

## 具有未知参数的混沌系统的有限时间滑模同步控制

高俊山, 宋歌<sup>†</sup>, 邓立为

(哈尔滨理工大学 自动化学院, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 针对带有未知参数和非线性输入的两个不同的混沌系统之间的同步问题进行研究. 提出一个相比于传统滑模面具有更快收敛速度的终端滑模面, 并结合自适应控制理论和滑模控制理论, 设计一个自适应滑模控制律, 使同步误差在有限时间内收敛到滑模面, 并沿滑模面在有限时间内收敛到零点, 最终实现两个不同的混沌系统之间的同步. 最后, 以带有不确定性和外部扰动的Lorenz系统和Liu系统为例进行数值仿真, 仿真结果表明, 同步误差在有限时间内收敛到零点, 从而验证了所设计控制律的有效性和可行性.

**关键词:** 自适应滑模控制; 有限时间控制; 混沌同步; 未知参数

**中图分类号:** O415.5; O231.2

**文献标志码:** A

## Finite-time sliding mode synchronization control of chaotic systems with uncertain parameters

GAO Jun-shan, SONG Ge<sup>†</sup>, DENG Li-wei

(Institute of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** The problem of chaos synchronization between two different chaotic systems with uncertain parameters and nonlinear inputs is investigated. A terminal sliding surface with a faster convergence speed than conventional sliding surface is introduced. Based on the adaptive control theory and the sliding mode control technique, an adaptive sliding mode controller is designed to guarantee the convergence of synchronization errors to the sliding surface and zero equilibrium in finite-time. Finally, numerical simulations about the Lorenz system and the Liu system are carried out, and simulation results show that synchronization errors converge to zero in finite-time, and the effectiveness and applicability of the proposed control scheme is proved adequately.

**Keywords:** adaptive sliding mode control; finite-time control; chaos synchronization; uncertain parameters

### 0 引言

近年来, 在非线性和混沌领域中, 混沌同步已经成为研究的热门课题. 由于混沌系统对初始条件和参数变化的极其敏感性和随机性, 使得混沌同步在保密通信、生物工程、信息处理等领域中得到广泛的应用<sup>[1-3]</sup>. 迄今为止, 科学家们已经提出了许多有效的同步控制方法, 例如: 线性与非线性反馈同步控制<sup>[4-5]</sup>、自适应同步控制<sup>[6-7]</sup>、滑模同步控制<sup>[8]</sup>、脉冲同步控制<sup>[9]</sup>、模糊逻辑同步控制<sup>[10]</sup>、 $H_\infty$ 同步控制<sup>[11]</sup>等. 在众多控制方法中, 由于滑模控制对系统的不确定性和外部扰动具有很强的鲁棒性, 对参数变化不敏感以及设计简单等优点, 近年来得到了广泛的关注与研究. 文献[12]利用滑模控制方法研究了一类不同结构和

不同维数的混沌系统之间的同步与反同步问题; 文献[13]针对带有外部扰动和不确定性的混沌系统, 设计了一个鲁棒滑模控制器来实现两个混沌系统之间的同步. 在工程应用中, 混沌系统的参数可能在一定范围内波动, 因为它不可避免地受到外界环境的干扰, 所以混沌系统的参数不可能完全可知. 因此, 对带有未知参数的混沌系统同步的研究更具有实际意义. 针对系统中的未知参数, 学者们提出了自适应方法来估计未知参数的值, 文献[14]设计了一个自适应反馈控制器, 从而实现了两个带有不确定参数的混沌系统之间的渐近同步; 文献[15]研究了一类带有未知参数的四维混沌系统的自适应投影同步问题; 文献[16]在系统参数未知的情况下, 将观测器法与自适

收稿日期: 2015-11-05; 修回日期: 2016-01-26.

基金项目: 黑龙江省自然科学基金项目(F201307).

作者简介: 高俊山(1962-), 男, 教授, 博士, 从事自动控制、混沌理论等研究; 宋歌(1993-), 女, 硕士生, 从事混沌理论的研究.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: 18724606964@163.com

应法相结合,实现了一类受扰混沌系统之间的同步.除了未知参数对系统的影响,由于受到激励的限制,在设计控制律的过程中非线性输入对系统的影响也不可忽略.文献[17]利用滑模控制方法研究了两个不同的带有非线性输入的混沌系统之间的渐近同步;文献[18]设计了一个模糊自适应观测器来实现带有非线性和死区输入的混沌系统的投影同步;文献[19]利用自适应输出反馈滑模控制方法研究了带有非线性输入的 Rössler 系统之间的同步问题.

在上述文献中大多只能保证驱动系统与响应系统之间的渐近同步,从实际应用的角度考虑,有限时间内达到同步更有实际价值.对此,文献[20]设计了一个有限时间连续状态反馈控制律,实现了 Duffing 系统和 Lorenz 系统之间的同步;文献[21]利用有限时间控制技术研究了两个统一的带有未知参数的混沌系统之间的同步问题.然而,在实际工程应用中,系统中的未知参数、非线性输入、不确定性以及外部扰动等诸多因素都会限制和影响控制器的使用.上述文献只考虑了部分因素对系统的影响,为了提高控制器的可靠性,同时更符合工程应用的实际情况,本文综合考虑了能影响控制器使用的多种因素.针对上述文献中控制方法存在的不足,本文选择两个带有未知参数、非线性输入以及不确定性和外部扰动的混沌系统作为研究对象,设计一个新的有限时间自适应滑模控制律,使驱动系统和响应系统能在有限时间内达到同步.与现有的方法相比较,本文所设计的控制器更适合实际应用,具有很强的鲁棒性和较快的响应速度.

