第 32 卷 第 1 期
2017 年 1 月

控 制 与 决 策
*Control and Decision*

Vol. 32 No. 1
Jan. 2017

**文章编号:** 1001-0920 (2017) 01-0111-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.1604

# 基于信息分解的区间灰数一致性投影决策模型

蒋诗泉[1,2†], 刘思峰[1], 刘中侠[1], 方志耕[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 铜陵学院 数学与计算机学院，安徽 铜陵 244000)

**摘 要:** 针对区间灰数决策时信息得不到充分利用的问题, 在信息不丢失的前提下, 利用信息分解方法将区间灰数分解成实数型的“白部”和“灰部”. 在分析已有的向量投影决策方法优缺点基础上, 建立正、负理想点的“白部”和“灰部”与方案点的“白部”和“灰部”构成向量双向投影的测度方法, 进而构建向量双向投影的一致性系数决策模型. 最后通过算例表明了所提出模型的可行性和有效性.

**关键词:** 信息分解；区间灰数；投影决策；一致性系数

**中图分类号:** N941 **文献标志码:** A

# Projection decision model of interval grey number consistence based on information decomposition

*JIANG Shi-quan*[1,2†], *LIU Si-feng*[1], *LIU Zhong-xia*[1], *FANG Zhi-geng*[1]

(1. College of Economic and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China;
2. College of Mathematics and Computer Science，Tongling University，Tongling 244000，China)

**Abstract:** For the problem that the interval grey number can not make full use of decision information, on the premise of information without losing, the interval grey number is decomposed into the real type sequence of“white sequence”and“grey sequence”based on the information decomposition method. The advantages and disadvantages of existing vector projection decision-making methods are analyzed. The bi-directional projection method is constructed based on the positive and negative ideal point and solution points vector measure. And the consistency coefficient of the bi-directional projection decision-making model is proposed. Finally, the numerical example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed model.

**Keywords:** information decomposition；interval grey numbers；projection decision-making；consistency coefficient

## 0 引 言

决策理论是经济管理理论的一个重要分支, 多属性决策是科学决策的重要组成部分. 人们对于指标为模糊数、实数的决策问题的研究较多, 而且取得了较多的成果, 对于指标为(区间) 灰数的灰色决策模型的研究也取得了很大的进展[1-6]. 文献 [7] 通过构造区间灰数加减逆运算信息还原算子, 从相似性和接近性的视角研究了灰色决策模型. 文献 [8] 建立了基于空间映射的区间灰数序列几何表征体系, 将区间灰数序列转换成实数序列, 进而构建了灰数关联决策模型. 区间灰数的排序是区间灰数决策问题中的关键问题. 文献 [9] 给出了区间灰数分布情况已知情况下的灰数的排序问题. 文献 [10] 提出了一般区间灰数与标准区间灰数的转换规则和相对核与精确度的概念, 从而有利于决策者进行决策. 文献 [11] 对区间灰数之间的距离计算方法进行研究, 通过比较各指标与靶心连线所围成图形面积的大小进行方案优劣排序, 该方法能够有效地弱化极端指标值对决策的影响. 文献 [12] 通过定义区间灰数灰度的离散 Choquet 积分, 根据方案属性方差最小原则建立优化模型, 提出了 Choquet 积分的区间灰数多属性决策方法.

将每个方案看作一个向量, 利用向量的投影进行

**收稿日期:** 2015-12-28；**修回日期:** 2016-03-17.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(71171113)；安徽省高校人文社会科学重点研究项目(SK2015A537)；国家自然科学基金与英国皇家学会国际合作交流项目(71111130211).

**作者简介:** 蒋诗泉 (1974−), 男, 副教授, 博士生, 从事灰色理论、复杂系统建模等研究；刘思峰 (1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色理论、数量经济学等研究.

†通信作者. E-mail: jshq6699@163.com

多属性决策既直观、简洁又科学合理, 因此投影决策在决策理论中得到广泛地应用. 文献 [13] 将欧氏距离改进为"垂面"距离, 利用与理想点"垂面"距离对方案进行排序, 但该方法仍然没有真正解决 TOPSIS 方法的不足. 文献 [14] 通过定义模糊犹豫信息下的方案与理想点间的向量表达式, 提出了基于 TOPSIS 的犹豫模糊信息的投影决策模型. 文献 [15] 研究了基于优化理论的模糊向量投影的三角模糊数的决策模型.

