

文章编号: 1001-0920(2017)01-0157-06

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0060

含状态和输入时滞的离散时间系统的近似最优跟踪控制

张健, 宿浩[†], 王鲁昆, 唐功友

(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 针对状态和控制输入均含有时滞的离散时间系统, 提出最优跟踪控制的设计方法. 通过引入一种新的状态向量, 将含有状态和控制输入时滞的离散时间系统转化为含有虚拟扰动项的无时滞离散时间系统. 根据最优控制理论, 构造离散 Riccati 矩阵方程和离散 Stein 矩阵方程的序列, 并证明该解序列一致收敛于变换后的离散时间系统的最优跟踪控制策略. 利用最优控制的逐次逼近设计方法, 得到最优跟踪控制的近似解, 并给出求解最优跟踪控制律的算法. 仿真算例表明了所提出最优跟踪控制方法的有效性.

关键词: 时滞系统; 离散时间系统; 最优控制; 最优输出跟踪; 逐次逼近法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Optimal output tracking control for discrete-time systems with delayed state and input

ZHANG Jian, SU Hao[†], WANG Lu-kun, TANG Gong-you

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: This paper proposes a design method of optimal tracking control for discrete-time systems with the delayed state and input. By introducing a new state vector, the original system is transformed into a non-delay discrete-time system with virtual disturbance. According to the optimal control theory, a sequence of discrete Riccati matrix equations and Stein matrix difference equations are constructed, and the solution sequence is proved to converge to the optimal tracking strategy of the transformed discrete-time system. By using the successive approximation design method of optimal control, the approximate solution of the optimal tracking control is obtained, and a design algorithm of the optimal tracking control law is presented. Simulation examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: time delay system; discrete-time system; optimal control; optimal output tracking; successive approximation

0 引言

在各种实际应用系统中时滞是普遍存在的, 近年来, 时滞系统的跟踪控制问题出现了很多新的研究成果. 文献 [1] 针对含有不确定时滞的线性系统, 提出了一种自适应反步控制方法, 解决了系统的轨迹跟踪问题. 文献 [2] 研究了含时滞的网络控制系统的 H_∞ 输出跟踪控制问题. 文献 [3] 针对含时变时滞和扰动的线性系统的鲁棒跟踪控制问题, 提出了一种组合非线性反馈方法. 文献 [4] 针对含多时滞和外部扰动的多输入多输出线性系统, 采用组合非线性反馈和滑模控制相结合的方法实现了鲁棒跟踪和模型跟踪. 文献

[5] 使用一种基于序列的近似方法, 将非线性时滞系统的输出跟踪问题转化为不含时滞的两点边值问题. 针对具有时滞的海洋平台的最优减振控制问题, 文献 [6] 提出了一种含有记忆项的前馈反馈控制律.

由于计算机控制普遍采用的是离散数字信号, 离散时间系统的分析与控制一直是人们关注的热点问题. 文献 [7] 在有限容量网络环境下, 对于非线性离散时间系统的步进式跟踪控制问题, 提出利用预测控制和积分控制来补偿网络时滞, 消除跟踪误差. 文献 [8] 针对含时滞的非线性离散时间系统的最优跟踪控制问题, 使用启发式动态规划迭代算法设计了最优跟踪

收稿日期: 2016-01-13; 修回日期: 2016-05-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(41276085, 61572448, 61673357); 山东省自然科学基金项目(ZR2015FM004, ZR2014JL043).

作者简介: 张健(1982—), 女, 博士生, 从事时滞系统的研究; 唐功友(1953—), 男, 教授, 博士生导师, 从事时滞系统、非线性系统及网络控制的分析和综合等研究.

[†]通信作者. E-mail: suhao@ouc.edu.cn

控制律. 针对多时滞离散线性系统, 文献 [9] 首先利用坐标变换将原系统化为最小时滞等效系统, 然后设计了基于自适应动态规划算法的最优跟踪控制器. 针对海洋平台的最优跟踪控制问题, 文献 [10] 设计了一个离散的前馈反馈最优跟踪控制器.

