文章编号: 1001-0920 (2017) 01-0131-10　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1482

不确定多指标决策的可能度规划模型及其应用

黄智力[1†], 罗　键[2]

(1. 厦门理工学院 应用数学学院，福建 厦门 361024；2. 厦门大学 信息科学与技术学院，福建 厦门 361005)

摘　要: 针对指标权重未知的区间数型不确定多指标决策问题, 提出区间数可能度与比较优势关系理论, 并推导出一些相关结论. 借鉴合作博弈中极大极小算法, 建立基于区间数比较优势关系, 确定指标权重的可能度规划模型. 利用供选方案间相互比较的可能度矩阵测定信息, 集结各方案比较的总体可能度值对供选方案集进行优劣筛选和排序, 以此给出一种新的区间数型不确定多指标决策的可能度规划算法. 最后通过算例验证了所提出模型算法的有效性和实用性.

关键词: 不确定多指标决策；区间数；可能度规划模型；指标权重

中图分类号: TP182；O159　　**文献标志码:** A

Possibility degree programming model for uncertain multi-attribute decision making and its application

HUANG Zhi-li[1†], *LUO Jian*[2]

(1. School of Applied Mathematics，Xiamen University of Technology，Xiamen 361024，China；2. School of Information Science and Technology，Xiamen University，Xiamen 361005，China)

Abstract: Aimming at the interval number-based uncertain multi-attribute decision making problem with unknown attribute weights, the possibility degree and comparative advantage relation theory of interval number is proposed, and some results and conclusions are derived. By learning from the idea of the min-max algorithm rules in the cooperative game theory, a possibility degree programming model is established to determine the attribute weight based on the comparative advantage relation of the interval number. Then, by utilizing the measurement information of the possibility degree matrix for the comparison of the alternatives, the overall measured value of comparative possibility degree of each alternative is gathered to filter the best or worst and sort the decision making alternatives set, and therefore an algorithm of possibility degree programming for interval number-based uncertain multi-attribute decision making is proposed. Finally, the effectiveness and practicability of the proposed model algorithm are illustrated by a numerical example.

Keywords: uncertain multi-attribute decision making；interval number；possibility degree programming model；attribute weight

0　引　　言

不确定多指标决策 (UMADM) 也称为有限方案不确定多目标决策, 是不完备信息系统下不确定决策理论研究的重要内容之一. 其理论和方法广泛应用于产业经济、工程规划、物流网络、效益评估、社会治理、武器装备管理等多个重要领域, 如企业绩效评价[1]、能源技术评价[2]、废弃物管理选址[3]、交通运输优化[4]、医疗评估[5]、自然灾害系统评估[6]、伙伴选择优化[7]、武器系统选择[8]等. 在实际决策中, 考虑到有关复杂决策问题的随机性、不确定性、不完全性和思维的主观性、模糊性、习惯偏好性, 人们不可能只关注或停留在某个确切数值信息的固定点上, 导致决策者难以用精确的数值描述方案、指标评价或决策偏好信息, 更加倾向于利用贴近现实的区间数值、三角模糊数值, 或者利用语言值来量化表示指标评价信息与方案信息处理过程的模糊

收稿日期: 2015-11-30；**修回日期:** 2016-04-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11426191, 60975052)；福建省重大科技项目(2011H6027).

作者简介: 黄智力 (1983−), 男, 博士, 从事管理与决策支持系统的理论与技术的研究；罗键 (1954−), 男, 教授, 博士生导师, 从事自动化智能信息系统、系统建模、优化和决策等研究.

†通信作者. E-mail: zhili_huang@hotmail.com

性、不确定性和不完全性. 值得一提的是, 20世纪60年代, 由Zadeh引入的可能性测度[9-10]已成为模糊集理论[11]一个重要的发展分支, 对于推动模糊数学与不确定数学的发展应用研究提供了重要的方法途径和工具, 并作出了巨大贡献. 它是对传统概率测度[12]的推广, 两者的主要区别在于可能性测度不满足可加性. 人们通过可能性测度可以对两个或有限个表示不确定模糊概念的事物或方案的指标评价信息进行类比推理的比较研究, 广泛应用于评价[1]、期望[2]、优化[4]、仿真[6]、预测[13]、矩阵博弈[14]和空间表示[15]等不确定决策问题领域. 通常, UMADM问题研究的一般思想是利用已获取的不确定信息, 采用一定的方式对供选方案集进行优劣判定和筛选, 其主要流程为决策信息获取、量化与规范化、决策模型构建、指标权重度量、方案信息集结、优劣筛选与排序. 因此, 怎样找寻一种简单合理的方案排序算法用于解决大规模复杂UMADM问题便显得非常重要. 目前, 针对指标权重未知且对方案无偏好的UMADM问题, 在决策模型理论和算法研究等方面已取得了较好的进展, 如VIKOR扩展法[16]、最小偏差法[17]、粗糙集法[18]、概率论法[19]、可能度关系法[20]、预期理论模型法[21]、灰靶决策法[22]、优势关系法[23]、离差最大化法[24]等. 虽然上述决策模型和算法对供选方案集优劣判定和筛选排序都取得了不错的效果, 但是它们都只是单纯地考虑通过蕴含方案指标偏差数据信息, 放大供选方案间的综合指标值差异以实现更优决策, 却缺乏考虑方案指标值两两相互比较的可能度值[20]信息, 在处理如UMADM的不完备信息系统[25]评价过程中, 对指标属性本身的作用影响, 容易造成方案综合偏差小、评价结果相近、决策区分度低等问题, 不利于供选方案间优劣尺度的测定和筛选排序.

鉴于上述问题分析, 本文针对指标权重未知且对方案无偏好的区间数型不确定多指标决策(IN-UMADM)问题进行了研究, 给出了区间数可能度与比较优势关系理论的一些优良性质关系和相关结果(即各供选方案和理想方案的比较可能度大小与各供选方案间的比较优势大小存在等价关系). 在考虑IN-UMADM问题中方案指标值间两两相互比较可能度值大小信息的作用下, 借鉴合作博弈中极大极小算法的思想, 设计构建了一种新的基于区间数比较优势关系确定指标权重的可能度规划模型, 使得在指标比较可能度信息集结后所有供选方案间的指标值差异最大化而利于优劣判定. 最后利用供选方案间相互比较的可能度矩阵测定值信息, 集结各个供选方案比较的总体可能度值大小, 对决策方案集进行优劣筛选和排序, 以此给出一种新的IN-UMADM的可能度规划算法.

