

灰色区间预测模型及其性质

罗 党^a, 韦保磊^a, 李海涛^b, 王洁方^b

(华北水利水电大学 a. 数学与信息科学学院, b. 管理与经济学院, 郑州 450046)

摘要: 针对振荡幅度大的小样本振荡序列预测问题, 构建灰色区间预测模型. 首先对原始序列的上下界序列直接建立非等间隔 GM(1,1) 模型, 得到取值包络带的上下包络曲线以描述系统发展的边界; 然后给出原始序列区间预测值和基本预测值的计算方法, 建立区间预测算法; 最后研究区间预测模型的灰指数规律性和时效性. 数值实验揭示, 发展系数的取值不是影响区间预测模型时效性的唯一因素; 应用实例表明, 所提出方法能够有效地提高序列的预测精度.

关键词: 灰色系统; 非等间距 GM(1,1) 模型; 包络曲线; 区间预测

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Grey interval forecasting model and its properties

LUO Dang^a, WEI Bao-lei^a, LI Hai-tao^b, WANG Jie-fang^b

(a. School of Mathematics and Information Science, b. School of Management and Economics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450046, China. Correspondent: WEI Bao-lei, E-mail: weibaolei.2014@163.com)

Abstract: In order to forecast the small sample large oscillating sequences, this paper proposes a grey interval forecasting method. Firstly, two non-equidistance GM(1,1) models are built for upper and lower sequences respectively, and the development boundary of the system are described by the upper and lower envelope curves. Then, the computing method for the interval and basic forecasting values of the original sequence are proposed, and the algorithm is constructed. Finally, the grey exponent law and timeliness of interval forecasting model are studied. The numerical experiment shows that the value of the development coefficient is not the only factor influencing the timeliness. The application example shows that the forecasting accuracy can be effectively enhanced.

Keywords: grey system; non-equidistance GM(1,1) model; envelope curve; interval forecast

0 引 言

由于现实系统的复杂多样性, 在进行系统分析和建模时, 收集的系统行为数据也是杂乱无章的. 概率论与数理统计以概率分布为基础, 研究系统数据的统计规律, 但其建模结果仅在大样本的原始数据下才有理论保证, 对于小样本(一般指样本量小于 30)序列, 难以建立可靠的预测模型.

自邓聚龙提出灰色 GM(1,1) 模型^[1], 并将其成功运用到小样本系统的建模预测以来, 灰色预测模型已被国内外学者广泛接受, 解决了许多领域的实际预测问题^[2-9]. 然而, 由于灰色预测建模的原理通过序列生

成弱化原始序列的随机不确定性, 采用微分方程近似描述系统的发展规律, 当微分方程的解具有单调性、序列具有振荡特征时, 预测模型只能描述系统行为序列的大致变化趋势, 而不能识别序列的振荡特征.

为了解决振荡序列的预测问题, 文献 [10] 提出灰色预测模型 GM(1, 1 - τ , r), 以适应具有少数据、非线性和时滞性特征的序列预测建模, 提出 GM(1, 1 | $\tan(k - \tau)p, \sin(k - \tau)p$)^[11], 以适应具有波动性和周期性特征序列的预测建模. 文献 [12] 运用绝对关联分析方法优选时滞参数, 但模型中其他参数的选择仍具有一定的主观性. 文献 [13-14] 以平均相对误差为目标

收稿日期: 2016-01-10; 修回日期: 2016-03-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271086, 71503080); 教育部人文社科青年基金项目(14YJC630121); 河南省科技厅重点攻关项目(142102310123); 河南省高等学校重点科研项目(15A630005); 河南省科技厅项目(132300410216); 华北水利水电大学研究生创新项目(YK2015-20).

作者简介: 罗党(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与决策分析等研究; 韦保磊(1989—), 男, 硕士生, 从事灰色系统理论与决策分析的研究.

函数优化 GM(1,1) 幂模型的幂指数, 以提高模型对小样本振荡序列的预测精度, 但 GM(1,1) 幂模型固定的时间响应函数不能适应剧烈变化的实际数据. 钱吴永等提出数据变换的构造准则^[15], 并在文献 [16] 中运用加速平移变换和加权均值生成变换提高了振荡序列 GM(1,1) 模型的预测精度. 文献 [17-18] 运用傅立叶级数修正 GM(1,1) 模型的残差, 提高了模型的预测精度.

