

文章编号: 1001-0920(2017)01-0167-04

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0089

关于变周期采样系统稳定性分析的新 Lyapunov 泛函方法

邵汉永[†], 赵建荣, 张 丹

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 曲阜师范大学 工学院, 山东 日照 276826)

摘要: 采用一种新的 Lyapunov 泛函, 分析变周期采样系统的渐近稳定性. 通过引入状态积分以及该积分与采样状态的交叉项, 构造一个 Lyapunov 泛函, 利用最新报道的改进的 Jensen 不等式估计该 Lyapunov 泛函的导数, 导出变周期采样系统的渐近稳定性结果. 仿真结果表明, 所给出的稳定性结果具有较小的保守性.

关键词: 渐近稳定; 采样系统; 线性矩阵不等式; Lyapunov 泛函

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Lyapunov functional approach to stability of sampled-data systems under aperiodic sampling

SHAO Han-yong[†], ZHAO Jian-rong, ZHANG Dan

(1. The Research Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. College of Engineering, Qufu Normal University, Rizhao 276826, China)

Abstract: A new Lyapunov functional is used to analyze the asymptotic stability of sampled-data systems under aperiodic sampling. A Lyapunov functional is constructed by introducing the integral of the state and the cross term of this integral and the sampling state. The improved Jensen inequality reported recently is used to estimate the derivative of the Lyapunov functional. A new asymptotic stability result is obtained for the sampled-data systems under aperiodic sampling. The simulation results show that the proposed result has less conservatism than some existing ones.

Keywords: asymptotic stability; sampled-data systems; linear matrix inequalities; Lyapunov functional

0 引 言

基于采样系统在数字控制系统及网络控制系统中的重要应用, 采样系统的研究在近几十年得到了广泛关注^[1-4]. 由于采样系统的稳定是其正常工作的前提, 研究采样系统的稳定性具有重要的理论和实际意义. 采样系统稳定性的分析主要有以下几种方法: 1) 离散系统方法^[5], 该方法将采样系统转化为离散系统, 利用离散 Lyapunov 理论进行稳定性分析; 2) 脉冲系统方法^[6], 该方法将采样系统转化为脉冲系统, 再利用 Lyapunov 理论进行稳定性分析; 3) 输入延迟方法^[7-8], 该方法将采样系统转化为带有时变延迟的连续系统, 运用分析时滞系统稳定性的方法进行稳定性分析; 4) 类 Lyapunov 泛函方法^[9-10], 该方法只要求 Lyapunov 泛函在采样时刻正定, 并不要求 Lyapunov 泛函在采样时刻连续, 所得稳定性结果保

守性较小. 文献 [11] 基于离散系统理论研究了变周期采样系统的稳定性, 给出了新的稳定性结果; 在文献 [11] 的基础上, 文献 [12] 提出了改进的 Jensen 不等式并对 Lyapunov 泛函的导数进行估计, 得到了保守性更小的结果.

注意到, 文献 [9, 11-12] 中的 Lyapunov 泛函没有利用状态积分, 由此导出的稳定性结果还有改进的余地. 本文采用一种新的 Lyapunov 泛函分析变周期采样系统的渐近稳定性. 首先, 引入状态积分以及该积分与采样状态的交叉项, 构造出一个新的 Lyapunov 泛函, 该 Lyapunov 泛函只要求在采样时刻正定; 然后, 利用最新提出的改进 Jensen 不等式估计该 Lyapunov 泛函的导数, 从而导出变周期采样系统的渐近稳定性结果, 该稳定性结果可推广到多面体不确定变周期采样系统.

收稿日期: 2016-01-20; 修回日期: 2016-05-12.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61374090); 山东省高等院校科研创新团队项目; 山东省泰山学者人才工程项目.

作者简介: 邵汉永(1964—), 男, 教授, 博士, 从事采样系统、时滞系统、神经网络系统、鲁棒控制及其应用等研究; 赵建荣(1990—), 男, 硕士生, 从事采样系统的研究.

[†]通信作者. E-mail: hanyongshao@163.com

在本文中, X^T 和 X^{-1} 分别表示矩阵 X 的转置和逆; 对称矩阵中的“*”表示矩阵中的对称项; 对称矩阵 $X > 0$ (< 0) 表示矩阵 X 是正定的(负定的); 矩阵 I 表示适当维数的单位阵; $|\cdot|$ 表示 n 维欧几里德向量范数; 集合 \mathbf{R}^n , $\mathbf{R}^{n \times m}$, \mathbf{N} 分别表示 n 维向量、 $n \times m$ 维矩阵、自然数集; $\lambda_{\min}(\cdot)$ ($\lambda_{\max}(\cdot)$) 表示矩阵的最小(最大)特征值; 对于任意的矩阵 A , $\text{He}(A)$ 表示 $A + A^T$.

1 问题描述

考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (1)$$

其中: $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为已知的实常数矩阵; $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态; $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 为采样控制输入, 满足形式 $u(t) = u_d(t_k)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, 采样时刻 t_k ($k \in \mathbf{N}$) 满足 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$, 且有

$$0 \leq \underline{h} \leq t_{k+1} - t_k = h_k \leq \bar{h}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (2)$$

其中 \underline{h} 和 \bar{h} 为已知常数.