1 区间数可能度与比较优势关系理论

1.1 区间数的可能度关系

定义 1 若 $\tilde{x}=[x^L,x^U]=\{x|x^L\leqslant x\leqslant x^U,x^L,x^U\in R\}$, 则称 $\tilde{x}$ 为一个区间数[26](IN). 其中: x^U 为上极限, 称为区间数 $\tilde{x}$ 的大元; x^L 为下极限, 称为区间数 $\tilde{x}$ 的小元. 特别地, 若区间数 $\tilde{x}=[x^L,x^U]$, 还满足 $0<x^L\leqslant x^U<1$, 则称 $\tilde{x}$ 为一个规范区间数; 若 $x^L=x^U$, 则 $\tilde{x}$ 退化为一个实数; $l_{\tilde{x}}=x^U-x^L$ 表示区间数 $\tilde{x}$ 的取值长度, 当 $l_{\tilde{x}}=0$ 时, $\tilde{x}$ 也是一个实数.

为方便起见, 首先给出有关区间数的运算法则和序关系, 设 $\tilde{x}=[x^L,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^U]$.

法则 1 $\tilde{x}+\tilde{y}=[x^L+y^L,x^U+y^U]$.

法则 2 $\tilde{x}-\tilde{y}=[x^L-y^U,x^U-y^L]$.

法则 3 $\dfrac{1}{\tilde{x}}=\Big[\dfrac{1}{x^U},\dfrac{1}{x^L}\Big]$, $x^L,x^U\neq 0$.

法则 4 $k\tilde{x}=\begin{cases}[kx^L,kx^U],\ k>0;\\ 0,\ k=0;\\ [kx^U,kx^L],\ k<0.\end{cases}$

法则 5 当且仅当 $x^L\leqslant y^L$ 且 $x^U\leqslant y^U$ 时, $\tilde{x}\leqslant\tilde{y}$.

定义 2 设 $\tilde{x}=[x^L,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^U]$ 同时为任意两个区间数或其中有一个为区间数, $l_{\tilde{x}}$ 和 $l_{\tilde{y}}$ 分别表示区间数 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的取值长度, 记为

$$l_{\tilde{x}}=x^U-x^L,\ l_{\tilde{y}}=y^U-y^L,$$

则称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\begin{cases}1,\ y^U\leqslant x^L;\\ \dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}},\ y^L<x^U,\ x^L<y^U;\\ 0,\ x^U\leqslant y^L\end{cases}\tag{1}$$

为区间数 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度[20-21,26], $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$; 类似地, 称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\begin{cases}1,\ x^U\leqslant y^L;\\ \dfrac{y^U-x^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}},\ x^L<y^U,\ y^L<x^U;\\ 0,\ y^U\leqslant x^L\end{cases}\tag{2}$$

为区间数 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$. 关于区间数比较的可能度定义表达式[27-29]如下: 称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\frac{\min\{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}},\max(x^U-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}\tag{3}$$

为区间数 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度[27], $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$; 类似地, 称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\frac{\min\{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}},\max(y^U-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}\tag{4}$$

为区间数 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$,

或者称

$$p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) = \min\left\{\max\left(\frac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}, 0\right), 1\right\} \tag{5}$$

为区间数 $\tilde{x} \geqslant \tilde{y}$ 的可能度[28], $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x} \underset{p}{\geqslant} \tilde{y}$; 类似地, 称

$$p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) = \min\left\{\max\left(\frac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}, 0\right), 1\right\} \tag{6}$$

为区间数 $\tilde{y} \geqslant \tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y} \underset{p}{\geqslant} \tilde{x}$.

或者称

$$p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) = \frac{\max\{0, l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}} - \max(y^U - x^L, 0)\}}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} \tag{7}$$

为区间数 $\tilde{x} \geqslant \tilde{y}$ 的可能度[29], $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x} \underset{p}{\geqslant} \tilde{y}$; 类似地, 称

$$p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) = \frac{\max\{0, l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}} - \max(x^U - y^L, 0)\}}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} \tag{8}$$

为区间数 $\tilde{y} \geqslant \tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y} \underset{p}{\geqslant} \tilde{x}$.

或者称

$$p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) = \max\left\{1 - \max\left(\frac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}, 0\right), 0\right\} \tag{9}$$

为区间数 $\tilde{x} \geqslant \tilde{y}$ 的可能度[27], $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x} \underset{p}{\geqslant} \tilde{y}$; 类似地, 称

$$p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) = \max\left\{1 - \max\left(\frac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}, 0\right), 0\right\} \tag{10}$$

为区间数 $\tilde{y} \geqslant \tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y} \underset{p}{\geqslant} \tilde{x}$.

根据上述 5 种区间数比较可能度的定义表达式, 可以证明下列结论均成立[27].

定理 1　设区间数 $\tilde{x} = [x^L, x^U]$, $\tilde{y} = [y^L, y^U]$, 则有:

1) $0 \leqslant p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) \leqslant 1$, $0 \leqslant p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) \leqslant 1$.

2) $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) = 1$ 当且仅当 $y^U \leqslant x^L$; 类似地, $p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) = 1$ 当且仅当 $x^U \leqslant y^L$.

3) $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) = 0$ 当且仅当 $x^U \leqslant y^L$; 类似地, $p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) = 0$ 当且仅当 $y^U \leqslant x^L$.

4) (互补性) $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) + p(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) = 1$; 特别地, $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{x}) = 0.5$.

5) $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) \geqslant 0.5$ 当且仅当 $x^L + x^U \geqslant y^L + y^U$; 特别地, $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) = 0.5$ 当且仅当 $x^L + x^U = y^L + y^U$.

6) (传递性) 对于 3 个区间数 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, 若 $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) \geqslant 0.5$ 且 $p(\tilde{y} \geqslant \tilde{z}) \geqslant 0.5$, 则 $p(\tilde{x} \geqslant \tilde{z}) \geqslant 0.5$.

根据区间数比较的可能度定义可知定理 1 的结论成立, 证明过程略.

定理 2　式 (1) ⇔ 式 (3) ⇔ 式 (5) ⇔ 式 (7) ⇔ 式 (9), 或者式 (2) ⇔ 式 (4) ⇔ 式 (6) ⇔ 式 (8) ⇔ 式 (10).

根据区间数比较可能度定义的表达式易证定理 2 的结论成立, 证明过程略.