含有时滞的离散时间系统可通过扩维的方法消除时滞. 文献 [11] 研究了含多时滞和正弦扰动的离散时间系统的控制问题, 通过向量变换和扩维将系统变为在形式上无时滞的新系统. 然而, 扩维方法只适合维数较低和小时滞的系统, 否则会引起“维度灾难”和物理不可实现问题. 时滞系统二次性能指标的最优控制问题往往导致求解既含有超前项又含有时滞项的两点边值问题^[5]. 对于一般的系统而言, 求解这一问题的解析解是非常困难的. 近年来, 对于非线性系统的最优控制问题, 人们提出了一种逐次逼近设计方法^[12]. 逐次逼近设计方法已被推广用于解决时滞和非线性离散时间系统的最优跟踪控制问题^[13-14].

本文研究既含有状态时滞又含有控制输入时滞的离散时间系统的最优跟踪控制问题. 首先提出一种状态向量的变量代换, 将时滞离散时间系统转换为形式上无时滞的系统; 然后利用最优控制的逐次逼近设计方法^[12]得到最优跟踪控制的近似解. 仿真算例表明了所提出最优跟踪控制方法的有效性.

1 系统描述及模型转换

考虑一类含状态和控制输入时滞的离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_1x(k-h) + Bu(k-\tau); \\ x(k) &= \alpha(k), \quad k = -h, -h+1, \dots, 0; \\ u(k) &= 0, \quad k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$, $y \in \mathbf{R}^m$; A 、 A_1 、 B 分别为适当维数的常量矩阵; h 和 τ 分别为状态时滞和控制输入时滞, 均为正整数; $\alpha(k)$ 为初始状态.

引入一个新的状态向量. 令

$$\tilde{x}(k) = x(k) + \phi(k), \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-h-i-1} A_1 x(i) + \\ &\quad \sum_{i=k-\tau}^{k-1} A^{k-\tau-i-1} B u(i). \end{aligned} \quad (3)$$

将式 (2) 代入系统 (1), 并假设

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k), \quad (4)$$

其中 \tilde{C} 为适当维数的常量矩阵. 得到系统的另一种表达形式为

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{A}_1\phi(k) + \tilde{B}u(k),$$

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k). \quad (5)$$

其中: $\tilde{A} = A + A^{-h}A_1$, $\tilde{A}_1 = -A^{-h}A_1$, $\tilde{B} = A^{-\tau}B$. 如果将 $\phi(k)$ 看作系统 (5) 的虚拟扰动项, 则系统 (5) 在形式上是无时滞的.

假设系统 (5) 的参考输入 \bar{y} 可描述为

$$\begin{cases} z(k+1) = Fz(k), \\ \bar{y}(k) = Hz(k). \end{cases} \quad (6)$$

其中: $z \in \mathbf{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbf{R}^m$, F 和 H 分别为适当维的常量矩阵. 跟踪误差为

$$e(k) = \bar{y}(k) - \tilde{y}(k). \quad (7)$$

本文的目的是找到一个最优跟踪控制律 $u^*(k)$, 使二次性能指标

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}e^T(N)Q_Ne(N) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [e^T(k)Qe(k) + u^T(k)Ru(k)] \end{aligned} \quad (8)$$

在满足动态约束 (5)~(7) 的前提下取得最小值, 其中 Q 、 $Q_N \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $R \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 均为正定矩阵.