本文提出一个新的终端滑模面,通过比较同步误差沿滑模面收敛到平衡点的时间,证明所设计的滑模面比传统滑模面具有更快的收敛速度.通过设计自适应律来估计系统中的未知参数,基于自适应律和有限时间滑模控制方法,设计自适应滑模控制律来保证同步误差在有限时间内到达滑模面,并保持在滑模面上,最终使驱动系统与响应系统在有限时间内达到同步.最后通过数值仿真验证了所设计控制律的有效性.

## 1 系统模型与问题描述

本文所研究的混沌系统模型如下<sup>[22]</sup>:

驱动系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\theta + \\ &\quad \Delta f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + d_1^m(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\theta + \\ &\quad \Delta f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + d_2^m(t), \\ &\quad \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\theta + \\ &\quad \Delta f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + d_n^m(t);\end{aligned}\quad (1)$$

响应系统为

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= g_1(y_1, y_2, \dots, y_n) + G_1(y_1, y_2, \dots, y_n)\psi + \\ &\quad \Delta g_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + d_1^s(t) + \phi_1(u_1), \\ \dot{y}_2(t) &= g_2(y_1, y_2, \dots, y_n) + G_2(y_1, y_2, \dots, y_n)\psi + \\ &\quad \Delta g_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + d_2^s(t) + \phi_2(u_2), \\ &\quad \vdots \\ \dot{y}_n(t) &= g_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + G_n(y_1, y_2, \dots, y_n)\psi + \\ &\quad \Delta g_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + d_n^s(t) + \phi_n(u_n).\end{aligned}\quad (2)$$

其中:  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  为系统的状态变量;  $f_i(x)$  和  $g_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为连续的非线性函数;  $F_i(x)$  和  $G_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 分别表示  $n \times m$  矩阵  $F(x)$  和  $G(y)$  的第  $i$  行, 矩阵  $F(x)$  和  $G(y)$  中的元素为连续的非线性函数;  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  和  $\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^T$  表示未知参数向量;  $\Delta f_i(x, t)$  和  $\Delta g_i(y, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为系统中的不确定性;  $d_i^m(t)$  和  $d_i^s(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为外部扰动;  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T$  为控制输入;  $\phi_i(u_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $u_i$  的连续非线性函数.

定义驱动系统与响应系统之间的同步误差为  $e(t) = x(t) - y(t)$ , 由式(1)减去(2)可得如下同步误差系统:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= \\ & f_1(x) + F_1(x)\theta + \Delta f_1(x, t) + d_1^m(t) - \\ & g_1(y) - G_1(y)\psi - \Delta g_1(y, t) - d_1^s(t) - \phi_1(u_1), \\ \dot{e}_2(t) &= \\ & f_2(x) + F_2(x)\theta + \Delta f_2(x, t) + d_2^m(t) - \\ & g_2(y) - G_2(y)\psi - \Delta g_2(y, t) - d_2^s(t) - \phi_2(u_2), \\ & \quad \vdots \\ \dot{e}_n(t) &= \\ & f_n(x) + F_n(x)\theta + \Delta f_n(x, t) + d_n^m(t) - \\ & g_n(y) - G_n(y)\psi - \Delta g_n(y, t) - d_n^s(t) - \phi_n(u_n).\end{aligned}\quad (3)$$

为了方便下文控制律的设计,给出下列假设条件:

**假设 1**<sup>[23]</sup> 假设存在正数  $\alpha_i$  和  $\beta_i$ , 使得不确定性  $\Delta f_i(x, t)$  和  $\Delta g_i(y, t)$  满足如下不等式:

$$\|\Delta f_i(x, t)\| \leq \alpha_i \|x\|, \quad (4)$$

$$\|\Delta g_i(y, t)\| \leq \beta_i \|y\|, \quad (5)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数.

**假设 2**<sup>[24-25]</sup> 假设存在正数  $D_i^m$  和  $D_i^s$ , 使得外

部扰动满足下列范围:

$$|d_i^m(t)| < D_i^m, |d_i^s(t)| < D_i^s. \quad (6)$$

**假设 3** 假设未知的参数向量满足约束条件

$$\|\theta\| \leq \Theta, \|\psi\| \leq \Psi, \quad (7)$$

其中  $\Theta$  和  $\Psi$  是已知的正常数.

**假设 4** [26] 假设存在区间  $[p_i, q_i]$ , 其中  $p_i > 0$ , 使得非线性函数  $\phi_i(u_i)$  满足下列范围:

$$p_i u_i^2 \leq u_i \phi_i(u_i) \leq q_i u_i^2. \quad (8)$$

以混沌系统 (1) 作为驱动系统, 以混沌系统 (2) 作为响应系统, 设计适当的控制律  $u(t)$ , 使得存在一个常数  $T = T(e(0)) > 0$ , 使同步误差

$$\lim_{t \rightarrow T} \|e(t)\| = 0, \quad (9)$$

且当  $t \geq T$  时,  $\|e(t)\| \equiv 0$ , 从而实现驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 在有限时间内同步 [27].