定理 3　设 $\tilde{x} = [x^L, x^U]$, $\tilde{y} = [y^L, y^U]$ 同时为任意两个区间数或其中有一个为区间数, $l_{\tilde{x}}$ 和 $l_{\tilde{y}}$ 分别表示 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的取值长度, 记为 $l_{\tilde{x}} = x^U - x^L$, $l_{\tilde{y}} = y^U - y^L$. 若区间数 $\tilde{y}$ 保持固定不变, 则 $P(\tilde{x} \geqslant \tilde{y})$ 是区间数 $\tilde{x}$ 的单调非递减函数.

证明　任取两个非退化的区间数 $\tilde{x}_1 = [x_1^L, x_1^U]$, $\tilde{x}_2 = [x_2^L, x_2^U]$, 且 $\tilde{x}_1 \leqslant \tilde{x}_2$, 则根据法则 5 可得 $x_1^L \leqslant x_2^L$, $x_1^U \leqslant x_2^U$ 且 $l_{\tilde{x}_2} \leqslant l_{\tilde{x}_1} + x_2^U - x_1^U$.

1) 当 $y^U \leqslant x_1^L$ 时, $p(\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{y}) = p(\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{y}) = 1$, 即 $p(\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{y}) \geqslant p(\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{y})$;

2) 当 $x_2^U \leqslant y^L$ 时, $p(\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{y}) = p(\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{y}) = 0$, 即 $p(\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{y}) \geqslant p(\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{y})$;

3) 当 $y^L \leqslant x_2^U$ 且 $x_1^L \leqslant y^U$ 时, 有

$$p(\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{y}) = \frac{x_2^U - y^L}{l_{\tilde{x}_2} + l_{\tilde{y}}} \geqslant \frac{x_2^U - y^L}{l_{\tilde{x}_1} + l_{\tilde{y}} + x_2^U - x_1^U} = \frac{x_1^U - y^L + x_2^U - x_1^U}{l_{\tilde{x}_1} + l_{\tilde{y}} + x_2^U - x_1^U} \geqslant \frac{x_1^U - y^L}{l_{\tilde{x}_1} + l_{\tilde{y}}} = p(\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{y}),$$

即 $p(\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{y}) \geqslant p(\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{y})$. □

1.2　区间数的比较优势关系

定义 3　设任意两个规范区间数

$$\tilde{x} = [x^L, x^U],\ \tilde{y} = [y^L, y^U],$$

若范数

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\rm IN} = |x^L - y^L| + |x^U - y^U|, \tag{11}$$

则称 $d_{\rm IN}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\rm IN}$ 为规范区间数 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的相离度[21,26]. 显然, $d_{\rm IN}(\tilde{x}, \tilde{y})$ 值越大, $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 相离的程度越大. 特别地, 当 $d_{\rm IN}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ 时, $\tilde{x} = \tilde{y}$, 即 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 相等.

假设加权规范化区间数型决策矩阵为

$$\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{n \times m},$$

其中 $\tilde{z}_{ij} = [z_{ij}^L, z_{ij}^U]$, $i \in N$, $j \in M$, 有如下定义.

定义 4　称 $Z^{+*} = \{\tilde{z}_1^{+*}, \tilde{z}_2^{+*}, \cdots, \tilde{z}_m^{+*}\}$ 为正理想点序列构成的区间数型正理想决策方案, 其中

$$\tilde{z}_j^{+*} = [z_j^{+*L}, z_j^{+*U}] = [\max_i(z_{ij}^L), \max_i(z_{ij}^U)],$$

$$j = 1, 2, \cdots, m$$

为正理想点[21,26](越大越优); 称 $Z^{-*} = \{\tilde{z}_1^{-*}, \tilde{z}_2^{-*}, \cdots, \tilde{z}_m^{-*}\}$ 为负理想点序列构成的区间数型负理想决策方案, 其中

$$\tilde{z}_j^{-*} = [z_j^{-*L}, z_j^{-*U}] = [\min_i(z_{ij}^L), \min_i(z_{ij}^U)],$$

$$j = 1, 2, \cdots, m$$

为负理想点[21,26](越小越劣).

根据区间数相离度的概念, 给出区间数比较优势关系的相关定义和主要结果.

定义 5　设任意两个规范区间数为

$$\tilde{x}=[x^L,x^U],\ \tilde{y}=[y^L,y^U],$$

正、负理想点区间数为

$$\tilde{z}^{+*}=[z^{+*L},z^{+*U}],\ \tilde{z}^{-*}=[z^{-*L},z^{-*U}],$$

若

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})$$

或

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{-*})>d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{-*}),\tag{12}$$

则称规范区间数 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 相比 $\tilde{x}$ 占优势, 记为 $\tilde{x}\succ\tilde{y}$. 可见, 与正理想点区间数的相离度越小或者与负理想点区间数的相离度越大, 对应区间数的优势度便越大.

定理4 1) 当且仅当正理想点为最优决策点进行决策时, 有

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),\\ x^L+x^U>y^L+y^U,\\ p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})>0.5,\ p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<0.5,\\ p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z}^{+*})>p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z}^{+*}),\\ p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{x})<p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{y}).\end{cases}\tag{13}$$

2) 当且仅当负理想点为最优决策点进行决策时, 有

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{-*})>d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{-*}),\\ x^L+x^U>y^L+y^U,\\ p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})>0.5,\ p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<0.5,\\ p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z}^{-*})>p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z}^{-*}),\\ p(\tilde{z}^{-*}\geqslant\tilde{x})<p(\tilde{z}^{-*}\geqslant\tilde{y}).\end{cases}\tag{14}$$

证明 显然

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),$$

由式(11)可得

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})=|x^L-z^{+*L}|+|x^U-z^{+*U}|,$$
$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})=|y^L-z^{+*L}|+|y^U-z^{+*U}|.$$

当正理想点为最优决策点, 即 $\tilde{z}^{+*}=[z^{+*L},z^{+*U}]$ 为理想点区间数时, 有

$$z^{+*L}\geqslant\max\{x^L,y^L\},$$
$$z^{+*U}\geqslant\max\{x^U,y^U\},$$

可以得到

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})=(z^{+*L}+z^{+*U})-(x^L+x^U),$$
$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})=(z^{+*L}+z^{+*U})-(y^L+y^U).$$

由 $d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})$, 得到 $x^L+x^U>y^L+y^U$, 有

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})\Leftrightarrow$$
$$x^L+x^U>y^L+y^U,$$

