Big)^{1/\lambda},$$

$$\sqrt{1-\Big[1-\prod_{j=1}^{n}(1-(1-\nu_{\beta_j}^2)^{\lambda})^{w_j}\Big]^{1/\lambda}}\Big\rangle.$$

由上面证明可知定理4成立. □

当 $\lambda=1$ 时, GPFOWA 算子为 PFOWA 算子.

当 $\lambda\to 0$ 时, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\mathrm{GPFOWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$ $\Big\langle \mathrm{e}^{\prod_{j=1}^{n}(\ln\mu_{\beta_j})^{w_j}},\sqrt{1-\mathrm{e}^{\prod_{j=1}^{n}(\ln(1-\nu_{\beta_j}^2))^{w_j}}}\Big\rangle.$

可以证明, GPFOWA 算子具有幂等性、有界性和置换不变性.

3.2 广义毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子

定义 15 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 如果函数 $\mathrm{PFOWG}:\mathrm{PFN}^n\to\mathrm{PFN}$, $\mathrm{PFOWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\bigotimes_{j=1}^{n}\beta_j^{w_j}$, 则称 PFOWG 为毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子, 简称 PFOWG 算子. 其中: β_j 为 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的毕达哥拉斯模糊数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j\geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$.

定理 5 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 则

$$\mathrm{PFOWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$\Big\langle\prod_{j=1}^{n}\mu_{\beta_j}^{w_j},\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\nu_{\beta_j}^2)^{w_j}}\Big\rangle.$$

易证 PFOWG 算子具有幂等性、有界性和置换不变性.

定义 16 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 如果函数 $\mathrm{GPFOWG}:\mathrm{PFN}^n\to\mathrm{PFN}$, $\mathrm{GPFOWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\dfrac{1}{\lambda}\bigotimes_{j=1}^{n}(\lambda\beta_j)^{w_j}$, 则称 GPFOWG 为广义毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子, 简称 GPFOWG 算子. 其中: β_j 为 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的毕达哥拉斯模糊数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j\geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$, 参数 $\lambda>0$.

定理 6 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 则

$$\mathrm{GPFOWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$\Big\langle\sqrt{1-\Big[1-\prod_{j=1}^{n}(1-(1-\mu_{\beta_j}^2)^{\lambda})^{w_j}\Big]^{1/\lambda}},$$
$$\Big(\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\nu_{\beta_j}^{2\lambda})^{w_j}}\Big)^{1/\lambda}\Big\rangle.$$

定理6证明与定理4证明类似, 此略.

当 $\lambda=1$ 时, GPFOWG 算子为 PFOWG 算子.

当 $\lambda\to 0$ 时, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\mathrm{GPFOWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$ $\Big\langle\sqrt{1-\mathrm{e}^{\prod_{j=1}^{n}(\ln(1-\mu_{\beta_j}^2))^{w_j}}},\mathrm{e}^{\prod_{j=1}^{n}(\ln\nu_{\beta_j})^{w_j}}\Big\rangle.$

可以证明 GPFOWG 算子具有幂等性、有界性和置换不变性.

4 拟毕达哥拉斯模糊集成算子

定义 17 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 如果 $\mathrm{QPFOWA}:\mathrm{PFN}^n\to\mathrm{PFN}$, $\mathrm{QPFOWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=f^{-1}\Big(\bigoplus_{j=1}^{n}w_jf(\beta_j)\Big)$, 则称 QPFOWA 为拟毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子, 简称 QPFOWA 算子. 其中: f 为严格单调连续函数, β_j 为 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的毕达哥拉斯模糊数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j\geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$.

当 $f(x)=x$ 时, QPFOWA 算子为 PFOWA 算子. 当 $f(x)=x^{\lambda}$ 时, QPFOWA 算子为 GPFOWA 算子.

定义 18 设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数, 如果 $\mathrm{QPFOWG}:\mathrm{PFN}^n\to\mathrm{PFN}$, $\mathrm{QPFOWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=f^{-1}\Big(\bigotimes_{j=1}^{n}f(\beta_j)^{w_j}\Big)$, 则称 QPFOWG 为拟毕达哥拉斯模糊有序加权几何算子, 简称 QPFOWG 算子. 其中: f 为严格单调连续函数, β_j 为 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的毕达哥拉斯模糊数, 权重向量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 满足 $w_j\geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$.

当 $f(x)=x$ 时, QPFOWG 算子为 PFOWG 算子. 当 $f(x)=\lambda x$ 时, QPFOWG 算子为 GPFOWG 算子.

5 决策应用

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为方案集, $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 为属性集, $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 为属性权重向量,

其中 $w_j \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j = 1$. 方案 x_i 在属性 c_j 下的属性值 α_{ij} 为毕达哥拉斯模糊数, 于是得到毕达哥拉斯模糊数决策矩阵 $M = (\alpha_{ij})_{mn}$. 下面结合广义毕达哥拉斯模糊集成算子提出一种毕达哥拉斯模糊信息下的决策方法, 具体步骤如下.