2 最优跟踪控制律的设计

首先, 整理二次性能指标 J , 将式 (5)~(7) 代入 (8), 得到

$$\begin{aligned} J &= \\ &\quad \frac{1}{2}z^T(N)H^TQ_NHz(N) - z^T(N)H^TQ_N\tilde{C}\tilde{x}(N) + \\ &\quad \frac{1}{2}\tilde{x}^T(N)\tilde{C}^TQ_N\tilde{C}\tilde{x}(N) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [z^T(k)H^TQ_NHz(k) - \\ &\quad 2z^T(k)H^TQ_N\tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{x}^T(k)\tilde{C}^TQ_N\tilde{C}\tilde{x}(k) + \\ &\quad u^T(k)Ru(k)]. \end{aligned} \quad (9)$$

根据离散时间系统最优控制理论, 结合性能指标 (9), 可得到最优跟踪控制律为

$$u(k) = -R^{-1}\tilde{B}^T\lambda(k+1). \quad (10)$$

其中 $\lambda(k+1)$ 为如下两点边值问题的解:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{A}_1\phi(k) - \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T\lambda(k+1), \\ \lambda(k) &= \tilde{C}^TQ\tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{C}^TQHHz(k) + \tilde{A}^T\lambda(k+1), \\ \lambda(N) &= \tilde{C}^TQ_N\tilde{C}\tilde{x}(N) - \tilde{C}Q_NHz(N), \\ \tilde{x}(k) &= \alpha(k), \quad k = -h, -h+1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (11)$$

注意到, 两点边值问题 (11) 中含有伴随向量的超前项 $\lambda(k+1)$, 而 $\phi(k)$ 本质上是由原系统 (1) 中的时滞部分转化得到的. 欲求解两点边值问题 (11) 的解析解十分困难, 所以利用逐次逼近的方法解决两点边值问题 (11), 进而得到最优跟踪控制律.

引理 1^[15] 下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^k i^j \leq \frac{(k+1)^{j+1}}{j+1},$$

$$j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

引理 2 考虑离散时间系统

$$\tilde{x}(k+1) = G(k+1)\tilde{x}(k) - T_1(k+1)z(k) - T_2(k+1)g(k) + T_3(k+1)\phi(k),$$

$$k = 0, 1, \dots, \tilde{x}(0) = \tilde{a}_0. \quad (13)$$

其中: $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量; $G(k)$ 、 $T_1(k)$ 、 $T_2(k)$ 、 $T_3(k)$ 为已知时变矩阵, \tilde{a}_0 为已知初始向量; $z(k) \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$z(k+1) = Fz(k), z(0) = z_0, \quad (14)$$

z_0 为已知初始向量; $g(k)$ 为 $\phi(k)$ 的函数向量, $g(k)$ 和 $\phi(k)$ 满足

$$\|g(\phi(k))\| \leq \alpha\|\phi(k)\|,$$

$$\|g(v(k)) - g(w(k))\| \leq \beta\|v(k) - w(k)\|; \quad (15)$$

$\phi(k)$ 为 $x(k)$ 的函数向量, $\phi(k)$ 满足

$$\|\phi(x(k))\| \leq \gamma\|x(k)\|,$$

$$\|\phi(v(k)) - \phi(w(k))\| \leq \mu\|v(k) - w(k)\|, \quad (16)$$

α 、 β 、 γ 和 μ 为正常数.

定义函数向量序列 $\{\tilde{x}^{[j]}(k)\}$ 为

$$\tilde{x}^{[0]}(k) = \prod_{m=0}^k G(k-m)\tilde{a}_0 - \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_1(i)F^{i-1}z_0,$$

$$\tilde{x}^{[j]}(k) = \prod_{m=0}^k G(k-m)\tilde{a}_0 - \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_1(i)F^{i-1}z_0 - \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_2(i)g^{[j-1]}(i-1) + \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_3(i)\phi^{[j-1]}(i-1),$$

$$\tilde{x}^{[j]}(0) = \tilde{a}_0, z(0) = z_0, j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

其中: $G(0) = I, \prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) = I, I$ 为单位阵. 假设 $\phi^{[0]}(i)$ 满足

$$\|\phi^{[0]}(i)\| \leq \eta, i = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

则序列 $\{\tilde{x}^{[j]}(k)\}$ 一致收敛于方程 (13) 的解.