针对振荡幅度大的小样本振荡序列, 文献 [19] 构建灰色区间预测模型预测系统负荷, 但其上下包络是上下界序列的一时距 GM(1,1) 模型时间响应函数曲线, 忽略了时距对建模精度的影响. 文献 [20] 选取不同的级比阈值将序列划分为上界和下界序列, 然后将非等间隔上下界序列转化为等间隔序列建立 GM(1,1) 模型, 给出了序列的预测区间, 其建模过程较繁琐, 且两者均没有研究区间预测模型的性质. 本文在此基础上, 对序列的上下界序列直接建立非等间隔 GM(1,1) 模型得到序列区间预测模型的上下包络曲线和取值包络带, 给出区间预测模型的算法, 研究区间预测模型的灰指数规律性, 揭示影响区间预测模型预测时效的因素, 以期拓展区间预测模型的应用范围、完善灰色预测模型的理论基础. 最后通过应用实例表明所提出方法能够有效地提高序列的预测精度.

1 灰色区间预测模型及算法

1.1 灰色区间预测模型

定义 1 设原始非负振荡序列^[14]

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}.$$

$X^{(0)}$ 的上缘点构成的序列

$$X_u^{(0)} = \{x_u^{(0)}(t_1^u), x_u^{(0)}(t_2^u), \dots, x_u^{(0)}(t_{n_1}^u)\}$$

为上界序列; $X^{(0)}$ 的下缘点构成的序列

$$X_l^{(0)} = \{x_l^{(0)}(t_1^l), x_l^{(0)}(t_2^l), \dots, x_l^{(0)}(t_{n_2}^l)\}$$

为下界序列.

对上下界序列分别建立非等间距 GM(1,1) 模型. 设原始非负序列为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_m)\},$$

则有:

1) 间距序列: $\Delta t = \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_m\}$, $\Delta t_1 = 1$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, m$;

2) 一阶累加序列: $X^{(1)} = \{x^{(1)}(t_1), x^{(1)}(t_2), \dots, x^{(1)}(t_m)\}$, $x^{(1)}(t_k) = \sum_{i=1}^k \Delta t_i x^{(0)}(t_i)$, $k = 1, 2, \dots, m$;

3) 紧邻均值序列: $Z = \{z(t_2), z(t_3), \dots, z(t_m)\}$, $z(t_k) = 0.5(x^{(1)}(t_{k-1}) + x^{(1)}(t_k))$, $k = 2, 3, \dots, m$.

对非等间距 GM(1,1) 模型 $x^{(0)}(t_k) + az^{(1)}(t_k) = b$ 作最小二乘估计, 得到参数 a 、 b 的估计值为

$$[a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(t_2) & 1 \\ -z^{(1)}(t_3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(t_m) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(t_2) \\ x^{(0)}(t_3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(t_m) \end{bmatrix}.$$

将初始条件 $\hat{x}^{(1)}(t_1) = x^{(1)}(t_1) = x^{(0)}(t_1)$ 和参数 a 、 b 代入, 并求解非等间距 GM(1,1) 模型的白化方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b,$$

则有:

1) 时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(1)}(t_1) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t-t_1)} + \frac{b}{a}; \quad (1)$$

2) 时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(t_k) = \left(x^{(1)}(t_1) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t_k-t_1)} + \frac{b}{a}; \quad (2)$$

3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(t_{k+1}) = \frac{\hat{x}^{(1)}(t_{k+1}) - \hat{x}^{(1)}(t_k)}{\Delta t_{k+1}} = e^{at_1} \left(x^{(1)}(t_1) - \frac{b}{a}\right) \frac{e^{-at_{k+1}} - e^{-at_k}}{t_{k+1} - t_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1; \quad (3)$$

4) 原始序列残差为

$$\delta(t_{k+1}) = x^{(0)}(t_{k+1}) - \hat{x}^{(0)}(t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m-1; \quad (4)$$

5) 平均相对误差为

$$\eta = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|\delta(t_{k+1})|}{x^{(0)}(t_{k+1})}. \quad (5)$$

注 1 当 $\Delta t_k = d$ ($k = 2, 3, \dots, m$), d 为固定常数时, 非等间距 GM(1,1) 模型退化为等间距 GM(1,1) 模型. 特别地, 当 $\Delta t_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 时, 非等间距 GM(1,1) 模型即为经典的 GM(1,1) 模型.