许多学者从不同的视角努力解决信息为区间灰数的决策问题, 并取得了一定的成果. 但是, 不论采取哪种方法进行决策, 都会涉及数据的四则运算. 由于区间灰数的四则运算迄今尚未完全解决, 如果按照经典的灰代数系统进行运算, 则很可能存在信息丢失现象, 从而造成决策错误或决策精度大大降低. 另外, 对于投影决策方法, 一般都是单向投影, 只考虑方案在正理想点上的投影, 很少同时考虑方案点与正、负理想点的关系, 因此也都没有很好地解决一致性问题, 特别是当方案在正理想点上投影相等时无法对方案进行排序. 本文针对区间灰数决策时决策信息得不到充分利用的问题, 在信息不丢失的情况下, 利用信息分解方法将区间灰数序列分解成实数型的"白部序列"和"灰部序列"[16], 建立了正、负理想点的"白部"和"灰部"与方案点的"白部"和"灰部"所构成向量的双向投影的测度方法, 进而构建向量双向投影的一致性系数决策模型.

## 1 基本概念和理论

**定义 1** 对于任意一个多属性区间灰数的决策矩阵 $A(\otimes)=(a_{ij}(\otimes))_{m\times n}$, 当 $x_j^+\in[a_j^{+L},a_j^{+U}]=[\max(a_{ij}^L),\max(a_{ij}^U)](i=1,2,\cdots,n)$ 时, 称 $x_j^+$ 为正理想点; 当 $x_j^-\in[a_j^{-L},a_j^{-U}]=[\min(a_{ij}^L),\min(a_{ij}^U)](i=1,2,\cdots,n)$ 时, 称 $x_j^-$ 为负理想点. 由正理想点构成的序列为正理想序列, 记为

$$X(\otimes)^+=(x_1^+,x_2^+,\cdots,x_m^+);$$

由负理想点构成的序列为负理想序列, 记为

$$X(\otimes)^-=(x_1^-,x_2^-,\cdots,x_m^-).$$

设 $X_0(\otimes)=(x_0(1),x_0(2),\cdots,x_0(n))(x_0(i)\in[x_{0i}^L,x_{0i}^U])$ 为区间灰数形成的系统行为特征序列, 称 $X_i(\otimes)=(x_i(1),x_i(2),\cdots,x_i(n))$ 为区间灰数形成的比较序列. 其中: $x_i(k)\in[x_{ik}^L,x_{ik}^U],i=1,2,\cdots,m,\ k=1,2,\cdots,n$.

**定义 2** [16-17] 设区间灰数序列

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n)).$$

其中: $\otimes(t_k)\in[a_k,b_k],k=1,2,\cdots,n$. 将其表示为 $\otimes(t_k)=a_k+h_k\xi,\ h_k=b_k-a_k,\xi\in[0,1]$, 称 $a_k$ 为区间灰数 $\otimes(t_k)$ 的"白部", 称 $h_k$ 为区间灰数 $\otimes(t_k)$ 的"灰部". 所有"白部"构成的序列称为区间灰数 $\otimes(t_k)$ 的白部序列, 记为 $R$; 所有"灰部"构成的序列称为区间灰数 $\otimes(t_k)$ 的灰部序列, 记为 $H$. 即

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n))\Rightarrow$$
$$\begin{cases}R=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\\H=(h_1,h_2,\cdots,h_n).\end{cases}$$

**定理 1** [17] 信息分解下的区间灰数白化序列所含信息量与原区间灰数序列相等.

**证明** 因为 $\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=[a_k,b_k]+[a_k,a_k]-[a_k,a_k]$, 所以 $[a_k,b_k]=[a_k,a_k]+([a_k,b_k]-[a_k,a_k])$. 由区间灰数代数运算法则, 得

$$[a_k,b_k]-[a_k,a_k]=[a_k-a_k,b_k-a_k]=$$
$$[0,b_k-a_k]=(b_k-a_k)\times[0,1],$$

故 $[a_k,b_k]=a_k+(b_k-a_k)\times[0,1]$, 即 $\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=a_k+(b_k-a_k)\times[0,1]=a_k+h_k\xi,\xi\in[0,1])$. □