从而 $\tilde{x}\succ\tilde{y}$ 成立. 当 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=1,\ p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=0$ 时, 有

$$x^U\geqslant x^L,y^U\geqslant y^L,x^L\geqslant y^U\Rightarrow$$
$$x^L+x^U>y^L+y^U\Rightarrow$$
$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),$$

从而 $\tilde{x}\succ\tilde{y}$ 成立. 当 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})>0.5,\ p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<0.5$ 时, 有

$$\begin{cases}\dfrac{x^U-y^L}{(x^U-x^L)+(y^U-y^L)}>\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{y^U-x^L}{(x^U-x^L)+(y^U-y^L)}<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}2(x^U-y^L)>(x^U-x^L)+(y^U-y^L)\\ 2(y^U-x^L)<(x^U-x^L)+(y^U-y^L)\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}x^L+x^U>y^L+y^U\\ y^L+y^U<x^L+x^U\end{cases}\Rightarrow$$
$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),$$

从而 $\tilde{x}\succ\tilde{y}$ 成立. 又因为

$$\begin{cases}z^{+*L}\geqslant\max\{x^L,y^L\}\\ z^{+*U}\geqslant\max\{x^U,y^U\}\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}z^{+*L}+z^{+*U}\geqslant x^L+x^U,\\ z^{+*L}+z^{+*U}\geqslant y^L+y^U,\end{cases}$$

根据区间数比较的可能度定理1的结论可得

$$p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{x})\geqslant0.5,\ p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{y})\geqslant0.5.$$

因此, 若

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z}^{+*})>p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z}^{+*}),$$
$$p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{x})<p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{y}),$$

则根据定理3的结论, 有

$$\begin{cases}p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})>0.5\\ p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<0.5\end{cases}\Rightarrow d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),$$

从而 $\tilde{x}\succ\tilde{y}$ 成立. 故当正理想点为最优决策点进行决策时, 式(13)成立. 同理可证式(14)成立. □

定理4表明, 区间数间优势关系的判定可以通过计算区间数与理想点的相离度值、区间数比较可能度值、比较区间数小元和大元的指标值直接进行判定.

定义6 由规范区间数序列构成的供选决策方案为

$$X=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_m\},$$
$$Y=\{\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_m\}.$$

由正、负理想点序列构成的区间数型正负理想决策方

案为

$$Z^{+*}=\{\tilde{z}_1^{+*},\tilde{z}_2^{+*},\cdots,\tilde{z}_m^{+*}\},$$
$$Z^{-*}=\{\tilde{z}_1^{-*},\tilde{z}_2^{-*},\cdots,\tilde{z}_m^{-*}\}.$$

其中

$$\tilde{x}_j=[x_j^L,x_j^U],\ \tilde{y}_j=[y_j^L,y_j^U],$$
$$\tilde{z}_j^{+*}=[z_j^{+*L},z_j^{+*U}],\ \tilde{z}_j^{-*}=[z_j^{-*L},z_j^{-*U}],$$
$$j=1,2,\cdots,m.$$

若

$$\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{+*})<\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{+*}),$$

或

$$\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{-*})>\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{-*}),\tag{15}$$

则称区间数型供选方案 X 与 Y 相比 X 占优, 记为 $X\succ Y$. 显然, 与区间数型正理想决策方案的相离度和越小或者与区间数型负理想决策方案的相离度和越大, 对应供选决策方案的优势度便越大.

定理 5 1) 当且仅当区间数型正理想决策方案为最优方案进行决策时, 有

$$\begin{aligned}&X\succ Y\Leftrightarrow\\&\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{+*})<\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{+*})\\ \displaystyle d_{\rm IN}\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j,\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big)<d_{\rm IN}\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j,\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big)\end{cases}\Leftrightarrow\\&\sum_{j=1}^m(x_j^L+x_j^U)>\sum_{j=1}^m(y_j^L+y_j^U)\Leftrightarrow\\&\begin{cases}\displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\Big)>0.5\\ \displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\Big)<0.5\end{cases}\Leftrightarrow\\&\begin{cases}\displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big)>p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big),\\ \displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\Big)<p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\Big).\end{cases}\end{aligned}\tag{16}$$

2) 当且仅当区间数型负理想决策方案为最优方案进行决策时, 有

$$\begin{aligned}&X\succ Y\Leftrightarrow\\&\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{-*})>\sum_{j=1}^m d_{\rm IN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{-*})\\ \displaystyle d_{\rm IN}\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j,\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big)>d_{\rm IN}\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j,\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big)\end{cases}\Leftrightarrow\\&\sum_{j=1}^m(x_j^L+x_j^U)>\sum_{j=1}^m(y_j^L+y_j^U)\Leftrightarrow\\&\begin{cases}\displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\Big)>0.5\\ \displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\Big)<0.5\end{cases}\Leftrightarrow\\&\begin{cases}\displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big)>p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big),\\ \displaystyle p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{x}_j\Big)<p\Big(\sum_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\geqslant\sum_{j=1}^m\tilde{y}_j\Big).\end{cases}\end{aligned}\tag{17}$$

定理 5 的实质是将指标值为区间数系列的 UMADM 方案排序问题转化为对方案综合指标值区间数的优势比较排序问题, 证明与定理 4 类似, 证明过程略.

定理 5 表明, 供选决策方案间优势关系的判定可以通过计算供选决策方案指标值系列和与理想决策方案理想点系列和的相离度值、供选决策方案指标值系列和的比较可能度值、比较供选决策方案的区间数小元和大元的指标值系列和直接进行判定.