在设计控制律之前, 给出下列引理:

**引理 1** [22] 考虑下列系统, 其中  $f: D \rightarrow R^n$  在开区间  $D \in R^n$  上是连续的函数, 初始条件  $x(0) = x_0$ , 则有

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in R^n. \quad (10)$$

假设存在一个连续可导的正定函数  $V(x): D \rightarrow R$ . 其中:  $\rho > 0, 0 < \eta < 1$ , 使得

$$\dot{V}(x) + \rho V^\eta(x) \leq 0, \quad (11)$$

则系统 (10) 在有限时间内稳定, 且  $T$  满足

$$T(x_0) \leq \frac{V^{1-\eta}(x_0)}{\rho(1-\eta)}. \quad (12)$$

**引理 2** [23] 对于状态变量  $x$ , 若初始条件  $x_0 > 0$ , 满足下列条件:

$$\dot{x} = -k_1 x - k_2 \text{sign}(x), k_1, k_2 > 0, \quad (13)$$

则状态变量  $x$  在有限时间内趋于零点, 且时间  $T$  满足

$$T = \frac{1}{k_1} \ln \left( \frac{k_1 x_0 + k_2}{k_2} \right). \quad (14)$$

**引理 3** 对于  $v_1, v_2, \dots, v_n \in R$ , 有下列不等式成立:

$$|v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| \geq \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}. \quad (15)$$

**引理 4** 假设  $u_i(t) = \lambda_i \text{sgn}(s_i)$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\text{sgn}(s_i)$  为  $s_i$  的符号函数, 则下列不等式成立:

$$-s_i \phi_i(u_i) \leq -p_i \lambda_i |s_i|. \quad (16)$$

**证明** 用  $\lambda_i \text{sgn}(s_i)$  代替  $u_i(t)$ , 代入式 (8) 可得

$$p_i \lambda_i^2 \text{sgn}(s_i)^2 \leq \lambda_i \text{sgn}(s_i) \phi_i(u_i). \quad (17)$$

因为  $\text{sgn}(s_i)^2 = 1$ , 所以

$$p_i \lambda_i^2 \leq \lambda_i \text{sgn}(s_i) \phi_i(u_i), \quad (18)$$

两边同时乘以  $-|s_i|/\lambda_i$ , 且  $\text{sgn}(s_i) = s_i/|s_i|$ , 可得

$$-s_i \phi_i(u_i) \leq -p_i \lambda_i |s_i|. \quad (19)$$

由此, 引理 4 得证.  $\square$

## 2 有限时间自适应滑模控制律设计

下面设计一个自适应滑模控制律来实现驱动系统与响应系统在有限时间内达到同步. 设计控制律分为以下两部分: 1) 设计一个新的终端滑模面, 与传统滑模面相比, 它具有更快收敛速度, 使同步误差沿滑模面快速收敛到原点; 2) 设计一个自适应滑模控制律以保证同步误差在有限时间到达滑模面.

### 2.1 滑模面设计

下面设计如下新形式的终端滑模面:

$$s_i(t) = e_i(t) + k_1 \int_0^t e_i(\tau) d\tau + k_2 \int_0^t \text{sgn}(e_i(\tau)) d\tau, \quad k_1, k_2 > 0. \quad (20)$$

滑模运动存在的充分必要条件为

$$\begin{cases} s_i(t) = 0, \\ \dot{s}_i(t) = \dot{e}_i(t) + k_1 e_i(t) + k_2 \text{sgn}(e_i(t)) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

由此可得误差系统为

$$\dot{e}_i(t) = -k_1 e_i(t) - k_2 \text{sgn}(e_i(t)). \quad (22)$$

而文献 [13, 22] 所设计的传统滑模面为

$$s_i(t) = e_i(t) + k_3 \int_0^t \text{sgn}(e_i(\tau)) |e_i(\tau)|^\partial d\tau, \quad k_3 > 0, 0 < \partial < 1, \quad (23)$$

由滑模运动的存在条件可得到误差系统为

$$\dot{e}_i(t) = -k_3 \text{sgn}(e_i(t)) |e_i(t)|^\partial. \quad (24)$$

**定理 1** 如果系统误差  $e_i$  的初始值  $e_i(0) < e$ , 且设  $k_2 = k_3$ , 则式 (22) 中的系统误差收敛到原点的时间  $T_1$  小于式 (24) 中系统误差收敛到原点的时间  $T_2$ , 即  $T_1 < T_2$ .

**证明** 由 Lyapunov 稳定性定理, 选取 Lyapunov 函数为  $V(t) = \frac{1}{2} e_i^2$ , 并对其求导, 可得

$$\dot{V}(t) = e_i \dot{e}_i. \quad (25)$$

分别将式 (22) 和 (24) 代入 (25), 可得

$$\dot{V}(t) = -k_1 e_i^2 - k_2 |e_i| \leq 0, \quad (26)$$

$$\dot{V}(t) = -k_3 (2V)^{\frac{\partial+1}{2}} = -\kappa V^{\frac{\partial+1}{2}} \leq 0, \quad (27)$$

其中  $\kappa = k_3 2^{\frac{\partial+1}{2}}$ .

由引理 1 和引理 2 可得到收敛时间为

$$T_1 = \frac{1}{k_1} \ln \left( \frac{k_1 e_i(0) + k_2}{k_2} \right), \quad (28)$$

$$T_2 = \frac{|e_i(0)|^{1-\partial}}{k_3(1-\partial)}. \quad (29)$$

设  $T_0 = \frac{e_i(0)}{k_2}$ , 有下列不等式成立:

$$T_1 = \frac{1}{k_1} \ln \left( \frac{k_1 e_i(0) + k_2}{k_2} \right) < \frac{1}{k_1} \frac{k_1 e_i(0)}{k_2} = \frac{e_i(0)}{k_2} = T_0. \quad (30)$$