**定义 3** 设两个方案的指标构成的序列分别为 $X_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})$ 和 $Y_j=(r_{j1},r_{j2},\cdots,r_{jn}),\ i,j=1,2,\cdots,m$, 则称 $X_iY_j=(r_{j1}-r_{i1},r_{j2}-r_{i2},\cdots,r_{jn}-r_{in})$ 为方案 $X_i$ 与方案 $Y_j$ 构成的向量.

**定义 4** 设 $X_i^{(R)}=(r_{i1}^{(R)},r_{i2}^{(R)},\cdots,r_{in}^{(R)})$ 和 $X_i^{(H)}=(r_{i1}^{(H)},r_{i2}^{(H)},\cdots,r_{in}^{(H)})$ 分别为方案 $X_i$ 的"白部"和"灰部"序列坐标; $Y^{+(R)}=(r_1^{+(R)},r_2^{+(R)},\cdots,r_n^{+(R)})$ 和 $Y^{+(H)}=(r_1^{+(H)},r_2^{+(H)},\cdots,r_n^{+(H)})$ 为正理想点"白部"和"灰部"序列坐标; $Y^{-(R)}=(r_1^{-(R)},r_2^{-(R)},\cdots,r_n^{-(R)})$ 和 $Y^{-(H)}=(r_1^{-(H)},r_2^{-(H)},\cdots,r_n^{-(H)})$ 为负理想点"白部"和"灰部"序列坐标. 则称向量 $Y^{-(R)}Y^{+(R)}=(r_1^{+(R)}-r_1^{-(R)},r_2^{+(R)}-r_2^{-(R)},\cdots,r_n^{+(R)}-r_n^{-(R)})$ 为正、负理想方案"白部"所构成的向量; 称向量 $Y^{-(H)}Y^{+(H)}=(r_1^{+(H)}-r_1^{-(H)},r_2^{+(H)}-r_2^{-(H)},\cdots,r_n^{+(H)}-r_n^{-(H)})$ 为正、负理想方案"灰部"所构成的向量; 称向量 $Y^{-(R)}X_i^{(R)}=(r_{i1}^{(R)}-r_1^{-(R)},r_{i2}^{(R)}-r_2^{-(R)},\cdots,r_{in}^{(R)}-r_n^{-(R)})$ 为负理想方案与第 $X_i$ 个方案"白部"所构成的向量; 称向量 $Y^{-(H)}X_i^{(H)}=(r_{i1}^{(H)}-r_1^{-(H)},r_{i2}^{(H)}-r_2^{-(H)},\cdots,r_{in}^{(H)}-r_n^{-(H)})$ 为负理想方案与第 $X_i$ 个方案"灰部"所构成的向量. 相应的模分别为

$$|Y^{-(R)}Y^{+(R)}|=\sqrt{\sum_{j=1}^n(r_j^{+(R)}-r_j^{-(R)})^2},$$

$$|Y^{-(H)}Y^{+(H)}|=\sqrt{\sum_{j=1}^n(r_j^{+(H)}-r_j^{-(H)})^2},$$

$$|Y^{-(R)}X_i^{(R)}|=\sqrt{\sum_{j=1}^n(r_{ij}^{(R)}-r_j^{-(R)})^2},$$

$$|Y^{-(H)}X_i^{(H)}|=\sqrt{\sum_{j=1}^n(r_{ij}^{(H)}-r_j^{-(H)})^2}.$$

则称

$$\cos(Y^{-(R)}X_i^{(R)}, Y^{-(R)}Y^{+(R)}) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(r_j^{+(R)} - r_j^{-(R)})(r_{ij}^{(R)} - r_j^{-(R)})}{|Y^{-(R)}X_i^{(R)}| \cdot |Y^{-(R)}Y^{+(R)}|}$$

为向量 $Y^{-(R)}X_i^{(R)}$ 与向量 $Y^{-(R)}Y^{+(R)}$ 的夹角余弦.