Step 1: 根据实际情况建立毕达哥拉斯模糊决策矩阵;

Step 2: 利用广义毕达哥拉斯模糊集成算子得到方案综合属性值;

Step 3: 求出每个方案综合属性值的得分函数;

Step 4: 根据得分函数实现方案排序择优.

例 1[26]　现对国内 4 家航空公司 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的服务质量进行评价, 经专家确定评价指标有 4 个, 分别是: c_1 为定售票服务, c_2 为登记程序, c_3 为客舱服务, c_4 为响应性. 指标权重向量为 $(0.15, 0.25, 0.35, 0.25)$. 经过专家评估建立毕达哥拉斯模糊数决策矩阵 $M = (\alpha_{ij})_{44}$, 其中评价值 $\alpha_{ij} = \langle \mu_{\alpha_{ij}}, \nu_{\alpha_{ij}} \rangle$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 为毕达哥拉斯模糊数. 根据专家提供的决策矩阵, 评价这 4 家国内航空公司的服务质量.

Step 1: 由实际情况建立毕达哥拉斯模糊决策矩阵, 见表 1;

表 1　毕达哥拉斯模糊决策矩阵

航空公司	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$\langle 0.9, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.6 \rangle$	$\langle 0.5, 0.8 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$
x_2	$\langle 0.4, 0.7 \rangle$	$\langle 0.9, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$
x_3	$\langle 0.8, 0.4 \rangle$	$\langle 0.7, 0.5 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.4 \rangle$
x_4	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.6 \rangle$

Step 2: 由 GPFOWA 算子 (取 $\lambda = 1$) 得到各方案综合属性值为

$$x_1 = \langle 0.698\,1, 0.699\,0 \rangle,\ x_2 = \langle 0.690\,9, 0.514\,9 \rangle,$$

$$x_3 = \langle 0.689\,9, 0.576\,1 \rangle,\ x_4 = \langle 0.728\,3, 0.559\,5 \rangle;$$

Step 3: 每个方案的得分函数为

$$s_{x_1} = -0.001\,3,\ s_{x_2} = 0.212\,2,$$

$$s_{x_3} = 0.144\,1,\ s_{x_4} = 0.217\,4;$$

Step 4: 根据得分函数, 方案优劣排序为 $x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$, 即 x_4 是最优的.

为了考察参数对集成结果的影响, 分别选取参数值 $\lambda = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$, 通过 GPFOWA 算子计算出方案综合属性值, 并将综合属性值和排序结果列入表 2. 同时根据文献 [25] 和文献 [26] 中的方法求出方案排序, 并将其结果列入表 2.

表 2　方案综合属性值和方案排序

λ	x_1	x_2	x_3	x_4	方案排序
0.5	$\langle 0.689\,4, 0.771\,3 \rangle$	$\langle 0.673\,1, 0.589\,3 \rangle$	$\langle 0.687\,8, 0.648\,9 \rangle$	$\langle 0.725\,9, 0.633\,2 \rangle$	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$
1	$\langle 0.698\,1, 0.699\,0 \rangle$	$\langle 0.690\,9, 0.514\,9 \rangle$	$\langle 0.689\,9, 0.576\,1 \rangle$	$\langle 0.728\,3, 0.559\,5 \rangle$	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$
1.5	$\langle 0.707\,5, 0.656\,4 \rangle$	$\langle 0.708\,1, 0.473\,9 \rangle$	$\langle 0.692\,1, 0.536\,4 \rangle$	$\langle 0.730\,8, 0.519\,1 \rangle$	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$
2	$\langle 0.717\,1, 0.626\,0 \rangle$	$\langle 0.723\,8, 0.446\,0 \rangle$	$\langle 0.694\,6, 0.509\,8 \rangle$	$\langle 0.733\,4, 0.491\,8 \rangle$	$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
2.5	$\langle 0.726\,7, 0.602\,3 \rangle$	$\langle 0.737\,9, 0.425\,0 \rangle$	$\langle 0.697\,1, 0.490\,0 \rangle$	$\langle 0.736\,1, 0.471\,3 \rangle$	$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
3	$\langle 0.736\,2, 0.582\,9 \rangle$	$\langle 0.750\,2, 0.408\,2 \rangle$	$\langle 0.699\,8, 0.474\,4 \rangle$	$\langle 0.738\,7, 0.455\,0 \rangle$	$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
5	$\langle 0.770\,0, 0.528\,4 \rangle$	$\langle 0.785\,0, 0.363\,2 \rangle$	$\langle 0.710\,8, 0.432\,8 \rangle$	$\langle 0.748\,8, 0.411\,2 \rangle$	$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
文献 [25] PFWA	$\langle 0.635\,0, 0.550\,0 \rangle$	$\langle 0.690\,0, 0.265\,0 \rangle$	$\langle 0.680\,0, 0.355\,0 \rangle$	$\langle 0.735\,0, 0.370\,0 \rangle$	$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
文献 [26] TOPSIS					$x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_1$

由表 2 中计算结果可知: 当 $\lambda = 2, 2.5, 3, 5$ 时, 方案排序均为 $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$, 与文献 [25] 中利用 PFWA 算子集成结果完全相同, 而与文献 [26] 中利用 TOPSIS 方法得到的结果不尽相同, 但是最优方案都是 x_4; 当 $\lambda = 0.5, 1, 1.5$ 时, 方案排序均为 $x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$. 可见参数 λ 的变化会对方案排序结果产生重要的影响.