定义 2 设原始振荡序列对应的折线序列为 $x(t)$, $x_u(t)$ 和 $x_l(t)$ 分别为依赖于上界序列和下界序列的连续函数, 若对于任意的 $t \in \mathbf{R}$ 恒有

$$x_l(t) \leq x(t) \leq x_u(t),$$

则称 $x_l(t)$ 为 $x(t)$ 的下界函数, $x_u(t)$ 为 $x(t)$ 的上界函数, 并称

$$S = \{(t, x(t)) | x_l(t) \leq x(t) \leq x_u(t)\}$$

为 $x(t)$ 的取值带.

定义 3 设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 为非负振荡序列, $X_u^{(0)}$ 为上界序列, $X_l^{(0)}$ 为下界序列, 则称

$$S_{gm} = \{(t, x^{(1)}(t)) | x_l^{(1)}(t) \leq x^{(1)}(t) \leq x_u^{(1)}(t)\}$$

为一阶累加序列 $X^{(1)}$ 的取值包络带, 其中

$$\hat{x}_u^{(1)}(t) = \left(x_u^{(1)}(t_1^u) - \frac{b_u}{a_u}\right)e^{-a_u(t-t_1^u)} + \frac{b_u}{a_u},$$

$$\hat{x}_l^{(1)}(t) = \left(x_l^{(1)}(t_1^l) - \frac{b_l}{a_l}\right)e^{-a_l(t-t_1^l)} + \frac{b_l}{a_l}$$

分别为 $X_u^{(0)}$ 和 $X_l^{(0)}$ 对应非等间距 GM(1,1) 模型的时间响应函数, 称为上包络曲线和下包络曲线.

由定义 2 和定义 3 可知, 原始序列的区间预测值为

$$S_{t_{n+k}} = [\hat{x}_l^{(0)}(t_{n+k}), \hat{x}_u^{(0)}(t_{n+k})], k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

由式 (3) 可知

$$\hat{x}_l^{(0)}(t_{n+k}) = \frac{\hat{x}_l^{(1)}(t_{n+k}) - \hat{x}_l^{(1)}(t_k)}{t_{n+k} - t_k},$$

$$\hat{x}_u^{(0)}(t_{n+k}) = \frac{\hat{x}_u^{(1)}(t_{n+k}) - \hat{x}_u^{(1)}(t_k)}{t_{n+k} - t_k}.$$

原始序列的基本预测值为

$$\hat{x}^{(0)}(t_{n+k}) = \frac{\hat{x}_l^{(0)}(t_{n+k}) + \hat{x}_u^{(0)}(t_{n+k})}{2}. \quad (7)$$

1.2 区间预测算法

灰色区间预测算法步骤如下.

Step 1: 辨识原始序列的上缘点构成的上界序列和下缘点构成的下界序列.

Step 2: 对上界序列和下界序列分别建立非等间距 GM(1,1) 模型, 运用式 (1) 得到取值包络带的上下包络曲线.

Step 3: 运用式 (3)~(5) 计算上下界序列的模拟误差和平均相对误差, 评估模型的精度等级^[2-3].

Step 4: 给定预测步长, 运用式 (6) 和 (7) 计算原始序列的区间预测值和基本预测值.

2 区间预测模型的性质

文献 [2] 指出, 发展系数 a_u 和 a_l 的可容区为 $(-2, 0) \cup (0, 2)$, 按照发展系数阈值界定了模型的有效区、慎用区、不宜区和禁区, 并给出了发展系数与模型预测范围的关系. 由于发展系数在区间 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 内取值时, 才能对序列直接建立 GM(1,1) 模型, 下文仅讨论发展系数在此区间内取值时, 包络预测模型在区间 $[1, n + n_0]$ 内的性质 (n_0 为依发展系数取值确定的预测步长).