**定义 5**　设方案点、正理想点、负理想点的"白部"分别为 $X_i^{(R)}$、$Y^{+(R)}$、$Y^{-(R)}$, 则称

$$P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)}) = |Y^{-(R)}X_i^{(R)}| \cdot \mathrm{COS}\langle Y^{-(R)}X_i^{(R)}, Y^{-(R)}Y^{+(R)}\rangle = \frac{\sum_{j}^{n}(r_{ij}^{(R)} - r_j^{-(R)})(r_j^{+(R)} - r_j^{-(R)})}{|Y^{-(R)}Y^{+(R)}|}$$

为负理想点"白部"与方案点"白部"所构成的向量在正理想点"白部"与负理想点"白部"所构成的向量上的投影; 而

$$P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)}) = |Y^{-(R)}Y^{+(R)}| \cdot \mathrm{COS}\langle Y^{-(R)}Y^{+(R)}, Y^{+(R)}X_i^{-(R)}\rangle = \frac{\sum_{j}^{n}(r_j^{(R)} - r_{ij}^{-(R)})(r_j^{+(R)} - r_j^{-(R)})}{|Y^{+(R)}X_i^{(R)}|}$$

为正理想点"白部"与负理想点"白部"所构成的向量在负理想点"白部"与方案点"白部"所构成的向量上的投影.

类似地, 可以定义灰部的投影, 在此不再赘述.

**定理 2**　$P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})$ 越大, 方案 $X_i$ 越靠近正理想点 $Y^+$;

$P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})$ 越小, 方案 $X_i$ 越远离正理想点 $Y^+$.

$P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})$ 越大, 方案 $X_i$ 越靠近负理想点 $Y^-$;

$P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})$ 越小, 方案 $X_i$ 越远离负理想点 $Y^-$.

**证明**　设方案点为 $X_i$, 正负理想点为 $Y^+$、$Y^-$. 由定义 5 可知, $P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})$ 越大, 向量 $Y^-X_i$ 与向量 $Y^-Y^+$ 越接近, 故方案点 $X_i$ 越靠近正理想点 $Y^+$; $P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})$ 越小, 向量 $Y^-X_i$ 与向量 $Y^-Y^+$ 越远离, 故方案点 $X_i$ 越远离正理想点 $Y^+$. 同理可证 $P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})$. □

**定理 3**　假设 $P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})$ 和 $P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})$ 如定义 5 所示, 设

$$f(\delta_i) = [(1-\delta_i) \cdot P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})]^2 + [\delta_i \cdot P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})]^2,$$

其中 $\delta_i$ 为一致性系数, 则

$$\delta_i = [P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})]^2 / \{[P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})]^2 + [P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})]^2\},$$

且一致性系 $\delta_i$ 越大, 说明第 $i$ 方案越好.

**证明**　由定义 5 和定理 2 可知:

$P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})$ 越大, 方案 $X_i$ 越靠近正理想点 $Y^+$; $P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})$ 越小, 方案 $X_i$ 越远离负理想点 $Y^-$. 因此, 只需综合两个方面使其一致变化就可以得到最优. 又由定理 3 已知条件可得到一致性系数 $\delta_i$ 为如下函数:

$$f(\delta_i) = [(1-\delta_i) \cdot P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})]^2 + [\delta_i P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})]^2,$$

其中 $\delta_i$ 为一致性系数, 故只需要求使得函数 $f(\delta_i)$ 最小时的 $\delta_i$ 值, 即求 $\min f(\delta_i)$. 因为函数 $f(\delta_i)$ 没有不可导点, 故最值点就是一阶导数为零的点, 由 $\mathrm{d}f(\delta_i)/\mathrm{d}\delta_i = 0$, 求得

$$\delta_i = [P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})]^2 / \{[P_{r_jY^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_i^{(R)})]^2 + [P_{r_jY^{+(R)}X_i^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)})]^2\}. \qquad \square$$

**定义 6**　设 $\delta_i^{(R)}$ 和 $\delta_i^{(H)}$ 分别为"白部"和"灰部"双向投影一致性系数, 则称 $\delta_i = \theta \cdot \delta_i^{(R)} + (1-\theta) \cdot \delta_i^{(H)}$ 为综合一致性系数, 其中 $\theta \in (0,1)$ 为平衡系数, 一般取 $\theta = 0.5$.