2 IN-UMADM 的可能度规划模型

借鉴博弈论合作博弈的相关理论: 在求解指标值为区间数的 UMADM 问题过程中, 为了让每个供选方案的综合指标值在基于可能度关系的属性赋权下, 完成集结所有供选方案的指标值信息后, 实现数据值差异扩大和最优化, 更便于对供选方案集进行优劣筛选和排序, 最终决策者不但要考虑供选方案指标值偏差大小本身的重要性程度, 而且要考虑指标值比较可能度大小信息, 即指标属性权重的赋值随所有供选方案指标值间的比较可能度求和而合成的决策指标间优势比较可能度值总和的增大而相应增大; 反之, 指标属性权重的赋值随所有供选方案指标值间的比较可能度求和而合成的决策指标间优势比较可能度值总和的减小而相应减小. 最终任意一个供选方案与其他供选方案优势比较的可能度值也实现了差异增大和最优化, 因为任一供选方案在决策过程中都希望是作为最优理想方案而被挑选中. 因此, 针对指标权重未知且对方案无偏好的 IN-UMADM 问题, 结合区间数可能度与比较优势关系理论, 从利于测定供选方案间优劣的角度考虑提出了一种新的基于区间数可能度规划模型的指标赋权规则: 在统一指标值数据间物理量纲的不可公度性和矛盾性后, 若决策指标在全体供选方案下合成的指标优势比较可能度总和增大, 则表明该指标对供选方案间优劣判定所起作用程度的

影响成分越多, 应重点考虑, 且应考虑增大指标属性权重度量值; 反之, 若决策指标在全体供选方案下合成的指标优势比较可能度总和减小, 则表明该指标对供选方案间优劣判定所起作用程度的影响成分越少, 应考虑减小指标属性权重度量值; 特别地, 若决策指标在全体供选方案下合成的指标优势比较可能度总和仍达到最小值零, 则表明该指标对供选方案间优劣判定不起作用无影响成分, 应考虑赋予指标属性权重度量值为零. 由于供选方案指标值间合成的比较可能度值数据大的指标主要决定了最优供选方案的选择确定, 更是导致供选方案优劣判定差异的来源, 本文利用方案指标值信息建立的比较可能度规划模型确定指标权重, 使方案指标值在最佳赋权信息下集结而成的反映全体供选方案间比较可能度信息特征的综合指标值差异扩大化, 最后通过区间数比较可能度关系对供选方案集 $\{X_i\}(i \in N)$ 进行优劣筛选和排序, 并确定最优方案.

在对于某一 IN-UMADM 问题的供选方案优劣判定过程中, 称全体供选方案 X_i 关于各指标 u_j 的初始测定值 $\tilde{x}_{ij}$ (这里 $\tilde{x}_{ij} = [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$) 构成的矩阵 $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{n\times m}$ 为初始区间数型决策矩阵. 设 $I_j\,(j = 1, 2)$ 为常见的效益型、成本型属性的下标集, $M = \{1, 2, \cdots, m\}$, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 为统一不同指标值数据间的不可公度性和矛盾性, 将初始区间数型决策矩阵 $\tilde{X}$ 按式 (18) 和 (19) 转换为规范区间数型决策矩阵[21,26]

$$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}.$$

其中: $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^U]$ 为规范区间数, $\|\cdot\|$ 为向量的范数.

对于效益型指标, 有

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\|\tilde{x}_j\|},\ i \in N,\ j \in I_1. \tag{18}$$

对于成本型指标，有

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\dfrac{1}{\tilde{x}_{ij}}}{\Big\|\dfrac{1}{\tilde{x}_j}\Big\|},\ i \in N,\ j \in I_2. \tag{19}$$

其中

$$\|\tilde{x}_j\| = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij},\ \Big\|\frac{1}{\tilde{x}_j}\Big\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tilde{x}_{ij}}.$$

根据区间数的运算法则, 式 (18) 和 (19) 可以改写为

$$\begin{cases} r_{ij}^L = \dfrac{x_{ij}^L}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}^U}, \\ r_{ij}^U = \dfrac{x_{ij}^U}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}^L}, \end{cases} \quad i \in N,\ j \in I_1; \tag{20}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^L = \dfrac{1/x_{ij}^U}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_{ij}^L}}, \\ r_{ij}^U = \dfrac{1/x_{ij}^L}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_{ij}^U}}, \end{cases} \quad i \in N,\ j \in I_2. \tag{21}$$

根据区间数的可能度关系理论, 在规范区间数型决策矩阵 $\tilde{R}$ 中, 只考虑对于第 j 个指标 u_j 情形下, 决策指标 u_j 与决策指标 u_k 在全体供选方案下的优势比较可能度和为

$$p_k(u_j \succ u_k) = \sum_{i=1}^{n} p(u_j^{X_i} \succ u_k^{X_i}) = \sum_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik}),\quad k, j \in M,\ i \in N. \tag{22}$$

对于第 j 个指标 u_j, 决策指标 u_j 与其他决策指标的优势比较可能度总和为

$$p(u_j) = \sum_{k=1,k\neq j}^{m} p_k(u_j \succ u_k) = \sum_{k=1,k\neq j}^{m} \sum_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik}),\quad k, j \in M,\ i \in N. \tag{23}$$

针对指标权重信息完全未知的 IN-UMADM 问题, 假设其指标权重向量为

$$\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_m),\ 0 \leqslant w_j \leqslant 1,\ j \in M,$$

并满足单位化约束条件 $\sum\limits_{j=1}^{m} w_j^2 = 1$.

根据本文提出的基于区间数可能度规划模型的指标赋权规则, 考虑到决策者对供选方案无偏好的情况下, 最优权重向量 $\boldsymbol{W}$ 的确定应使得在全体供选方案下全体决策指标的比较可能度总和在加权向量 $\boldsymbol{W}$ 作用下加权和最大. 为此, 构造如下 IN-UMADM 的比较可能度规划模型:

$$\begin{aligned} &\max\ F(\boldsymbol{W}) = \sum_{j=1}^{m} p(u_j)\cdot w_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1,k\neq j}^{m} \sum_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik}) w_j; \\ &\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{m} w_j^2 = 1,\ w_j \geqslant 0,\ k, j \in M,\ i \in N. \end{aligned} \tag{24}$$

解此最优化模型, 得到最优解为

$$w_j^* = \frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \Big[\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})\Big]^2}},\quad k, j \in M,\ i \in N. \tag{25}$$

为保持与传统归一化用法一致, 对单位化权重向量 w_j^* 作归一化处理, 即令

$$w_j=\frac{w_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{m}w_j^*},\ j\in M,$$

得到指标最优权重值为

$$w_j=\frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}p(\tilde r_{ij}\geqslant\tilde r_{ik})}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}p(\tilde r_{ij}\geqslant\tilde r_{ik})},$$
$$k,j\in M,i\in N. \tag{26}$$

由式 (26) 易知, 在全体供选方案下决策指标间的比较可能度值总和与该指标权重值呈正比关系.

3 IN-UMADM 的可能度规划模型实施步骤和算例

本文给出的 IN-UMADM 的可能度规划模型实施步骤如下.