定理 1 设 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(t_1), \dots, x^{(1)}(t_m)\}$ 为一阶累加序列, $X^{(1)}$ 的点均在指数曲线 $x^{(1)}(t) = be^{at} + c$ 上的充要条件为, 对于任意 $k = 2, 3, \dots, m$, 有

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = c_1,$$

$$\frac{x^{(1)}(t_{k+1}) - x^{(1)}(t_k)}{x^{(1)}(t_k) - x^{(1)}(t_{k-1})} = c_2,$$

其中 $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+$.

证明 必要性. 由 $X^{(1)}$ 的点均在指数曲线 $x^{(1)}(t) = be^{at} + c$ 上, 可知

$$\frac{x^{(1)}(t_{k+1}) - x^{(1)}(t_k)}{x^{(1)}(t_k) - x^{(1)}(t_{k-1})} = \frac{e^{at_{k+1}} - e^{at_k}}{e^{at_k} - e^{at_{k-1}}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^{(0)}(t_{k+1})\Delta t_{k+1}}{x^{(0)}(t_k)\Delta t_k} = e^{a\Delta t_k} \frac{e^{a\Delta t_{k+1}} - 1}{e^{a\Delta t_k} - 1}.$$

对于 $k = 2, 3, \dots, m - 1$, 有以下方程组成立:

$$\begin{cases} e^{a\Delta t_2} \frac{e^{a\Delta t_3} - 1}{e^{a\Delta t_2} - 1} = \frac{x^{(0)}(t_3)\Delta t_3}{x^{(0)}(t_2)\Delta t_2}, \\ \vdots \\ e^{a\Delta t_k} \frac{e^{a\Delta t_{k+1}} - 1}{e^{a\Delta t_k} - 1} = \frac{x^{(0)}(t_{k+1})\Delta t_{k+1}}{x^{(0)}(t_k)\Delta t_k}, \\ \vdots \\ e^{a\Delta t_{m-1}} \frac{e^{a\Delta t_m} - 1}{e^{a\Delta t_{m-1}} - 1} = \frac{x^{(0)}(t_m)\Delta t_m}{x^{(0)}(t_{m-1})\Delta t_{m-1}}. \end{cases} \quad (8)$$

显然地, 仅当

$$\begin{cases} \Delta t_2 = \dots = \Delta t_m = c_1, \\ \frac{x^{(0)}(t_3)}{x^{(0)}(t_2)} = \dots = \frac{x^{(0)}(t_m)}{x^{(0)}(t_{m-1})} = c_2, \end{cases}$$

方程组 (8) 有唯一解 $a = \frac{\ln c_2}{c_1}$.

充分性. 由 $\frac{x^{(1)}(t_{k+1}) - x^{(1)}(t_k)}{x^{(1)}(t_k) - x^{(1)}(t_{k-1})} = c_2$ 可知

$$x^{(1)}(t_{k+1}) - (1 + c_2)x^{(1)}(t_k) + c_2x^{(1)}(t_{k-1}) = 0. \quad (9)$$

由 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = c_1$ 可知式 (9) 为差分方程, 其解为

$$x^{(1)}(t) = b(c_2)^{t/c_1} + c.$$

由于 $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+$, 令 $a = \frac{\ln c_2}{c_1}$, 方程的解可表示为

$$x^{(1)}(t) = be^{at} + c.$$

即 $X^{(1)}$ 的点均在指数曲线 $x^{(1)}(t) = be^{at} + c$ 上. \square

定理 1 表明, 仅当序列 $X^{(1)}$ 为等间隔, 且非齐次级比为常数时, 序列具有白指数规律. 对于非等间隔的序列, 序列具有灰指数规律. 结合定义 3 可知, 序列的取值包络带也具有灰性.

定义 4 对于任意的 $1 \leq t_1 < t_2 \leq n + n_0$, 若

$$x_u^{(1)}(t_1) - x_l^{(1)}(t_1) = x_u^{(1)}(t_2) - x_l^{(1)}(t_2),$$

则称 S_{gm} 为平行包络带; 若

$$x_u^{(1)}(t_2) - x_l^{(1)}(t_2) > x_u^{(1)}(t_1) - x_l^{(1)}(t_1) > 0,$$

则称 S_{gm} 为扩张包络带; 若

$$x_u^{(1)}(t_1) - x_l^{(1)}(t_1) > x_u^{(1)}(t_2) - x_l^{(1)}(t_2) > 0,$$

则称 S_{gm} 为收缩包络带.