## 2　基于信息分解的双向投影决策算法步骤

Step 1: 确定多属性决策的方案集 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 和指标集 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 并写出 $X$ 对 $S$ 的区间灰数决策矩阵 $M$, 即 $M = ([x_{ij}^L, x_{ij}^U]), i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, m$.

Step 2: 对区间灰数决策矩阵进行规范化处理, 得到规范化区间灰数矩阵 $N$. 设指标 $S_j = [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$, 若 $S_j$ 为效益型, 则规范化处理计算公式为

$$r_{ij}^L = \frac{x_{ij}^L}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^U},\ r_{ij}^U = \frac{x_{ij}^U}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^L};$$

若 $S_j$ 为成本型, 则规范化处理计算公式为

$$r_{ij}^L = \frac{1/x_{ij}^U}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{ij}^L}},\ r_{ij}^U = \frac{1/x_{ij}^L}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{ij}^U}}.$$

显然 $r_{ij}^L, r_{ij}^U \in [0,1], i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m$. 由此可以得到规范化矩阵

$$N = ([r_{ij}^L, r_{ij}^U])_{n \times m}.$$

Step 3: 根据定义 1 构建出正理想方案区间灰数序列和负理想方案区间灰数序列.

Step 4: 根据定义 2 将区间灰数进行信息分解, 分解为“白部”和“灰部”两个序列.

Step 5: 根据定义 4 和定义 5 分别计算“白部”和“灰部”的双向投影.

Step 6: 根据定义 6 和定理 3 计算双向投影综合一致性系数 $\delta_i$, 并根据此值大小进行方案排序.

## 3 算例分析

现有一个投资公司准备对一项目投资, 根据前期调研分析, 最终确定 4 家企业 $X_1$、$X_2$、$X_3$、$X_4$ 进行投资. 在正式投资之前要先对各企业进行进一步的评估, 并最终作出决定是否进行投资. 评估时选取以下 4 个指标: 投资净产值 $S_1$, 投资利税率 $S_2$, 内部收益率 $S_3$, 环境污染度 $S_4$. 具体数值如表 1 所示, 其中 $S_4$ 为成本型指标, $S_1$、$S_2$、$S_3$ 为效益型指标.

**表 1 区间灰数决策矩阵**

| 方案 | 指标 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
| $X_1$ | [1.8, 2.2] | [1.2, 1.8] | [1.8, 2.2] | [5.4, 5.6] |
| $X_2$ | [2.3, 2.7] | [2.4, 3.0] | [1.6, 2.0] | [6.4, 6.6] |
| $X_3$ | [1.6, 2.0] | [1.7, 2.3] | [1.9, 2.3] | [4.4, 4.6] |
| $X_4$ | [2.0, 2.4] | [1.5, 2.1] | [1.8, 2.2] | [4.9, 5.1] |

Step 1: 构建方案对指标的区间灰数决策矩阵 (见表 1).

Step 2: 对区间灰数决策矩阵进行规范化处理, 得到如表 2 所示的矩阵表.

**表 2 区间灰数规范化决策矩阵**

| 方案 | 指标 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
| $X_1$ | [0.194 0, 0.285 7] | [0.130 4, 0.264 7] | [0.206 9, 0.309 8] | [0.231 1, 0.249 1] |
| $X_2$ | [0.247 0, 0.351 0] | [0.260 9, 0.441 2] | [0.183 9, 0.281 7] | [0.196 0, 0.210 2] |
| $X_3$ | [0.172 0, 0.259 7] | [0.184 8, 0.338 2] | [0.281 4, 0.323 9] | [0.281 3, 0.305 7] |
| $X_4$ | [0.215 1, 0.312 0] | [0.163 0, 0.308 8] | [0.205 9, 0.309 8] | [0.205 9, 0.274 7] |