证明 由式 (17) 可推导出

$$\tilde{x}^{[1]}(k) - \tilde{x}^{[0]}(k) = - \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_2(i)g_{j-1}(i-1) + \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_3(i)\phi_{j-1}(i-1). \quad (19)$$

令

$$\bar{b} = \sup_{k \in [0, N]} \left\{ \left\| \prod_{m=1}^{k-i-1} G(k-m) \right\|, i = 0, 1, \dots, k-j \right\},$$

$$b = \max\{1, \bar{b}\},$$

$$t_2 = \sup_{k \in [-h, 0]} \|T_2\|,$$

$$t_3 = \sup_{k \in [-h, 0]} \|T_3\|. \quad (20)$$

由式 (15) ~ (17) 可得

$$\|\tilde{x}^{[1]}(k) - \tilde{x}^{[0]}(k)\| \leq bt_2 \left\| \sum_{i=1}^k g_0(i-1) \right\| + bt_3 \left\| \sum_{i=1}^k \phi_0(i-1) \right\| \leq bt_2\alpha \left\| \sum_{i=1}^k \phi_0(i-1) \right\| + bt_3 \left\| \sum_{i=1}^k \phi_0(i-1) \right\| \leq b(t_2\alpha + t_3)k\eta, k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

同理有

$$\tilde{x}^{[2]}(k) - \tilde{x}^{[1]}(k) = - \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_2(i)[g_1(i-1) - g_0(i-1)] + \sum_{i=1}^k \left[\prod_{m=0}^{k-i-1} G(k-m) \right] T_3(i)[\phi_1(i-1) - \phi_0(i-1)]. \quad (22)$$

进而有

$$\|\tilde{x}^{[2]}(k) - \tilde{x}^{[1]}(k)\| \leq bt_2 \sum_{i=1}^k \|g_1(i-1) - g_0(i-1)\| + bt_3 \sum_{i=1}^k \|\phi_1(i-1) - \phi_0(i-1)\| \leq b(t_2\alpha + t_3) \sum_{i=1}^k \|\phi_1(i-1) - \phi_0(i-1)\| \leq b(t_2\alpha + t_3)\gamma \sum_{i=1}^k \|\tilde{x}_1(i-1) - \tilde{x}_0(i-1)\| \leq b(t_2\alpha + t_3)\gamma \sum_{i=1}^k b(t_2\alpha + t_3)i\eta \leq b^2(t_2\alpha + t_3)^2\gamma\eta \frac{k^2}{2!}. \quad (23)$$

由引理 1, 利用数学归纳法, 得到

$$\begin{aligned} & \|\tilde{x}^{[j]}(k) - \tilde{x}^{[j-1]}(k)\| \leq \\ & b(t_2\alpha + t_3)\gamma \sum_{i=1}^k \|\tilde{x}_j(i-1) - \tilde{x}_{j-1}(i-1)\| \leq \\ & b^j(t_2\alpha + t_3)^j \gamma^{j-1} \eta \frac{k^j}{j!}, \\ & k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

由三角不等式可知, 对于任意正整数 γ , 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{x}^{[j+r]}(k) - \tilde{x}^{[j]}(k)\| \leq \\ & \eta \sum_{i=j}^{j+r-1} b^i(t_2\alpha + t_3)^i \gamma^{i-1} \frac{k^i}{i!} \leq \\ & \frac{\eta b^j(t_2\alpha + t_3)^j \gamma^{j-1} k^j}{j!} \exp[b(t_2\alpha + t_3)\gamma k], \\ & k = 0, 1, \dots, N, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

不等式 (25) 意味着

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{x}^{[j+r]}(k) - \tilde{x}^{[j]}(k)\| = 0, \quad \forall r > 0, \quad (26)$$