定义 5 若存在 $1 \leq t_0 < n + n_0$, 使得

$$x_u^{(1)}(t_0) < x_l^{(1)}(t_0),$$

则称 S_{gm} 为病态包络带.

定理 2 令 $g(t) = x_u^{(1)}(t) - x_l^{(1)}(t)$, 包络带 $S_{gm} = \{(t, x^{(1)}(t)) | x_l^{(1)}(t) \leq x^{(1)}(t) \leq x_u^{(1)}(t)\}$ 在区间 $[1, n +$

n_0] 内具有以下性质:

- 1) 若 $a_u = a_l$, $(a_l x_l^{(1)}(t_1^l) - b_l)e^{a_l t_1^l} = (a_u x_u^{(1)}(t_1^u) - b_u)e^{a_u t_1^u}$, 则 S_{gm} 为平行包络带;
- 2) 若 $g'(t) > 0, g(1) > 0$, 则 S_{gm} 为扩张包络带;
- 3) 若 $g'(t) < 0, g(n + n_0) > 0$, 则 S_{gm} 为收缩包络带;
- 4) 若 $g(n + n_0)g(1) < 0$, 则 S_{gm} 为病态包络带.

证明 由 $g(t) = x_u^{(1)}(t) - x_l^{(1)}(t)$ 可知

$$g(t) = x_u^{(1)}(t_1^u) - x_l^{(1)}(t_1^l) - \frac{1}{a_l}(a_l x_l^{(1)}(t_1^l) - b_l)(e^{-a_l(t-t_1^l)} - 1) + \frac{1}{a_u}(a_u x_u^{(1)}(t_1^u) - b_u)(e^{-a_u(t-t_1^u)} - 1),$$

$$g'(t) = (a_l x_l^{(1)}(t_1^l) - b_l)e^{a_l t_1^l} e^{-a_l t} - (a_u x_u^{(1)}(t_1^u) - b_u)e^{a_u t_1^u} e^{-a_u t}.$$

- 1) 由 $a_u = a_l$, $(a_l x_l^{(1)}(t_1^l) - b_l)e^{a_l t_1^l} = (a_u x_u^{(1)}(t_1^u) - b_u)e^{a_u t_1^u}$ 可知, $g'(t) = 0$, 且

$$g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{b_u - b_l}{a_u} = \frac{b_u - b_l}{a_l}.$$

对于任意的 $1 \leq t_1 < t_2 \leq n + n_0$, 有

$$x_u^{(1)}(t_1) - x_l^{(1)}(t_1) = x_u^{(1)}(t_2) - x_l^{(1)}(t_2) = \frac{b_u - b_l}{a_l},$$

即证得 S_{gm} 为平行包络带, 如图 1(a) 所示.

- 2) 由 $g'(t) > 0, g(1) > 0$ 可知, $g(t)$ 为增函数, 且

$$g(t) > g(1) > 0, t \in [1, n + n_0],$$

即证得 S_{gm} 为扩张包络带, 如图 1(b) 所示.

- 3) 由 $g'(t) < 0, g(n + n_0) > 0$ 可知, $g(t)$ 为减函数, 且

$$g(t) > g(n + n_0) > 0, t \in [1, n + n_0],$$

即证得 S_{gm} 为收缩包络带, 如图 1(c) 所示.

- 4) 由 $g(n + n_0)g(1) < 0$ 和介值性定理可知, 至少存在一点 $t_0 \in (1, n + n_0)$, 使得

$$g(t_0) = 0.$$

求指数方程解析解是困难的, 可用牛顿切线法求得近似数值解 t_0 , 这里不再论述. 由此证得 S_{gm} 为病态包络带, 如图 1(d) 所示. \square

任何预测方法均有预测时效问题, 即在保证一定的预测精度或可信度的基础上, 模型能够向后预测多少步. 定理 2 表明, 灰色区间预测模型的向后预测步长 n_0 不仅与发展系数取值有关系, 而且与振荡序列的结构有联系. 区间预测模型的病态性正是由于预测步长 n_0 的取值超越了模型的预测能力导致的, 此时为了保证预测值可信度, n_0 的最大取值为 $[t_0] - n$, $[t_0]$ 表示 t_0 的整数部分.