Step 3: 构建出正理想方案区间灰数序列和负理想方案区间灰数序列. 正理想序列

$$Y^+ = \{[0.2470, 0.3510], [0.2609, 0.4412], [0.2814, 0.3239], [0.2813, 0.3057]\};$$

负理想序列

$$Y^- = \{[0.1720, 0.2591], [0.1304, 0.2647], [0.1839, 0.2817], [0.1960, 0.2102]\}.$$

Step 4: 利用信息分解方法将每个区间灰数进行白化处理为“白部序列”和“灰部序列”, 具体如下:

$$X_1: \begin{cases} R = (0.1940, 0.1304, 0.2069, 0.2311), \\ H = (0.0917, 0.1343, 0.1022, 0.0180); \end{cases}$$

$$X_2: \begin{cases} R = (0.2470, 0.2069, 0.1839, 0.1960), \\ H = (0.1040, 0.1803, 0.0978, 0.0142); \end{cases}$$

$$X_3: \begin{cases} R = (0.1720, 0.1848, 0.2814, 0.2813), \\ H = (0.0877, 0.1534, 0.0425, 0.0244); \end{cases}$$

$$X_4: \begin{cases} R = (0.2151, 0.1630, 0.2059, 0.2537), \\ H = (0.0969, 0.1458, 0.1039, 0.0210); \end{cases}$$

$$Y^+: \begin{cases} R = (0.2470, 0.2609, 0.2814, 0.2813), \\ H = (0.1040, 0.1803, 0.2814, 0.0244); \end{cases}$$

$$Y^-: \begin{cases} R = (0.1720, 0.1304, 0.1839, 0.1960), \\ H = (0.0871, 0.1343, 0.0978, 0.0142). \end{cases}$$

Step 5: 根据定义 4 和定义 5 分别计算“白部”和“灰部”的投影. 负理想点“白部序列”与方案点“白部序列”所构成的向量在正负理想点“白部序列”所构成的向量上的投影分别为

$$P_{r_j Y^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_1^{(R)}) = 0.0347,$$
$$P_{r_j Y^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_2^{(R)}) = 0.1141,$$
$$P_{r_j Y^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_3^{(R)}) = 0.1203,$$
$$P_{r_j Y^{-(R)}Y^{+(R)}}(Y^{-(R)}X_4^{(R)}) = 0.0733;$$

正负理想点“白部序列”所构成的向量在正理想点“白部序列”与方案点“白部序列”所构成的向量上的投影分别为

$$P_{r_j Y^{+(R)}X_1^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)}) = 0.1948,$$
$$P_{r_j Y^{+(R)}X_2^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)}) = 0.1295,$$
$$P_{r_j Y^{+(R)}X_3^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)}) = 0.1456,$$
$$P_{r_j Y^{+(R)}X_4^{(R)}}(Y^{-(R)}Y^{+(R)}) = 0.1905.$$

类似地, 负理想点“灰部序列”与方案点“灰部序列”所构成的向量在正负理想点“灰部序列”所构成的向量上的投影分别为

$$P_{r_j Y^{-(H)}Y^{+(H)}}(Y^{-(H)}X_1^{(H)}) = 0.0049,$$
$$P_{r_j Y^{-(H)}Y^{+(H)}}(Y^{-(H)}X_2^{(H)}) = 0.0126,$$
$$P_{r_j Y^{-(H)}Y^{+(H)}}(Y^{-(H)}X_3^{(H)}) = 0.0052,$$
$$P_{r_j Y^{-(H)}Y^{+(H)}}(Y^{-(H)}X_4^{(H)}) = 0.0107;$$

正负理想点“灰部序列”所构成的向量在正理想点“灰部序列”与方案点“灰部序列”所构成的向量上的

投影分别为

$$P_{r_jY^{+(H)}X_1^{(H)}}(Y^{-(H)}Y^{+(H)}) = 0.190\,2,$$
$$P_{r_jY^{+(H)}X_2^{(H)}}(Y^{-(H)}Y^{+(H)}) = 0.183\,9,$$
$$P_{r_jY^{+(H)}X_3^{(H)}}(Y^{-(H)}Y^{+(H)}) = 0.188\,3,$$
$$P_{r_jY^{+(H)}X_4^{(H)}}(Y^{-(H)}Y^{+(H)}) = 0.189\,7.$$