可见, $\{\tilde{x}^{[j]}(k)\}$ 是一个 Cauchy 序列. 此序列一定收敛, 且其上限是方程 (13) 的解. \square

定理 1 考虑如方程 (5)~(8) 描述的最优跟踪控制问题, 最优跟踪控制律是存在且唯一的. 最优跟踪控制律为

$$\begin{aligned} u^*(k) = & -R^{-1}\tilde{B}^T T(k)[P_1(k+1)\tilde{A}\tilde{x}(k) + \\ & P_2(k+1)Fz(k) + P_1(k+1)\tilde{A}_1 \lim_{j \rightarrow \infty} \phi^{[j]}(k) + \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} g^{[j]}(k+1)]. \end{aligned} \quad (27)$$

$P_1(k)$ 为如下离散 Riccati 矩阵方程的唯一半正定解:

$$\begin{aligned} P_1(k) &= \tilde{C}^T Q \tilde{C} + \tilde{A}^T T(k) P_1(k+1) \tilde{A}, \\ P_1(N) &= \tilde{C}^T Q_N \tilde{C}. \end{aligned} \quad (28)$$

$P_2(k)$ 为如下离散 Stein 矩阵方程的唯一解:

$$\begin{aligned} P_2(k) &= \tilde{C}^T Q H + \tilde{A}^T T(k) P_2(k+1) F, \\ P_2(N) &= -\tilde{C} Q_N H. \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi^{[j]}(k) &= \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-h-i-1} A_1 [\tilde{x}^{[j]}(i) - \phi^{[j]}(i)] + \\ & \sum_{i=k-\tau}^{k-1} A^{k-\tau-i-1} B u^{[j]}(i), \\ \phi^{[-1]}(k) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

$g^{[j]}(k)$ 为如下伴随向量差分方程的解:

$$g^{[-1]}(k) = 0;$$

$$\begin{aligned} g^{[j]}(k) &= \\ & \tilde{A}^T T(k) P_1(k+1) \tilde{A}_1 \phi^{[j]}(k) + \tilde{A}^T T(k) g^{[j]}(k+1), \\ & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ g^{[j]}(N) &= 0, j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} T(k) &= (I + P_1(k+1)S)^{-1}, S = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T, \\ \lambda^{[j]}(k) &= P_1(k)\tilde{x}^{[j]}(k) + P_2(k)z(k) + g^{[j-1]}(k). \end{aligned} \quad (32)$$

$\tilde{x}^{[j]}(k)$ 为如下状态向量差分方程的解:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{[j]}(k+1) &= \\ & [I - ST(k)P_1(k+1)]\tilde{A}\tilde{x}^{[j]}(k) - \\ & ST(k)P_2(k+1)Fz(k) + \\ & [I - T(k)P_1(k+1)]\tilde{A}_1\phi^{[j-1]}(k) - \\ & ST(k)g^{[j-1]}(k+1), \\ & k = 0, 1, \dots; \\ \tilde{x}^{[j]}(0) &= \tilde{\alpha}_0, j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

证明 令

$$\lambda(k) = P_1(k)\tilde{x}(k) + P_2(k)z(k) + g(k). \quad (34)$$

根据两点边值问题 (11) 中的第 3 式, 令

$$\begin{aligned} P_1(N) &= \tilde{C}^T Q_N \tilde{C}, P_2(N) = -\tilde{C} Q_N H, \\ g(N) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

结合方程 (6) 和 (11) 求出

$$\begin{aligned} \lambda(k+1) &= \\ & T(k)P_1(k+1)\tilde{A}\tilde{x}(k) + T(k)P_1(k+1)\tilde{A}_1\phi(k) + \\ & T(k)P_2(k+1)Fz(k) + T(k)g(k+1). \end{aligned} \quad (36)$$