Step 1: 为消除指标值数据间不同物理量纲对方案决策作用的影响, 先统一数据间的不可公度性和矛盾性, 将初始区间数型决策矩阵 $\tilde X$ 按式 (20) 和 (21) 转化为规范区间数型决策矩阵

$$\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times m},$$

其中 $\tilde r_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$ 为规范区间数.

Step 2: 根据定义 2 分析包含在规范区间数型决策矩阵 $\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times m}$ 中能够反映各供选方案属性特征值间的比较可能度关系, 并按式 (1)、(2) 或 (3)、(4) 或 (5)、(6) 或 (7)、(8) 或 (9)、(10) 求出不同指标值数据间的比较可能度值, 然后按式 (26) 进行集结计算, 求出指标权重向量 $\boldsymbol W$.

Step 3: 根据 Step 1 求得的规范区间数型决策矩阵 $\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times m}$, 在 Step 2 求得的指标权重向量 $\boldsymbol W$ 的作用下构造出的矩阵

$$\tilde R(\boldsymbol W)=(\tilde r_{ij}w_j)_{n\times m} \tag{27}$$

称为加权规范区间数型决策矩阵.

由式 (27) 计算各供选方案 $X_i(i\in N)$ 的加权综合指标值

$$\tilde z_i(\boldsymbol W)=\sum_{j=1}^{m}w_j\tilde r_{ij}. \tag{28}$$

根据定理 5 给出的相关结论, 主要考察各供选方案间的优势比较可能度关系, 将式 (28) 求得的各供选方案加权综合指标值按式 (1)、(2) 或 (3)、(4) 或 (5)、(6) 或 (7)、(8) 或 (9)、(10) 进行两两优势比较, 测定出的可能度值为

$$p(X_i\succ X_k)=p(\tilde z_i(\boldsymbol W)\geqslant\tilde z_k(\boldsymbol W)). \tag{29}$$

将式 (29) 测定出的值称为供选方案 X_i 优于供选方案 X_k 的比较可能度. 由式 (29) 构造出的矩阵

$$P_{n\times n}=p(X_i\succ X_k)_{n\times n} \tag{30}$$

称为供选方案间两两优势比较测定出的可能度关系矩阵. 称

$$\mu(X_i^{\succ})=\frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n}p(X_i\succ X_k),$$
$$i,k\in N. \tag{31}$$

为供选方案 X_i 在供选方案集 $\{X_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 两两优势比较测定出的可能度值集结下的总体比较可能度测定值.

Step 4: 利用式 (28) ~ (31) 求出供选方案 X_i 在全体供选方案间两两优势比较测定出的可能度值集结下的总体比较可能度测定值 $\mu(X_i^{\succ})$, $i=1,2,\cdots,n$.

Step 5: 由 Step 4 求得的总体比较可能度 $\mu(X_i^{\succ})$ 测定值, 按大到小的顺序对供选方案集 $\{X_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 进行优劣筛选和排序.

算例 1[21,30]　某投资集团对已经入围的石油、电商、高铁、航空 (用 $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 表示) 4 家候选企业单位中的一家进行投资. 在作最终决策时确定 3 个指标参考要素, 包括风险 u_1、企业成长 u_2、环境 u_3, 用 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ 表示. 假定由 100 位专家对上述 4 个候选企业在 3 个指标参考要素下的可行性方案分别进行投票, 经过统计处理后确定的赞成票的可能结果如表 1 所示[21,30], 试从客观角度确定最适合投资的企业单位.

表 1　赞成票可能结果量化信息[21,30]

X	u_1	u_2	u_3
X_1	$[45,65]$	$[50,70]$	$[20,45]$
X_2	$[65,75]$	$[65,75]$	$[55,85]$
X_3	$[45,65]$	$[55,65]$	$[55,80]$
X_4	$[75,85]$	$[65,80]$	$[45,85]$

Step 1: 表 1 中所有初始直观量化数据表示在 3 个不同指标参考要素下专家投票的结果, 具有相同的物理量纲和表达意义, 反映赞成票可能结果的数据均为效益型指标值. 将表 1 指标值数据构成的初始区间数型决策矩阵 $\tilde X$ 按式 (20) 和 (21) 转化为规范区间数型决策矩阵 $\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times m}$, 得到规范决策信息如表 2 所示.

表 2　规范决策信息

X	u_1	u_2	u_3
X_1	$[0.155,0.283]$	$[0.172,0.298]$	$[0.068,0.257]$
X_2	$[0.224,0.326]$	$[0.224,0.319]$	$[0.186,0.486]$
X_3	$[0.155,0.283]$	$[0.190,0.277]$	$[0.186,0.457]$
X_4	$[0.259,0.370]$	$[0.224,0.340]$	$[0.153,0.486]$

Step 2: 由定义 2 分析由表 2指标值数据构成的规范区间数型决策矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$, 并运用式 (1)、(2) 或 (3)、(4) 或 (5)、(6) 或 (7)、(8) 或 (9)、(10) 求出不同指标值数据间的比较可能度值, 根据式 (26) 进行可能度信息的集结计算, 求解出指标权重向量为

$$\boldsymbol{W}=(0.315,0.309,0.376)^{\mathrm{T}}.$$

Step 3: 由式 (27) 构造出加权规范区间数型决策矩阵 $\tilde{R}(\boldsymbol{W})$, 得到加权规范决策信息如表 3 所示.

表 3 加权规范决策信息表

X	u_1	u_2	u_3
X_1	$[0.049,0.089]$	$[0.053,0.092]$	$[0.025,0.097]$
X_2	$[0.071,0.103]$	$[0.069,0.099]$	$[0.070,0.182]$
X_3	$[0.049,0.089]$	$[0.059,0.086]$	$[0.070,0.172]$
X_4	$[0.082,0.117]$	$[0.069,0.105]$	$[0.057,0.182]$

按式 (28) 计算出各供选方案 $X_i\ (i=1,2,\cdots,4)$ 的加权综合指标值为

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{w})=[0.128,0.278],\ \tilde{z}_2(\boldsymbol{w})=[0.210,0.384],$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{w})=[0.178,0.346],\ \tilde{z}_4(\boldsymbol{w})=[0.208,0.404].$$

利用式 (29)、(30) 求出供选方案 $X_i\ (i=1,2,\cdots,4)$ 间两两优势比较测定出的可能度关系矩阵为

$$P_{4\times4}=\begin{bmatrix}0.5&0.209&0.314&0.201\\0.791&0.5&0.602&0.475\\0.686&0.398&0.5&0.379\\0.799&0.525&0.621&0.5\end{bmatrix}.$$

Step 4: 由 Step 3 求得供选方案间的可能度关系矩阵, 利用式 (31) 求出供选方案 X_i 在全体供选方案间两两优势比较测定出的可能度值集结下的总体比较可能度测定值为

$$\mu(X_1^{\succ})=0.242,\ \mu(X_2^{\succ})=0.623,$$
$$\mu(X_3^{\succ})=0.487,\ \mu(X_4^{\succ})=0.648.$$

Step 5: 由 Step 4 求得的总体比较可能度 $\mu(X_i^{\succ})$ 测定值按大到小的顺序对供选方案集 $\{X_i\}\ (i=1,2,\cdots,4)$ 进行优劣筛选和排序, 得到

$$X_4\underset{0.525}{\succ}X_2\underset{0.602}{\succ}X_3\underset{0.686}{\succ}X_1,$$

故 X_4 为最优供选方案.