Step 6: 根据定理 3 计算一致性系数. 首先, 分别计算每个方案"白部序列"和"灰部序列"的一致性系数 $\delta_i^{(R)}$ 和 $\delta_i^{(H)}$, 具体如下:

$$\delta_1^{(R)} = 0.030\,8,\ \delta_2^{(R)} = 0.437\,0,$$
$$\delta_3^{(R)} = 0.405\,7,\ \delta_4^{(R)} = 0.129\,0;$$
$$\delta_1^{(H)} = 6.636\,1 \times 10^{-4},\ \delta_2^{(H)} = 0.047\,0,$$
$$\delta_3^{(H)} = 7.620\,4 \times 10^{-4},\ \delta_4^{(H)} = 0.003\,2.$$

然后, 计算综合一致性系数, 具体如下:

$$\delta_1 = \delta_1^{(R)} + \delta_1^{(H)} =$$
$$0.030\,8 + 6.636\,1 \times 10^{-4} = 0.031\,5,$$
$$\delta_2 = \delta_2^{(R)} + \delta_2^{(H)} = 0.484\,0,$$
$$\delta_3 = \delta_3^{(R)} + \delta_3^{(H)} =$$
$$0.405\,7 + 7.620\,4 \times 10^{-4} = 0.416\,5,$$
$$\delta_4 = \delta_4^{(R)} + \delta_4^{(H)} = 0.132\,2.$$

Step 7: 根据综合一致性系数进行方案排序, 有 $\delta_2 > \delta_3 > \delta_4 > \delta_1$, 故方案之间排序为

$$X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1,$$

所以方案 $X_2$ 为最优. 从投资公司的角度应将 $X_2$ 作为最佳投资对象.

为说明该模型的科学性和优越性, 将本文的结果与文献 [2] 方法所得到的结果进行比较. 文献 [2] 首先定义两个区间数的距离计算公式; 然后, 将区间灰数距离作为关联系数, 用以计算方案与理想方案的灰色关联度; 最后, 根据关联度大小进行排序 (见表3).

**表 3　不同方法排序比较**

| 方案 | 文献 [2] 方法 | | 本文方法 | |
|---|---|---|---|---|
| | 关联度 | 关联度排序 | 双向投影一致性系数 | 系数排序 |
| $X_1$ | 0.530 5 | 4 | 0.031 5 | 4 |
| $X_2$ | 0.745 7 | 2 | 0.484 0 | 1 |
| $X_3$ | 0.854 7 | 1 | 0.416 5 | 2 |
| $X_4$ | 0.686 7 | 3 | 0.132 2 | 3 |

从表 3 可以看出, 本文的方案排序是

$$X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1,$$

而文献 [2] 的方案排序是

$$X_3 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_1.$$

两个排序结果几乎接近但不完全一致, 这也充分说明了这两个方法都是合理的. 由于两个区间数的距离计算并没有被很好地解决, 文献 [2] 也会因计算区间数距离方法的不同可能导致结果的不一致. 另外, 文献 [2] 只考虑了与正理想方案的关联度, 没有考虑与负理想方案的关联度, 这很可能会造成变化的不一致性问题. 相比较而言, 本文模型的优点在于: 能够充分利用所给出的决策信息, 使得决策信息不丢失, 这符合灰色系统理论充分利用信息的灰理论思想; 综合考虑与正、负理想点的关系, 克服了变化的不一致性问题.

## 4　结　论

本文对决策矩阵为区间灰数的多属性决策问题进行了研究. 利用信息分解的方法, 在决策信息不丢失的情况下, 将区间灰数序列分解成实数型"白部"序列和"灰部"序列, 结合 TOPSIS 的思想提出了双向投影的测度方法, 构建了双向投影一致性系数模型. 该方法能够克服区间灰数决策时只用它的一个白化值代替而进行的决策, 其最大优点是充分利用了已有的信息进行科学决策, 同时既规避了区间灰数的运算问题, 也体现了"充分利用已有信息"的灰理论思想. 该方法评价结果科学客观, 程序设计较为方便且易于计算机实现. 算例分析表明了所提出模型的合理性和科学性, 能够为区间灰数信息下决策问题的研究提供一个有效、科学的途径.