将式 (36) 代入方程 (11) 的第 2 式, 可以得到

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \\ & [\tilde{C}^T Q \tilde{C} + \tilde{A}^T T(k)P_1(k+1)\tilde{A}]\tilde{x}(k) + \\ & [\tilde{A}^T T(k)P_2(k+1)F + \tilde{C}^T Q H]z(k) + \\ & \tilde{A}^T T(k)P_1(k+1)\tilde{A}_1\phi(k) + \\ & \tilde{A}^T T(k)g(k+1), k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (37)$$

对比方程 (34) 和 (37), 利用方程 (35), 可以得到离散 Riccati 矩阵方程 (28)、离散 Stein 矩阵方程 (29) 和

$$\begin{aligned} g(k) &= \\ & \tilde{A}^T T(k)P_1(k+1)\tilde{A}_1\phi(k) + \tilde{A}^T T(k)g(k+1), \\ & k = 0, 1, \dots, N-1, g(N) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

根据最优控制理论, 存在唯一的半正定矩阵 P_1 满足方程 (28). 将 P_1 代入离散 Stein 矩阵方程 (29), 能唯一确定 P_2 . 因此, 最优控制律存在并唯一. 将方程 (36) 代

入等式 (10), 得到

$$u^*(k) = -R^{-1}\tilde{B}^T T(k)[P_1(k+1)\tilde{A}\tilde{x}(k) + P_2(k+1)Fz(k) + P_1(k+1)\tilde{A}_1\phi(k) + g(k+1)]. \quad (39)$$

下面求解伴随向量 $g(k)$ 和由时滞转化而来的向量 $\phi(k)$. 将方程 (39) 代入 (11) 得到

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) = & [I - ST(k)P_1(k+1)]\tilde{A}\tilde{x}(k) - \\ & ST(k)P_2(k+1)Fz(k) + [I - \\ & ST(k)P_1(k+1)]\tilde{A}_1\phi(k) - ST(k)g(k+1), \\ & k = 0, 1, \dots; \\ \tilde{x}(0) = & \tilde{\alpha}_0, j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (40)$$

在方程 (30) 中构造一个虚拟扰动向量 $\phi(k)$ 的差分方程序列, 在方程 (31) 中构造一个伴随向量 $g(k)$ 的差分方程序列, 在方程 (33) 中构造一个状态向量差分方程序列和如下控制向量序列:

$$u^{[j]}(k) = -R^{-1}\tilde{B}^T T(k)[P_1(k+1)\tilde{A}\tilde{x}^{[j]}(k) + P_2(k+1)Fz(k) + P_1(k+1)\tilde{A}_1\phi^{[j-1]}(k) + g^{[j-1]}(k+1)]. \quad (41)$$

注意到, 在方程 (33) 的第 j 次迭代中, $\phi^{[j-1]}(k)$ 和 $g^{[j-1]}(k+1)$ 均为已知的函数向量, 这是一个非齐次线性差分方程. 通过整理, 可以得到第 j 个状态向量 $\tilde{x}^{[j]}(k)$. 将 $\tilde{x}^{[j]}(k)$ 代入方程 (41) 可以得到第 j 个控制向量 $u^{[j]}(k)$. 将 $\tilde{x}^{[j]}(k)$ 和 $u^{[j]}(k)$ 代入方程 (30), 得到 $\phi^{[j]}(k)$. 将 $\phi^{[j]}(k)$ 代入方程 (31), 仍然是非齐次线性向量差分方程, 可以得到解 $g^{[j]}(k)$.

根据引理 2, $\{\tilde{x}^{[j]}(k)\}$ 、 $\{\phi^{[j]}(k)\}$ 和 $\{g^{[j]}(k)\}$ 一致收敛. 由于控制向量序列 $\{u^{[j]}(k)\}$ 只依赖于以上 3 个向量, 它也一致收敛. 当 j 趋近于无穷时, $\{u^{[j]}(k)\}$ 的极限 $u^*(k)$ 便是最优跟踪控制律. \square

综合以上最优跟踪控制器的设计过程, 给出计算第 j 阶最优跟踪控制律的算法步骤.