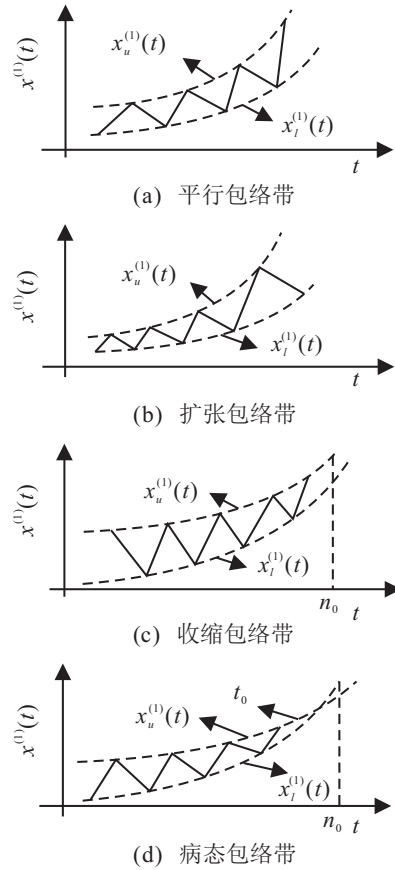


图 1 4 种取值包络带示意图

3 数值实验与应用实例

3.1 数值实验

设原始振荡序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(k)\}_1^{16} = \{0.45, 5, 1, 6, 1.6, 6.31, 2.16, 6.63, 2.91, 6.97, 3.93, 7.33, 5.3, 7.7, 7.16, 8.4\}.$$

灰色区间预测模型的建立过程如下.

Step 1: 上缘点构成的上界序列为

$$X_u^{(0)} = \{x_u^{(0)}(2), x_u^{(0)}(4), x_u^{(0)}(6), x_u^{(0)}(8), x_u^{(0)}(10), x_u^{(0)}(12), x_u^{(0)}(14)\} = \{5.00, 6.00, 6.31, 6.63, 6.97, 7.33, 7.70\};$$

下缘点构成的下界序列为

$$X_l^{(0)} = \{x_l^{(0)}(3), x_l^{(0)}(5), x_l^{(0)}(7), x_l^{(0)}(9), x_l^{(0)}(11), x_l^{(0)}(13), x_l^{(0)}(15)\} = \{1.00, 1.60, 2.16, 2.91, 3.93, 5.30, 7.16\}.$$

Step 2: 上下界序列均是间距为 2 的等间距序列, 其时间响应式分别为

$$\begin{cases} \hat{x}_u^{(1)}(t) = 234.573 1e^{0.024 95(t-2)} - 229.573 1, \\ \hat{x}_u^{(0)}(t_{k+1}) = 0.5(\hat{x}_u^{(1)}(t_{k+1}) - \hat{x}_u^{(1)}(t_k)); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_l^{(1)}(t) = 9.1447e^{0.14879(t-3)} - 8.1147, \\ \hat{x}_0^{(1)}(t_{k+1}) = 0.5(\hat{x}_l^{(1)}(t_{k+1}) - \hat{x}_l^{(1)}(t_k)). \end{cases}$$

Step 3: 对上下界序列进行模拟的平均相对误差分别为 0.023 7% 和 1.441 9%, 精度均为一级, 可作中长期预测, 模拟结果如表 1 所示.

表 1 上下界序列的模拟结果

序号	实际值	预测值	相对误差/%
2	5.00	5.00	0
3	1.00	1.00	0
4	6.00	6.00	0.0000
5	1.60	1.5847	0.9563
6	6.31	6.3069	0.0491
7	2.16	2.1339	1.2069
8	6.63	6.6295	0.0069
9	2.91	2.8735	1.2536
10	6.97	6.9687	0.0188
11	3.93	3.8694	1.5410
12	7.33	7.3252	0.0657
13	5.30	5.2105	1.6882
14	7.70	7.6999	0.0011
15	7.16	7.0164	2.0054

Step 4: 运用牛顿切线法求得上下界序列的响应函数在 $t_0 = 22.72$ 时相交, 即取值包络带是病态的, 如图 2 所示. 故仅当预测步长 $n_0 \leq 7$ 时, 区间预测模型的预测值才具有可信性.