为了比较收敛时间  $T_1$  与  $T_2$  的大小, 选取函数  $f(\xi) = e_i^\xi(0)/\xi$ , 其中  $0 < \xi < 1$ , 并对其求导, 可得

$$f'(\xi) = \frac{\xi e_i^\xi(0) \ln e_i(0) - e_i^\xi(0)}{\xi^2} = \frac{e_i^\xi(0)(\xi \ln e_i(0) - 1)}{\xi^2}. \quad (31)$$

当  $e_i(0) < e$ ,  $0 < \xi < 1$  时,  $f'(\xi) < 0$ . 那么,  $T_0$  和  $T_2$  可由下式表示:

$$T_0 = \frac{f(1)}{k_2}, \quad T_2 = \frac{f(1-\alpha)}{k_3}. \quad (32)$$

当  $k_2 = k_3$  时, 可以得到  $T_0 < T_2$ , 并由式 (30) 可知  $T_1 < T_2$ , 因此, 本文所设计的滑模面 (20) 可使式 (22) 中的同步误差在有限时间内收敛到原点.  $\square$

## 2.2 自适应滑模控制律设计

利用上述所设计的滑模面, 结合自适应控制理论和滑模控制理论, 设计一个自适应滑模控制律, 使得同步误差在有限时间内到达滑模面, 并一直保持在滑模面上. 本文所设计的自适应滑模控制律如下:

$$u_i(t) = \frac{1}{p_i} \left[ |f_i(x) - g_i(y)| + |F_i(x)\hat{\theta} - G_i(y)\hat{\psi}| + \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + \alpha_i \|x\| + \beta_i \|y\| + L_i + D_i^m + D_i^s + |k_1 e_i + k_2 \operatorname{sgn}(e_i)| \right] \operatorname{sgn}(s_i) = \lambda_i \operatorname{sgn}(s_i). \quad (33)$$

其中:  $p_i$ ,  $c_i$ ,  $L_i$ ,  $k_1$  和  $k_2$  都是大于零的常数;  $\hat{\theta}$  和  $\hat{\psi}$  分别为未知参数向量  $\theta$  和  $\psi$  的估计值;  $\mu = \min\{L_i c_i (i = 1, 2, \dots, n)\} > 0$ ;  $s(t) = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ . 为了处理未知参数, 设计如下形式的自适应律:

$$\dot{\hat{\theta}} = [F(x)]^T \delta, \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0; \quad (34)$$

$$\dot{\hat{\psi}} = -[G(y)]^T \delta, \quad \hat{\psi}(0) = \hat{\psi}_0. \quad (35)$$

其中:  $\delta = [c_1^2 s_1, c_2^2 s_2, \dots, c_n^2 s_n]^T$ ,  $\hat{\theta}_0$  和  $\hat{\psi}_0$  分别为估计值  $\hat{\theta}$  和  $\hat{\psi}$  的初始值.

**定理 2** 混沌同步误差系统 (3) 选取滑模面切换函数 (20), 在自适应滑模控制律 (33) 的作用下, 系统在有限时间

$$T' = \frac{\sqrt{2}}{\mu} \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 s_i^2(0) + \|\hat{\theta}(0) - \theta\|^2 + \|\hat{\psi}(0) - \psi\|^2 \right) \right)^{1/2} \quad (36)$$

内收敛到滑模面.

**证明** 由 Lyapunov 稳定性定理, 选择 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n [c_i^2 s_i^2] + \|\hat{\theta} - \theta\|^2 + \|\hat{\psi} - \psi\|^2 \right], \quad (37)$$

对上式求导可得

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n [c_i^2 s_i \dot{s}_i] + (\hat{\theta} - \theta)^T \dot{\hat{\theta}} + (\hat{\psi} - \psi)^T \dot{\hat{\psi}}. \quad (38)$$

将式 (21) 中的  $\dot{s}_i$  代入 (38), 可得

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n [c_i^2 s_i (\dot{e}_i(t) + k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t)))] + (\hat{\theta} - \theta)^T \dot{\hat{\theta}} + (\hat{\psi} - \psi)^T \dot{\hat{\psi}}. \quad (39)$$

将同步误差系统 (3)、自适应律 (34) 和 (35) 代入 (39) 可得

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n [c_i^2 s_i (f_i(x) - g_i(y) + F_i(x)\theta - G_i(y)\psi + \Delta f_i(x, t) - \Delta g_i(y, t) + d_i^m(t) - d_i^s(t) - \phi_i(u_i) + k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t)))] + (\hat{\theta} - \theta)^T [F(x)]^T \delta - (\hat{\psi} - \psi)^T [G(y)]^T \delta. \quad (40)$$

因为

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 s_i F_i(x)\theta = \theta^T [F(x)]^T \delta, \\ \sum_{i=1}^n c_i^2 s_i G_i(y)\psi = \psi^T [G(y)]^T \delta$$

恒成立, 所以式 (40) 可化简为

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n [c_i^2 s_i (f_i(x) - g_i(y) + \Delta f_i(x, t) - \Delta g_i(y, t) + d_i^m(t) - d_i^s(t) - \phi_i(u_i) + k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t)))] + \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta. \quad (41)$$

通过放缩, 可得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^n [c_i^2 |s_i| (|f_i(x) - g_i(y)| + |\Delta f_i(x, t) - \Delta g_i(y, t)| + |d_i^m(t) - d_i^s(t)| + |k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t))| - c_i^2 s_i \phi_i(u_i))] + \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta. \quad (42)$$

根据假设 1 和假设 2, 可得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^n [c_i^2 |s_i| (|f_i(x) - g_i(y)| + \alpha_i \|x\| + \beta_i \|y\| + D_i^m + D_i^s + |k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t))| - c_i^2 s_i \phi_i(u_i))] + \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta. \quad (43)$$