6　结　论

首先, 提出了拟加权几何算子和拟有序加权几何算子, 证明其具有幂等性、单调性、有界性等性质; 其次, 将 OWA 算子和 OWG 算子推广到毕达哥拉斯决策环境, 提出了 PFOWA 算子和 PFOWG 算子以及 GPFOWA 算子和 GPFOWG 算子, 并分别探讨了它们的性质; 然后, 定义了 QPFOWA 算子和 QPFOWG 算子, 进一步推广了毕达哥拉斯模糊集成算子; 最后, 提出了毕达哥拉斯模糊信息的广义集成算子决策方法, 并通过实例验证了该方法的有效性. 本文研究结果对于发展有序加权几何算子具有重要的理论意义, 同时也丰富了毕达哥拉斯模糊信息集成算子理论.

参考文献(References)

[1] Harasnyi J C. Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility[J]. J of Political Economy, 1955, 63(4): 309-321.

[2] Aczel J, Alsina C. Synthesizing judgement: A functional equation approach[J]. Mathematical Modelling, 1987, 9(3): 311-320.

[3] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.

[4] Herrera F, Herrera V E, Chiclana F. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations[J]. European J of Operational Research, 2001, 129(2): 372-385.

[5] 陈华友, 刘春林, 盛昭瀚. IOWHA算子及其在组合预测中的应用[J]. 中国管理科学, 2004, 12(5): 35-40.
(Chen H Y, Liu C L, Sheng Z H. Induced ordered weighted harmonic averaging(IOWHA) operator and its application to combination forecasting method[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(5): 35-40.)

[6] Yager R R. Generalized OWA aggregation operators[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(1): 93-107.

[7] Fodor J, Marichal J L, Roubens M. Characterization of the ordered weighted averaging operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1995, 3(2): 236-240.

[8] Zhou L G, Chen H Y, Merigo J M, et al. Uncertain generalized aggregation operators[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(1): 1105-1117.

[9] Merigo J M, Gil-Lafuente A M, Zhou L, et al. Generalization of the linguistic aggregation operator and its application in decision making[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2011, 22(4): 593-603.

[10] Zhao H, Xu Z, Ni M, et al. Generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(1): 1-30.

[11] Tan C Q. Generalized intuitionistic fuzzy geometric aggregation operator and its application to multi-criteria group decision making[J]. Soft Computing, 2011, 15(5): 867-876.

[12] Merigo J M, Casanovas M. The uncertain induced quasi-arithmetic owa operator[J]. Int J of Intelligent Systems, 2011, 26(1): 1-24.

[13] Yang W, Chen Z P. The quasi-arithmetic intuitionistic fuzzy OWA operators[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27: 219-233.

[14] Yang W. Induced quasi-arithmetic uncertain linguistic aggregation operator[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Sysstems, 2013, 21(1): 55-77.

[15] Xia M M, Xu Z S, Chen N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2013, 22(2): 259-279.

[16] Yang W, Pang Y. The quasi-arithmetic triangular fuzzy OWA operator based on Dempster-Shafer theory[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology, 2014, 26(3): 1123-1135.

[17] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[18] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[19] Atannasov K. Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications[M]. New York: Physica-Verlag, 1999: 1-138.

[20] Atanassov K. On intuitionistic fuzzy sets theory[M]. Berlin Heidelberg: Physica-Verlag, 2012: 1-36.

[21] 雷英杰, 赵杰, 路艳丽, 等. 直觉模糊集理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 62-97.
(Lei Y J, Zhao J, Lu Y L, et al. Intuitionistic fuzzy sets theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2014: 62-97.)

[22] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 129-174.
(Xu Z S. Intuitionistic fuzzy information aggregation theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2008: 129-174.)

[23] Xu Z S. Intuitionistic preference modeling and interactive decision making[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2013: 1-42.

[24] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.

[25] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.

[26] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.

[27] 彭新东, 杨勇, 宋娟萍, 等. 毕达哥拉斯模糊软集及其应用[J]. 计算机工程, 2015, 41(7): 224-229.
(Peng X D, Yang Y, Song J P, et al. Pythagorean fuzzy soft sets and its application[J]. Computing Engineering, 2015, 41(7): 224-229.)

[28] Molodtsov D. Soft set theory-first results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4): 19-31.

[29] Liang W, Zhang X, Liu M. The maximizing deviation method based on interval-valued Pythagorean fuzzy weighted aggregating operator for multiple criteria group decision analysis[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2015, 2015: 1-15.

[30] Peng X, Yang Y. Fundamental properties of interval-valued Pythagorean fuzzy aggregation operators[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 444-487.

[31] Gou X, Xu Z, Ren P. The properties of continuous Pythagorean fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 401-424.

(责任编辑：闫 妍)