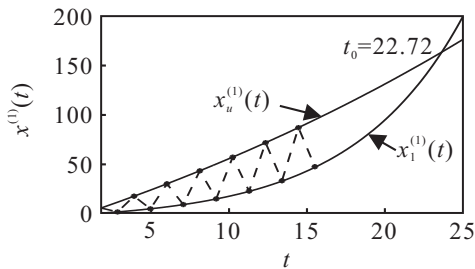


图 2 原始序列区间预测的包络带

3.2 应用实例

某系统 1974~1982 年的实测负荷资料如表 2 所示. 由文献 [19] 中的上下限划分法可知, 上下界序列分别为

$$\begin{aligned} X_u^{(0)} &= \{x_u^{(0)}(2), x_u^{(0)}(4), x_u^{(0)}(6), x_u^{(0)}(9)\} = \\ & \{14.47, 14.76, 15.39, 14.52\}, \\ X_l^{(0)} &= \{x_l^{(0)}(1), x_l^{(0)}(3), x_l^{(0)}(5), x_l^{(0)}(7), x_l^{(0)}(8)\} = \\ & \{13.95, 13.37, 14.41, 14.44, 13.61\}; \end{aligned}$$

表 2 区间预测模型对系统负荷的模拟结果

序号	年份	实测值 ($10^2 \text{kcal/m}^2 \cdot \text{d}$)	预测值	相对误差/%
1	1974	13.95	13.95	0
2	1975	14.47	14.47	0
3	1976	13.37	13.81	3.28
4	1977	14.76	15.03	1.82
5	1978	14.41	13.91	3.46
6	1979	15.39	14.90	3.19
7	1980	14.44	14.01	2.94
8	1981	13.61	14.09	3.55
9	1982	14.52	14.74	1.51

上下界序列的时间响应式分别为

$$\begin{cases} \hat{x}_u^{(1)}(t) = -3490.912e^{0.00432(t-2)} + 3505.382, \\ \hat{x}_u^{(0)}(t_{k+1}) = \frac{\hat{x}_u^{(1)}(t_{k+1}) - \hat{x}_u^{(1)}(t_k)}{t_{k+1} - t_k}; \\ \hat{x}_l^{(1)}(t) = 3708.30e^{0.00371(t-1)} - 3649.35, \\ \hat{x}_l^{(0)}(t_{k+1}) = \frac{\hat{x}_l^{(1)}(t_{k+1}) - \hat{x}_l^{(1)}(t_k)}{t_{k+1} - t_k}. \end{cases}$$

对上下界序列进行模拟的平均相对误差分别为 2.17% 和 3.31%, 模型具有一级精度, 模拟结果如表 2 所示.

预测 1983 年系统负荷: 上界序列的预测值为

$$x_u^{(0)}(10) = x_u^{(1)}(10) - x_u^{(1)}(9) = 14.61;$$

下界序列的预测值

$$x_l^{(0)}(10) = \frac{x_l^{(1)}(10) - x_l^{(1)}(8)}{2} = 14.17;$$

基本预测值为

$$x^{(0)}(10) = \frac{x_u^{(0)}(10) + x_l^{(0)}(10)}{2} = 14.39.$$

1983 年系统负荷的实测值为 14.24, 在预测区间 [14.17, 14.61] 内, 且基本预测值与实测值的相对误差仅为 1.05%. 本文模型的预测区间和基本预测值的精度均高于文献 [19] 预测结果 [14.15, 14.66] 和 14.405.

4 结 论

本文鉴于传统灰色预测建模依赖于序列光滑的前提, 不能适用于振荡幅度大的小样本序列预测问题, 基于系统具有动态发展特性的事实, 运用上下包络曲线界定系统发展的边界, 提出了灰色区间预测方法, 研究了预测模型的算法和性质. 所提出方法也适用于非等时距原始序列, 原始序列的状态值 and 变化区间的预测, 给决策控制提供了一定的选择余地, 具有理论和实践意义.