除了上述利用各供选方案间的优势比较可能度关系法对方案集进行优劣筛选和排序外, 也可采用定理 5 的其他结论, 如通过比较供选方案加权指标值系列和与正理想决策方案理想点系列和的相离度值大小、供选方案与正理想决策方案的优势比较可能度值大小、比较供选方案的区间数小元和大元的指标值系列和大小进行优劣判定.

由表 3 指标值数据 $\tilde{R}(\boldsymbol{W})$, 按照定义 4 求出由正、负理想点序列构成的区间数型正、负理想决策方案为

$$Z^{+*}=$$
$$\{[0.082,0.117],[0.069,0.105],[0.070,0.182]\},$$
$$Z^{-*}=$$
$$\{[0.049,0.089],[0.053,0.086],[0.025,0.097]\}.$$

利用式 (28) 计算正、负理想决策方案 Z^{+*} 和 Z^{-*} 的加权综合理想指标值为

$$\tilde{z}^{+*}(\boldsymbol{W})=[0.221,0.404],$$
$$\tilde{z}^{-*}(\boldsymbol{W})=[0.128,0.271].$$

由 Step 3 求得的各供选方案 $X_i\ (i=1,2,\cdots,4)$ 的加权综合指标值, 得到

$$\sum_{j=1}^{3}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{1u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{1u_j}^{w},\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.220,$$
$$\sum_{j=1}^{3}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{2u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{2u_j}^{w},\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.031,$$
$$\sum_{j=1}^{3}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{3u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{3u_j}^{w},\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.101,$$
$$\sum_{j=1}^{3}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{4u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{4u_j}^{w},\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.013,$$

或者

$$p(X_1\succ Z^{+*})=p\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{1u_j}^{w}\geqslant\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.171,$$
$$p(X_2\succ Z^{+*})=p\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{2u_j}^{w}\geqslant\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.456,$$
$$p(X_3\succ Z^{+*})=p\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{3u_j}^{w}\geqslant\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.356,$$
$$p(X_4\succ Z^{+*})=p\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{4u_j}^{w}\geqslant\sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.483,$$

或者

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{1u_j}^{wL}+x_{1u_j}^{wU})=0.405,$$
$$\sum_{j=1}^{3}(x_{2u_j}^{wL}+x_{2u_j}^{wU})=0.594,$$
$$\sum_{j=1}^{3}(x_{3u_j}^{wL}+x_{3u_j}^{wU})=0.524,$$
$$\sum_{j=1}^{3}(x_{4u_j}^{wL}+x_{4u_j}^{wU})=0.612.$$

因此, 对供选方案集 $\{X_i\}\ (i=1,2,\cdots,4)$ 的优劣判定和排序仍为 $X_4\succ X_2\succ X_3\succ X_1$, 即 X_4 是最优供选方案.

在对供选方案进行优劣决策过程中, 采用本文给出的 IN-UMADM 的可能度规划模型算法, 即各供

选方案 X_i 在全体供选方案间两两优势比较测定出的可能度值集结下的总体比较可能度测定值 $\mu(X_i^{\succ})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 或者定理 5 的有关结论可作最优决策, 此模型算法计算过程简洁, 而且能够利用可能度值度量任意两个供选方案间的比较占优势.

为便于比较分析, 采用文献 [24,26] 的离差最大化赋权算法对上述投资问题案例进行验算, 其指标权重度量公式为

$$w_j=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{kj})}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}d_{\mathrm{IN}}(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{kj})},\ i\in N,\ j\in M.$$

假定已统一了 UMADM 问题中方案指标值数据间的不同物理量纲信息, 按照文献 [24,26] 提供的离差最大化的多指标决策算法的实施步骤, 对上述算例的各个候选企业单位进行求解并排序, 得到

$$X_4 \underset{0.562}{\succ} X_2 \underset{0.809}{\succ} X_3 \underset{0.723}{\succ} X_1,$$

故 X_4 是最适合投资的企业单位.

通过分析上述投资问题的案例表明, 采用本文提出的基于区间数可能度规划模型的指标赋权算法与文献 [24,26] 给出的基于离差最大化赋权算法对指标权重的度量虽不同, 但两种模型算法不仅获得了相同的最优解判定和筛选排序, 而且都利用可能度对任意两供选方案间的比较占优势进行度量.

4 结　论

本文提出的基于区间数比较可能度规划模型的指标赋权度量是常见的不确定多指标决策研究的重点内容之一, 其基本原理是在消除指标值数据间的不可公度性和矛盾性后, 若所有供选方案指标值间的比较可能度值集结后合成的决策指标间优势比较可能度值总和越大, 则表明数据波动幅度大的指标对供选方案优劣决策的作用越大, 相应地要提高指标属性赋权值; 反之, 若所有供选方案指标值间的比较可能度值集结后合成的决策指标间优势比较可能度值总和越小, 则表明数据波动幅度小的指标对供选方案优劣决策的作用越小, 相应地要降低指标属性赋权值.

针对指标权重未知且对方案无偏好的IN-UMADM 问题, 引入区间数比较可能度与比较优势关系理论知识, 研究了区间数的 5 种比较可能度定义的等价关系和区间数比较优势关系的一些优良性质. 推导出区间数间优势关系与区间数同理想点的相离度值大小、区间数比较可能度值大小、区间数小元和大元的指标值和大小之间存在等价; 供选方案间优势关系与供选方案指标值系列和与理想决策方案理想点系列和的相离度值大小、供选方案指标值系列和的比较可能度值大小、供选方案的区间数小元和大元的指标值系列和大小之间存在等价. 此外, 根据上述赋权思想, 通过新建立的一种基于区间数比较优势关系确定指标权重的可能度规划模型和供选方案间相互比较的可能度矩阵信息, 集结并求解出各个方案比较的总体可能度值大小, 对供选方案集进行优劣筛选和排序, 以此给出一种新的 IN-UMADM 可能度规划算法. 事实上, 利用可能度比较互补判断矩阵的排序算法一般要进行 $n(n-1)$ 次运算, 所提出的比较可能度规划模型算法至多只需要进行 n 次运算, 体现了模型算法的高效性和优异性, 具有广泛的应用前景.