Step 1: 利用方程 (6) 得到 $\bar{y}(k)$. 解方程 (28) 和 (29), 分别得到 $P_1(k)$ 和 $P_2(k)$. 令 $j = 0$, 给出性能指标的迭代误差 $\sigma > 0$.

Step 2: 解方程 (33), 得到 $\tilde{x}^{[j]}(k)$. 将 $\tilde{x}^{[j]}(k)$ 代入方程 (41), 得到 $u^{[j]}(k)$.

Step 3: 将 $u^{[j]}(k)$ 代入方程 (5), 得到闭环系统. 利用方程 (30) 可得 $\phi^{[j]}(k)$, 解方程 (31) 得到 $g^{[j]}(k)$.

Step 4: 利用方程 (7) 得到 $e^{[j]}(k)$. 计算得

$$J_j = \frac{1}{2}e^{[j]T}(N)Q_N e^{[j]}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[e^{[j]T}(k)Q e^{[j]}(k) + u^{[j]T}(k)R u^{[j]}(k)]. \quad (42)$$

Step 5: 如果 $|(J_{j-1} - J_j)/J_j| < \sigma$, 则停止计算, 得到输出 $u^{[j]}(k)$, 否则, 令 $j = j + 1$, 继续 Step 2.

3 仿真示例

考虑由方程 (1)、(6) 和 (7) 所描述的系统

$$\begin{aligned} A = & \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.03 & 0.98 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ B = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.06 & 0.8 \end{bmatrix}, \\ H = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$Q = 4, Q_n = 1, R = 1. \quad (43)$$

给出系统的状态时滞 $h = 1$, 控制时滞 $\tau = 2$, 性能指标的迭代误差 $\sigma = 0.02$. 当 $|(J_M - J_{M-1})/J_M| < \sigma$ 时, 可以认为第 M 阶的次优跟踪律是最优输出跟踪律. 相应的二次型性能指标选取为

$$J = \frac{1}{2}e^2(50) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{49}[4e^2(k) + u^2(k)]. \quad (44)$$

系统输出 $\tilde{y}(k)$ 与参考输入 $\bar{y}(k)$ 的对比仿真曲线如图 1 所示. 误差 $e(k)$ 和最优输出跟踪控制变量 $u(k)$ 的仿真曲线如图 (2) 和图 (3) 所示. 各阶性能指标值 J_j 及其迭代误差 σ_j 如表 1 所示. 由表 1 可见, 性能指标值随迭代次数的增加而减小, 最终趋于平稳, 此时的稳定值即为最优性能指标 J_M . 当 $j = 6$ 时, 性能指标的相对误差小于给定值, 所以 $u_6(k)$ 可看作近似最优输出跟踪控制律.

表 1 性能指标值 J_j 及其迭代误差 σ_j

j	1	2	3	4	5	6
J	168.02	133.76	107.83	90.30	85.00	83.45
σ	—	0.204	0.194	0.165	0.059	0.018

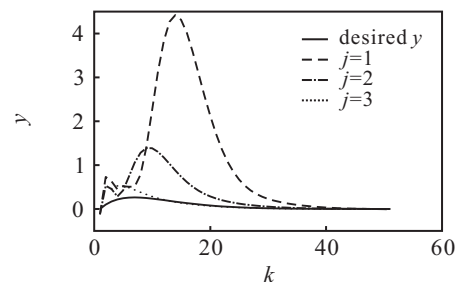
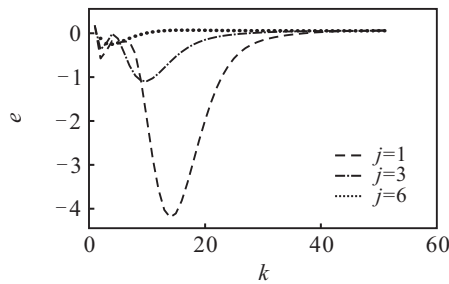
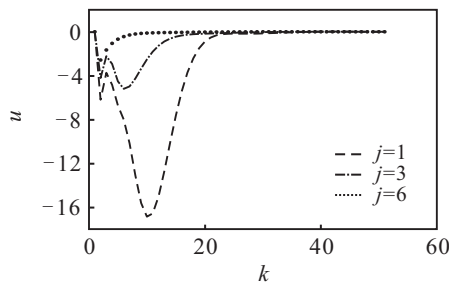