由引理 4 可得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^n [c_i^2 |s_i| (|f_i(x) - g_i(y)| + \alpha_i \|x\| + \beta_i \|y\| + D_i^m + D_i^s + |k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t))| - c_i^2 p_i \lambda_i |s_i|)] + \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta. \quad (44)$$

由式(33), 并将  $\lambda_i$  的值代入(44), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^n [c_i^2 |s_i| (|f_i(x) - g_i(y)| + \alpha_i \|x\| + \\ & \beta_i \|y\| + D_i^m + D_i^s + |k_1 e_i(t) + \\ & k_2 \operatorname{sgn}(e_i(t))|) - c_i^2 p_i |s_i| (1/p_i \cdot \\ & (|f_i(x) - g_i(y)| + |F_i(x)\hat{\theta} - G_i(y)\hat{\psi}| + \\ & \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + \\ & \alpha_i \|x\| + \beta_i \|y\| + L_i + D_i^m + D_i^s + \\ & |k_1 e_i + k_2 \operatorname{sgn}(e_i)|)] + \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \\ & \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta. \end{aligned} \quad (45)$$

将式(45)化简可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^n \left[ -c_i^2 |s_i| \left( |F_i(x)\hat{\theta} - G_i(y)\hat{\psi}| + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + L_i \right) \right] + \\ & \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta. \end{aligned} \quad (46)$$

由于

$$\begin{aligned} & \hat{\theta}^T [F(x)]^T \delta - \hat{\psi}^T [G(y)]^T \delta = \\ & (\hat{\theta}^T [F(x)]^T - \hat{\psi}^T [G(y)]^T) \delta \leq \\ & |\hat{\theta}^T [F(x)]^T - \hat{\psi}^T [G(y)]^T| |\delta| = \\ & |\hat{\theta}^T [F(x)]^T| |\delta| - \hat{\psi}^T [G(y)]^T |\delta| \end{aligned}$$

恒成立. 其中:  $|\cdot|$  为矩阵和向量中各个元素的绝对值,  $|\delta| = [c_1^2 |s_1|, c_2^2 |s_2|, \dots, c_n^2 |s_n|]^T$ . 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^n \left[ -c_i^2 |s_i| \left( |F_i(x)\hat{\theta} - G_i(y)\hat{\psi}| + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + L_i \right) \right] + \\ & |\hat{\theta}^T [F(x)]^T| |\delta| - \hat{\psi}^T [G(y)]^T |\delta|. \end{aligned} \quad (47)$$

由于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n c_i^2 |s_i| F_i(x)\hat{\theta} = \hat{\theta}^T [F(x)]^T |\delta|, \\ & \sum_{i=1}^n c_i^2 |s_i| G_i(y)\hat{\psi} = \hat{\psi}^T [G(y)]^T |\delta| \end{aligned}$$

恒成立, 可以得到

$$\begin{aligned} V(t) \leq & \sum_{i=1}^n \left[ -c_i^2 |s_i| \left( \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. \dots \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + L_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

又由  $\sum_{i=1}^n \frac{|s_i|^2}{\|s\|^2} = 1$ , 可得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^n [-c_i^2 |s_i| L_i] - \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi). \quad (49)$$

由假设 3 可知

$$\|\hat{\theta}\| + \Theta \geq \|\hat{\theta}\| + \|\theta\| \geq \|\hat{\theta} - \theta\|,$$

同理有

$$\|\hat{\psi}\| + \Psi \geq \|\hat{\psi}\| + \|\psi\| \geq \|\hat{\psi} - \psi\|,$$

由此可得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^n [-c_i^2 |s_i| L_i] - \mu(\|\hat{\theta} - \theta\| + \|\hat{\psi} - \psi\|), \quad (50)$$

其中

$$\mu = \min\{L_i c_i (i = 1, 2, \dots, n)\} > 0.$$

由引理 3 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\mu \left( \sum_{i=1}^n [c_i |s_i|] + \|\hat{\theta} - \theta\| + \|\hat{\psi} - \psi\| \right) \leq \\ & -\sqrt{2}\mu \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n [c_i^2 s_i^2] + \|\hat{\theta} - \theta\|^2 + \|\hat{\psi} - \psi\|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & -\sqrt{2}\mu V(t)^{1/2}. \end{aligned} \quad (51)$$

由引理 1 可知, 同步误差收敛到滑模面 ( $s_i(t) = 0$ ) 的时间为

$$\begin{aligned} T' = & \frac{\sqrt{2}}{\mu} \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 s_i^2(0) + \|\hat{\theta}(0) - \theta\|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \|\hat{\psi}(0) - \psi\|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (52)$$

因此, 所设计的自适应滑模控制律可以使同步误差在有限时间内收敛到滑模面.  $\square$

**注 1** 抖振问题是滑模控制方法在工程中的应用的主要障碍, 抖振产生的本质原因是开关的切换动作造成控制的不连续性, 由于本文所设计的自适应滑模控制律(33)包含  $|s_i|/\|s\|^2$  和  $\operatorname{sgn}(x_i)$  两项, 会造成控制律不连续. 为了避免发生抖振现象, 采用连续化高增益法, 用  $\frac{|s_i|}{\|s\|^2 + \varepsilon}$  代替  $\frac{|s_i|}{\|s\|^2}$ , 并用  $\frac{x_i}{|x_i| + \varepsilon}$  代替符号函数  $\operatorname{sgn}(x_i)$ . 其中:  $\varepsilon$  是一个很小的正数, 仿真时取  $\varepsilon = 0.001$ ;  $\operatorname{sgn}(x_i)$  统一代表了控制律(33)中的  $\operatorname{sgn}(e_i)$  和  $\operatorname{sgn}(s_i)$ .