参考文献(References)

[1] Kamran Rezaie, Sara Saeidi Ramiyani, Salman Nazari-Shirkouhi, et al. Evaluating performance of Iranian cement firms using an integrated fuzzy AHP-VIKOR method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 22(3): 21-30.

[2] Wu L F, Liu S F, Yang Y J. A model to determine OWA weights and its application in energy technology evaluation[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 30(7): 798-806.

[3] Liu H C, You J X, Fan X J, et al. Site selection in waste management by the VIKOR method using linguistic assessment[J]. Applied Soft Computing, 2014, 21(1): 684-696.

[4] Yim K K, Wong S C, Anthony Chen, et al. A reliability-based land use and transportation optimization model[J]. Transportation Research Part C, 2011, 19(2): 351-362.

[5] Tsung-Han Chang. Fuzzy VIKOR method: A case study of the hospital service evaluation in Taiwan[J]. Information Sciences, 2014, 271(1): 196-212.

[6] Jin J L, Wei Y M, Zou L L, et al. Risk evaluation of China’s natural disaster systems: An approach based on triangular fuzzy numbers and stochastic simulation[J]. Natural Hazards, 2012, 62(1): 129-139.

[7] Lisa Y Chen, Tien-Chin Wang. Optimizing partners’choice in IS/IT outsourcing projects: The strategic decision of fuzzy VIKOR[J]. Int J of Production Economics, 2009, 120(1): 233-242.

[8] Wang P, Meng P, Song B W. Response surface method using grey relational analysis for decision making in weapon system selection[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2014, 25(2): 265-272.

[9] Xue Yan, Lei Hongxuan, Li Yongming. Computation tree logic based on possibility measure[J]. Computer Engineering and Science, 2011, 33(9): 70-75.

[10] 李存林, 张强. 基于可能性测度的模糊对策[J]. 北京理工大学学报, 2011, 31(3): 324-328.
(Li C L, Zhang Q. Fuzzy games based on possibility

measures[J]. J of Beijing Institute of Technology, 2011, 31(3): 324-328.)

[11] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3-28.

[12] John A Drakopoulos. Probabilities, possibilities, and fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 75(1): 1-15.

[13] Wu Q, Law R. The complex fuzzy system forecasting model based on fuzzy SVM with triangular fuzzy number input and output[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(10): 12085-12093.

[14] Li D F. A fast approach to compute fuzzy values of matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. European J of Operational Research, 2012, 223(2): 421-429.

[15] Sadi-Nezhad S, Noroozi-yadak A, Makui A. Fuzzy distance of triangular fuzzy numbers[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2013, 25(4): 845-852.

[16] Ju Y B, Wang A H. Extension of VIKOR method for multi-criteria group decision making problem with linguistic information[J]. Applied Mathematical Modeling, 2013, 37(5): 3112-3125.

[17] Xu Z S, Da Q L. A least deviation method for priorities of fuzzy preference matrix[J]. European J of Operational Research, 2005, 164(1): 206-216.

[18] 刘学生, 吴伟, 邹开其. 区间数排序的粗糙集法[J]. 大连理工大学学报, 2008, 48(1): 143-146.
(Liu X S, Wu W, Zou K Q. Rough sets ranking methodology for interval numbers[J]. J of Dalian University of Technology, 2008, 48(1): 143-146.)

[19] Sevastianov P. Numerical methods for interval and fuzzy number comparison based on the probabilistic approach and dempster-shafer theory[J]. Information Sciences, 2007, 177(21): 4645-4661.

[20] 黄智力, 罗键. 三角模糊数型不确定多指标决策的可能度关系法[J]. 控制与决策, 2015, 30(8): 1365-1371.
(Huang Z L, Luo J. Possibility degree relation method for triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision making[J]. Control and Decision, 2015, 30(8): 1365-1371.)

[21] 黄智力, 刘健, 刘思峰, 等. 属性值为区间数的决策对象预期理论模型研究[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(5): 977-981.
(Huang Z L, Liu J, Liu S F, et al. Prospect theory model for multiple criteria decision making alternative with interval number[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(5): 977-981.)

[22] 刘勇, Forrest Jeffrey, 刘思峰, 等. 基于前景理论的多目标灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 345-350.
(Liu Y, Forrest J, Liu S F, et al. Multi-objective grey target decision-making based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 345-350.)

[23] 李金鹏, 岳超源, 李武. 一类基于优势关系的不完全信息多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 229-234.
(Li J P, Yue C Y, Li W. A dominance relation-based decision making approach for multi-attribute decision making problems with incomplete information[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 229-234.)

[24] 彭张林, 张强, 李珠瑞, 等. 改进的离差最大化决策模型及其在临近空间多任务规划中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(2): 421-427.
(Peng Z L, Zhang Q, Li Z R, et al. Improved maximizing deviation decision-making model and its application in multi-mission planning of near space system[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(2): 421-427.)

[25] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 45-97.
(Li D F. Fuzzy multi-object multi-person decision making and Countermeasure[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003: 45-97.)

[26] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 105-131.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 105-131.)

[27] 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报, 2003, 18(1): 67-70.
(Xu Z S, Da Q L. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application[J]. J of Systems Engineering, 2003, 18(1): 67-70.)

[28] 徐泽水, 达庆利. 区间型多属性决策的一种新方法[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2003, 33(4): 498-501.
(Xu Z S, Da Q L. New method for interval multi-attribute decision-making[J]. J of Southeast University: Natural Science Edition, 2003, 33(4): 498-501.)

[29] 达庆利, 刘新旺. 区间数线性规划及其满意解[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(4): 3-7.
(Da Q L, Liu X W. Interval number linear programming and its satisfactory solution[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1999, 19(4): 3-7.)

[30] Ye J. Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment[J]. European J of Operational Research, 2010, 205(1): 202-204.

(责任编辑：郑晓蕾)