图 1 系统输出 $\tilde{y}(k)$ 与参考输入 $\bar{y}(k)$ 的对比仿真曲线

图2 系统误差 $e(k)$ 的仿真曲线图3 最优输出跟踪控制变量 $u(k)$ 的仿真曲线

4 结 论

本文研究了含有状态时滞和控制输入时滞的线性离散时间系统的最优跟踪控制问题,提出了一种无时滞转化策略,运用逐次逼近的方法求出最优控制律的近似解.仿真算例表明了所提出最优跟踪控制方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Zhu Y, Su H, Krstic M. Adaptive backstepping control of uncertain linear systems under unknown actuator delay[J]. Automatica, 2015, 54: 256-265.
- [2] Gao H, Chen T W. Network-based H output tracking control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(3): 655-667.
- [3] Mobayen S. An LMI-based robust tracker for uncertain linear systems with multiple time-varying delays using optimal composite nonlinear feedback technique[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 80(1/2): 917-927.
- [4] Majd V, Mobayen S. An ISM-based CNF tracking controller design for uncertain MIMO linear systems with multiple time-delays and external disturbances[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 80(1/2): 591-613.
- [5] Tang G Y, Fan M Q. Series-based approximate approach of optimal tracking control for nonlinear systems with time-

- delay[J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(12): 1571-1576.
- [6] Ma H, Tang G Y, Hu W. Feedforward and feedback optimal control with memory for offshore platforms under irregular wave forces[J]. J of Sound and Vibration, 2009, 328(4/5): 369-381.
- [7] Zhang H, Shi Y, Liu M X. H_∞ step tracking control for networked discrete-time nonlinear systems with integral and predictive actions[J]. IEEE Trans on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 337-345.
- [8] Zhang H G, Song R Z, Wei Q L, et al. Optimal tracking control for a class of nonlinear discrete-time systems with time delays based on heuristic dynamic programming[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2011, 22(12): 1851-1862.
- [9] Liu Y, Zhang H G, Luo Y H, et al. ADP based optimal tracking control for a class of linear discrete-time system with multiple delays[J]. J of the Franklin Institute, 2016, 353(9): 2117-2136.
- [10] Zhang B L, Liu Y J, Ma H, et al. Discrete feedforward and feedback optimal tracking control for offshore steel jacket platforms[J]. Ocean Engineering, 2014, 91: 371-378.
- [11] Han S Y, Wang D, Chen Y H, et al. Optimal tracking control for discrete-time systems with multiple input delays under sinusoidal disturbances[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2015, 13(2): 292-301.
- [12] Tang G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: A successive approximation approach[J]. Systems & Control Letters, 2005, 54(5): 429-434.
- [13] Tang G Y, Wang H H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems[J]. Int J of Systems Science, 2005, 36(3): 153-161.
- [14] 周珊珊,董瑞,唐功友.离散时滞系统的最优滑模控制[J].控制与决策,2010,25(2):299-302.
(Zhou S S, Dong R, Tang G Y. Optimal sliding mode control for discrete-time systems with time-delay[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 299-302.)
- [15] Wang H H, Tang G Y. Observer-based optimal output tracking for discrete-time Systems with multiple state and input delays[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2009, 7(1): 57-66.

(责任编辑:郑晓蕾)