选择适当的上下界序列, 是高精度长期预测的前提, 原始序列的级比结构和上下界序列的选择、模型时效性的关系, 是需要进一步探讨的问题.

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 218-238.
(Deng J L. The elements of grey system[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002: 218-238.)
- [2] 刘思峰, 杨英杰, 吴利丰, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第7版. 北京: 科学出版社, 2014: 140-168.
(Liu S F, Yang Y J, Wu L F, et al. Grey system theory and application[M]. 7th ed. Beijing: Science Press, 2014: 140-168.)
- [3] 肖新平, 毛树华. 灰预测与决策方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 181-189.
(Xiao X P, Mao S H. Grey prediction and decision[M]. Beijing: Science Press, 2013: 181-189.)
- [4] Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. A novel grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4399-4406.
- [5] Wang Z X, Hipel K W, Wang Q, et al. An optimized NGBM(1,1) model for forecasting the qualified discharge rate of industrial wastewater in China[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(12): 5524-5532.
- [6] Hsu L C. A genetic algorithm based nonlinear grey Bernoulli model for output forecasting in integrated circuit industry[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(6): 4318-4323.
- [7] Xie N M, Yuan C Q, Yang Y J. Forecasting China's energy demand and self-sufficiency rate by grey forecasting model and Markov model[J]. Int J of Electrical Power & Energy Systems, 2015, 66(1): 1-8.
- [8] Samvedi A, Jain V. A grey approach for forecasting in a supply chain during intermittent disruptions[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2013, 26(3): 1044-1051.
- [9] Hsin P H, Chen C I. Application of game theory on parameter optimization of the novel two-stage Nash nonlinear grey Bernoulli model[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2015, 27(1/2/3): 168-174.
- [10] Deng J L. A novel grey model GM(1, 1 - τ , r): Generalizing[J]. The J of Grey System, 2001, 13(1): 1-8.
- [11] Deng J L. Undulating grey model(UGM) GM(1, 1) $\tan(k - \tau)p, \sin(k - \tau)p$ [J]. The J of Grey System, 2001, 13(3): 201-205.
- [12] Zhang P, Zou Z G. Grey evaluating the policy repayment via GM(1, 1 - τ , r)[J]. J of Grey System, 2002, 14(1): 45-48.
- [13] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 基于GM(1,1)幂模型的振荡序列建模方法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(11): 2440-2444.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. Modeling approach for oscillatory sequences based on GM(1,1) power model[J]. System Engineering and Electronics, 2011, 33(11): 2440-2444.)
- [14] 王正新. 振荡型GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1459-1464.
(Wang Z X. Oscillating GM(1,1) power model and its application[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1459-1464.)
- [15] 钱吴永, 党耀国. 一种新型数据变换技术及其在GM(1, 1)模型中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(12): 2879-2881.
(Qian W Y, Dang Y G. New type of data transform and its application in GM(1,1) model[J]. System Engineering and Electronics, 2009, 31(12): 2879-2881.)
- [16] 钱吴永, 党耀国. 基于振荡序列的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 149-154.
(Qian W Y, Dang Y G. GM(1,1) model based on oscillation sequences[J]. System Engineering—Theory & Practice, 2009, 29(3): 149-154.)
- [17] Lin Y H, Chiu C C, Lee P C, et al. Applying fuzzy grey modification model on inflow forecasting[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2012, 25(25): 734-743.
- [18] 王正新. 基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 270-274.
(Wang Z X. Grey forecasting method for small sample oscillating sequences based on Fourier series[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 270-274.)
- [19] 王四清, 王先民, 李元旦, 等. 系统负荷的灰色区间预测[J]. 系统工程, 1999, 17(3): 60-65.
(Wang S Q, Li X M, Li Y D, et al. Gray interval forecasting of loads of building of hygrothermal system[J]. System Engineering, 1999, 17(3): 60-65.)
- [20] 宋中民. 灰色区间预测的新方法[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2002, 26(6): 796-799.
(Song Z M. A new method for grey interval forecasting[J]. J of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engineering, 2002, 26(6): 796-799.)

(责任编辑: 郑晓蕾)