### 3 系统仿真研究

#### 3.1 系统仿真参数设定

为了验证本文所提出理论的正确性以及所设计的自适应滑模控制律的有效性, 下面采用 Matlab 数值仿真的形式进行验证, 选定 Lorenz 系统为驱动系统, 选定 Liu 系统为响应系统, 其形式如下:

驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 8/3x_3; \end{cases} \quad (53)$$

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 10(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 = 40y_1 - y_1y_3, \\ \dot{y}_3 = 4y_1^2 - 2.5y_3. \end{cases} \quad (54)$$

将式(53)和(54)改写成与(1)和(2)相同的形式,

即

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_3 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix}}_{F(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 28 \\ 8/3 \end{bmatrix}}_{\theta}, \quad (55)$$

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ 4y_1^2 \end{bmatrix}}_{g(y)} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 \end{bmatrix}}_{G(y)} \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 40 \\ 2.5 \end{bmatrix}}_{\psi}. \quad (56)$$

系统中的不确定项和外部扰动项选取为

$$\begin{aligned} \Delta f_1(x, t) &= 0.15 \sin(t)x_1, \quad \Delta f_2(x, t) = 0.2 \sin(t)x_2, \\ \Delta f_3(x, t) &= 0.25 \sin(t)x_3, \quad \Delta g_1(y, t) = 0.15 \cos(t)y_1, \\ \Delta g_2(y, t) &= 0.2 \cos(t)y_2, \quad \Delta g_3(y, t) = 0.25 \cos(t)y_3, \\ d_i^m(t) &= 0.4 \sin(t), \quad d_i^s = 0.4 \cos(t), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

选取滑模面为

$$s_i(t) = e_i(t) + k_1 \int_0^t e_i(\tau) d\tau + k_2 \int_0^t \frac{e_i(\tau)}{|e_i(\tau)| + \varepsilon} d\tau. \quad (57)$$

自适应滑模控制律选取如下形式:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{1}{p_i} \left[ |f_i(x) - g_i(y)| + |F_i(x)\hat{\theta} - G_i(y)\hat{\psi}| + \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + \alpha_i \|x\| + \beta_i \|y\| + L_i + D_i^m + D_i^s + \left| k_1 e_i + k_2 \frac{e_i}{|e_i| + \varepsilon} \right| \frac{s_i}{|s_i| + \varepsilon} = \lambda_i \frac{s_i}{|s_i| + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (58)$$

图1和图2分别为带有不确定性和外部扰动的驱动系统和响应系统.

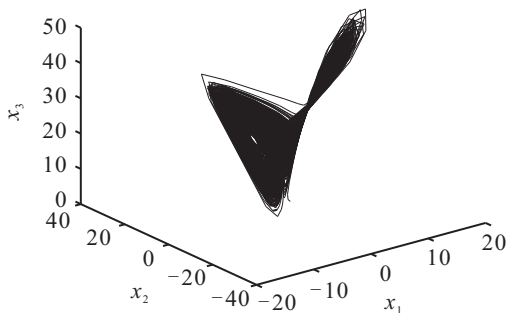


图1 驱动系统

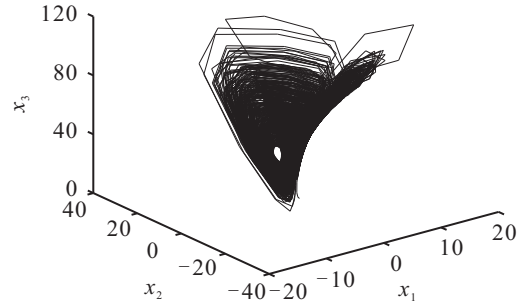


图2 响应系统

为了展现本文所设计的控制律具有更快的收敛速度,与传统的滑模控制律进行对比,传统滑模面和控制律分别选取为

$$s_i(t) = e_i(t) + k_3 \int_0^t \frac{e_i(\tau)}{|e_i(\tau)| + \varepsilon} |e_i(\tau)|^\partial d\tau, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{1}{p_i} \left[ |f_i(x) - g_i(y)| + |F_i(x)\hat{\theta} - G_i(y)\hat{\psi}| + \mu(\|\hat{\theta}\| + \Theta + \|\hat{\psi}\| + \Psi) \frac{|s_i|}{c_i^2 \|s\|^2} + \alpha_i \|x\| + \beta_i \|y\| + L_i + D_i^m + D_i^s + \left| k_3 |e_i|^\partial \frac{e_i}{|e_i| + \varepsilon} \right| \frac{s_i}{|s_i| + \varepsilon} = \lambda_i \frac{s_i}{|s_i| + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (60)$$

其中滑模面和控制律的参数选取为:  $k_1 = 20, k_2 = 10, k_3 = 10, \partial = 0.5; \alpha_1 = 0.15, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.25; \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.15, \beta_3 = 0.2; D_i^m = D_i^s = 0.4, i = 1, 2, 3; c_1 = 4, c_2 = 3, c_3 = 2; L_1 = L_2 = L_3 = 1; p_1 = p_2 = p_3 = 2; \Theta = \Psi = 35; \hat{\theta}$ 和 $\hat{\psi}$ 的初始值分别为 $[1, 1, 1]$ 和 $[2, 2, 2]$ ; 非线性输入 $\phi_i(u_i) = [5 + 3 \sin(t)]u_i, i = 1, 2, 3;$  Lorenz系统的初始值为 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [2, 2, 2]$ , Liu系统的初始值为 $[y_1(0), y_2(0), y_3(0)] = [1, 1, 1]$ .