### 参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 5 版. 北京: 科学出版社, 2010: 256-257.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 256-257.)

[2] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 多指标区间数关联决策模型研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(3): 403-406.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Study on incidence decision making model of multi–attribute interval number[J]. J of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2004, 36(3): 403-406.)

[3] 罗党. 三参数区间灰数信息下的决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(1): 124-130.
(Luo D. Decision-making methods with three-parameter interval grey number[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(1): 124-130.)

[4] 王正新, 党耀国, 裴玲玲, 等. 基于累积前景理论的多指标灰关联决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 232-236.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L, et al. Multi-index grey relational decision-making based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 232-236.)

[5] 陈孝新, 刘思峰. 部分权重信息且对方案有偏好的灰色关联决策法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(11): 1868-1871.
(Chen X X, Liu S F. Grey incidence decision-making method with partial weight information but with preference information on alternatives[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(11): 1868-1871.)

[6] 蒋诗泉, 刘思峰, 刘中侠, 等. 基于面积的灰色关联决策模型[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 683-690.
(Jiang S Q, Liu S F, Liu Z X, et al. Grey incidence decision making model based on area[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 683-690.)

[7] 杨保华, 方志耕, 周伟, 等. 基于信息还原算子的多指标区间灰数关联决策模型[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 182-186.
(Yang B H, Fang Z G, Zhou W, et al. Incidence decision model of multi–attribute interval grey number based on information reduction operator[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 182-186.)

[8] 曾波, 刘思峰, 孟伟, 等. 基于空间映射的区间灰数关联度模型[J]. 系统工程, 2010, 28(2): 122-126.
(Zeng B, Liu S F, Meng W, et al. Incidence degree model of interval grey number based on space mapping[J]. Systems Engineering, 2010, 28(2): 122-126.)

[9] 谢乃明, 刘思峰. 考虑概率分布的灰数排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(4): 169-175.
(Xie N M, Liu S F. On comparing grey numbers with their probability distribution[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(4): 169-175.)

[10] 闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于相对核和精确度的灰数排序问题[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 315-319.
(Yan S L, Liu S F, Zhu J J, et al. The ranking method of grey numbers based on relative kernel and degree of accuracy[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 315-319.)

[11] 曾波, 刘思峰, 李川, 等. 基于蛛网面积的区间灰数灰靶决策模型[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(11): 2329-2334.
(Zeng B, Liu S F, Li C, et al. Grey target decision-model of interval grey number based on cobweb area[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(11): 2329-2334.)

[12] 王霞, 党耀国. 基于Choquet积分的区间灰数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(5): 1106-1110.
(Wang X, Dang Y G. Approach for multiple attribute decision-making with interval grey number based on Choquet integral[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(5): 1106-1110.)

[13] 华小义, 谭景信. 基于“垂面”距离的TOPSIS法——正交投影法[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(1): 114-119.
(Hua X Y, Tan J X. Revised TOPSIS method based on vertical projection distance-vertical projection method[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2004, 24(1): 114-119.)

[14] 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 犹豫模糊信息下的双向投影决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(10): 2637-2644.
(Liu X D, Zhu J J, Liu S F. Bidirectional projection method with hesitant fuzzy information[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(10): 2637-2644.)

[15] 杨静, 邱菀华. 基于投影技术的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(4): 637-640.
(Yang J, Qiu W H. Method for multi-attribute decision-making based on projection[J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 637-640.)

[16] 方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其GM(1, 1)模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Lu F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1, 1) model[J]. Engineering Science, 2005, 7(2): 57-61.)

[17] 曾波, 孟伟, 王正新. 灰色预测系统建模对象拓展研究[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 55-56.
(Zeng B, Meng W, Wang Z X. A extended research on modeling object of grey forecasting system[M]. Beijing: Science Press, 2014: 55-56.)

(责任编辑：曹洪武)