### 3.2 仿真结果分析

利用上述设定的仿真参数对系统进行Matlab仿真.图3为滑模面切换函数,图中的小图是部分时间段的局部放大图;图4为控制律变化曲线;图5为利用本文所设计的控制律(58)得到的同步误差变化曲线;图6为利用传统控制律(60)得到的同步误差变化曲线;图7和图8分别为自适应参数 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\psi}$ 的变化曲线.

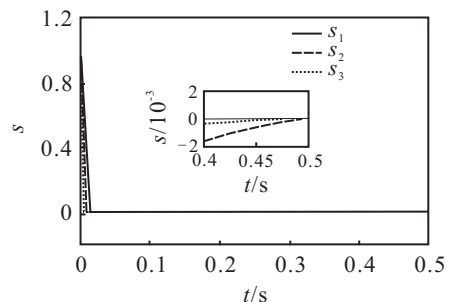


图3 切换滑模面

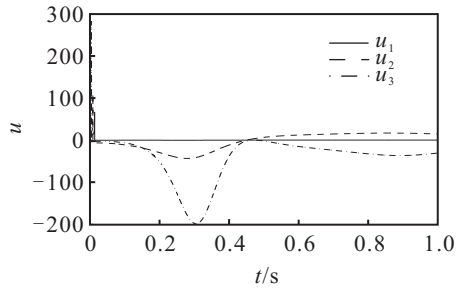


图 4 自适应滑模控制律

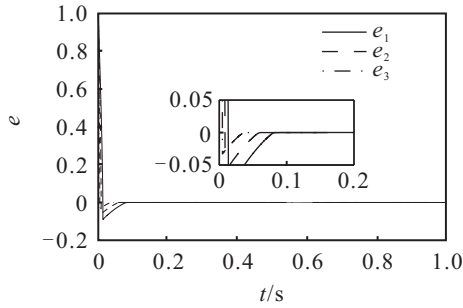


图 5 控制律 (58) 作用下的同步误差

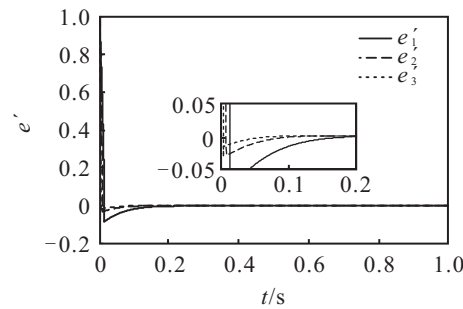


图 6 控制律 (60) 作用下的同步误差

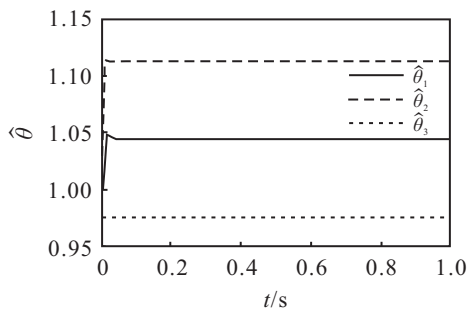


图 7 自适应参数  $\hat{\theta}$

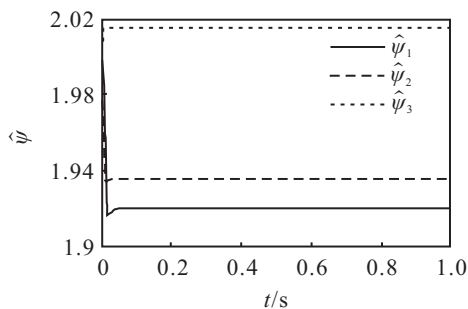


图 8 自适应参数  $\hat{\psi}$

由图 3 可知, 切换滑模面在控制律的作用下, 可在很短的时间内收敛到零点; 由图 4 可知, 为了保证

同步误差快速地收敛到零点, 控制律在控制作用开始时具有很大的值, 当误差收敛到零点之后, 仍有一定的控制量去抑制外部扰动和不确定性带来的同步误差的变化; 从图 5 和图 6 的对比可知, 在本文所设计的控制律的作用下, 同步误差收敛到零点的速度更快, 从而实现了驱动系统和响应系统之间的同步; 由图 7 和图 8 可知, 在滑模面收敛到零点后, 自适应参数  $\hat{\theta}$  和  $\hat{\psi}$  趋近于恒定的值。

#### 4 结 论

本文设计了一个自适应滑模控制律, 实现了两个带有未知参数和非线性输入以及带有不确定性和外部扰动的混沌系统之间的同步控制. 为了使系统具有更好的滑模运动, 首先提出了一个新的终端滑模面, 并从理论推导和数值仿真两方面证明了它比传统滑模面具有更快的收敛速度; 然后, 针对系统中的未知参数, 设计了自适应律; 最后, 基于自适应理论和滑模控制理论, 设计了自适应滑模控制律, 使同步误差在有限时间内收敛到滑模面, 并沿滑模面在有限时间内收敛到零点, 最终实现了驱动系统与响应系统在有限时间内达到同步. 数值仿真的结果表明, 同步误差可在有限时间内收敛到零点, 具有较快的收敛速度, 并验证了所设计控制律的有效性和可行性。

#### 参考文献(References)

- [1] Cheng C J. Robust synchronization of uncertain unified chaotic systems subject to noise and its application to secure communication[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(5): 2698-2712.
- [2] Guo L, Hu M, Xu Z, et al. Synchronization and chaos control by quorum sensing mechanism[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(3): 1253-1269.
- [3] 蔡国梁, 谭振梅, 周维怀, 等. 一个新的混沌系统的动力学分析及混沌控制[J]. 物理学报, 2007, 56(11): 6230-6237.  
(Cai G L, Tan Z M, Zhou W H, et al. Dynamical analysis of a new chaotic system and its chaotic control[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(11): 6230-6237.)
- [4] Rafikov M, Balthazar J M. On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(7): 1246-1255.
- [5] 陈志盛, 孙克辉, 张泰山. Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制[J]. 物理学报, 2005, 54(6): 2580-2583.  
(Chen Z S, Sun K H, Zhang T S. Nonlinear feedback synchronization control of Liu chaotic system[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(6): 2580-2583.)
- [6] 张若洵, 田钢, 栗苹, 等. 一类参数不确定混沌系统的自适应同步[J]. 物理学报, 2008, 57(4): 2073-2080.

- (Zhang R X, Tian G, Li P, et al. Adaptive synchronization of a class of chaotic systems with uncertain parameters[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(4): 2073-2080.)
- [7] Liu Jia, Guo Liuxiao, Jiang Zhengxian. Two types of adaptive generalized synchronization of chaotic systems[J]. *J of Donghua University*, 2015, 32(2): 318-322.
- [8] Zribi M, Smaoui N, Salim H. Synchronization of the unified chaotic systems using a sliding mode controller[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, 42(5): 3197-3209.
- [9] Liu X G, Zhen Y X, Man F H. Projective synchronization in drive-response networks via impulsive control[J]. *Chinese Physics Letters*, 2008, 25(8): 2816-2819.
- [10] 王银河, 高子林, 王钦若, 等. 基于自适应模糊逻辑系统的一类混沌系统同步控制[J]. *控制与决策*, 2013, 28(9): 1309-1314.  
(Wang Y H, Gao Z L, Wang Q N, et al. Synchronization control for a class of chaotic systems based on adaptive fuzzy logic systems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(9): 1309-1314.)
- [11] Lin T C, Hsu K W. A new adaptive  $H_\infty$  control for chaos synchronization between two different chaotic systems[J]. *In J of Innovative Computing, Information and Control*, 2012, 8(1): 701-714.
- [12] Chen D, Zhang R, Ma X, et al. Chaotic synchronization and anti-synchronization for a novel class of multiple chaotic systems via a sliding mode control scheme[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(1/2): 35-55.
- [13] Aghababa M P, Feizi H. Design of a sliding mode controller for synchronizing chaotic systems with parameter and model uncertainties and external disturbances[J]. *Trans of the Institute of Measurement and Control*, 2012, 34(8): 990-997.
- [14] Zhang Z, Park J H, Shao H. Adaptive synchronization of uncertain unified chaotic systems via novel feedback controls[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(1): 695-706.
- [15] Park J H. Adaptive control for modified projective synchronization of a four-dimensional chaotic system with uncertain parameters[J]. *J of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 213(1): 288-293.
- [16] 李秀春, 谷建华, 王云岚, 等. 一类带有未知参数的受扰混沌系统的观测器同步[J]. *物理学报*, 2011, 60(3): 030505.  
(Li X C, Gu J H, Wang Y L, et al. Observer synchronization method for a class of perturbed chaotic systems with unknown parameters[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(3): 030505.)
- [17] Yau H T, Yan J J. Chaos synchronization of different chaotic systems subjected to input nonlinearity[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 197(2): 775-788.
- [18] Boulkroune A, M'saad M. Fuzzy adaptive observer-based projective synchronization for nonlinear systems with input nonlinearity[J]. *J of Vibration and Control*, 2011, 14(1): 12-28.
- [19] Lin J S, Yan J J, Liao T L. Chaotic synchronization via adaptive sliding mode observers subject to input nonlinearity[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 24(1): 371-381.
- [20] Li S, Tian Y P. Finite time synchronization of chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 15(2): 303-310.
- [21] Wang H, Han Z Z, Xie Q Y, et al. Finite-time chaos synchronization of unified chaotic system with uncertain parameters[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(5): 2239-2247.
- [22] Aghababa M P, Khanmohammadi S, Alizadeh G. Finite-time synchronization of two different chaotic systems with unknown parameters via sliding mode technique[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(6): 3080-3091.
- [23] Ni J K, Liu C X, Liu K, et al. Finite-time sliding mode synchronization of chaotic systems[J]. *Chinese Physics B*, 2014, DOI: 10.1088/1674-1056/23/10/100504.
- [24] Jawaada W, Noorani M S M, Al-Sawalha M M. Active sliding mode control antisynchronization of chaotic systems with uncertainties and external disturbances[J]. *J of Applied Mathematics*, 2012, DOI:10.1155/2012/293709.
- [25] Aghababa M P. A novel terminal sliding mode controller for a class of non-autonomous fractional-order systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1/2): 679-688.
- [26] Liu L, Pu J, Song X, et al. Adaptive sliding mode control of uncertain chaotic systems with input nonlinearity[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(4): 1857-1865.
- [27] 邓立为, 宋申民. 基于输出反馈滑模控制的分数阶超混沌系统同步[J]. *自动化学报*, 2014, 40(11): 2420-2427.  
(Deng L W, Song S M. Synchronization of fractional order hyperchaotic system base on output feedback sliding mode control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2420-2427.)

(责任编辑: 滕 蓉)