采用如下形式的状态反馈控制器:

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},$$

其中 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为控制增益.

系统(1)可转化为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (3)$$

其中 $A_1 = BK$.

本文的目的是对于给定的控制增益 K , 分析采样系统(3)的稳定性, 给出渐近稳定性结果. 为此, 给出如下引理.

引理 1 对于采样系统(3), 假设存在正数 c_1, c_2 及 Lyapunov 泛函 $V(x(t), t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, 满足如下不等式:

$$c_1 |x(t_k)|^2 \leq V(x(t_k), t_k) \leq c_2 |x(t_k)|^2, \quad (4)$$

$$V(x(t_k), t_k) \leq \lim_{t \rightarrow t_k} V(x(t), t). \quad (5)$$

$V(x(t), t)$ 沿着采样系统(3)关于时间 t 的导数满足下式:

$$\dot{V}(x(t), t) \triangleq \frac{dV(x(t), t)}{dt} < 0, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (6)$$

即采样系统(3)是渐近稳定的.

证明过程类似于文献[9]中引理1的证明, 此处省略.

注 1 引理 1 只要求 Lyapunov 泛函 $V(x(t), t)$ 在采样时刻正定, 并不要求其在采样时刻连续. 另外, 文献[9]中引理 1 给出的是带有状态量化的定常周期采样系统的指数稳定性判据, 本文引理 1 给出的是变周期采样系统的渐近稳定性判据.

引理 2^[12](改进的 Jensen 不等式) 对于给定的矩阵 $R > 0$, 对所有在 $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 上连续可微的函数 ω ,

如下不等式成立:

$$\int_a^b \dot{\omega}^T(u) R \dot{\omega}(u) du \geq \frac{1}{b-a} \Omega^T R \Omega + \frac{3}{b-a} \tilde{\Omega}^T R \tilde{\Omega}.$$

其中

$$\tilde{\Omega} = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(u) du,$$

$$\Omega = \omega(b) - \omega(a).$$

2 主要结果

为了分析采样系统(3)的稳定性, 采用如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$V(x(t), t) = V_1(x(t)) + V_2(x(t), t) + V_3(x(t), t). \quad (7)$$

其中

$$V_1(x(t)) = x^T(t) P x(t),$$

$$V_2(x(t), t) =$$

$$2(t_{k+1} - t)(x^T(t) X - x^T(t_k) X_1^T)(x(t) - x(t_k)) +$$

$$(t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) Q \dot{x}(s) ds,$$

$$V_3(x(t), t) =$$

$$(t_{k+1} - t) \left(\int_{t_k}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + 2 \left(\int_{t_k}^t x(s) ds \right)^T \times \right.$$

$$\left. M x(t_k) + (t - t_k) x^T(t_k) Q_2 x(t_k) \right),$$

$$t_k \leq t < t_{k+1}.$$

注 2 由 $V_3(x(t), t)$ 定义可知, 与文献[9,11-12]等相关文献相比, 本文构造的 Lyapunov 泛函(7)增加了状态的积分 $\int_{t_k}^t x(s) ds$ 以及该积分与采样状态 $x(t_k)$ 的交叉项, 更多地利用了采样系统(3)的信息, 有望导出保守性较小的稳定性结果.

运用 Lyapunov 泛函(7)分析采样系统(3)的稳定性, 可得到如下定理, Lyapunov 泛函(7)中各矩阵的定义详见该定理.

定理 1 对于给定的 $\bar{h} \geq \underline{h} \geq 0$, 如果存在对称矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 以及矩阵 M , $X, X_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $N_j \in \mathbf{R}^{3n \times n}$ ($j = 1, 2, 3$), 使得当 $h \in \{\underline{h}, \bar{h}\}$ 时, 如下矩阵不等式成立:

$$\Omega_0 + h\Omega_2 + h e_2^T Q_2 e_2 < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_0 + h\Omega_1 - h e_2^T Q_2 e_2 & hN_1 & 3hN_2 \\ * & -hQ & 0 \\ * & * & -3hQ \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

其中

$$\Omega_0 = \text{He}(e_1^T P M_{11} - N_1 e_{12} - N_3 e_{12} - 3N_2 e_{123}) -$$

$$\text{He}(e_1^T (X e_1 - (X + X_1) e_2) + e_2^T X_1 e_2),$$

$$\Omega_1 = \text{He}(N_3 A e_3 + N_3 A_1 e_2 - e_3^T M e_2) - e_3^T Q_1 e_3,$$

$$\Omega_2 = \text{He}(M_{11}^T X e_{12} + (e_1^T X - e_2^T X_1^T) M_{11}) +$$

$$M_{11}^T Q M_{11} + \text{He}(e_1^T M e_2) + e_1^T Q_1 e_1,$$

$$e_1 = [I \ 0 \ 0], \quad e_2 = [0 \ I \ 0], \quad e_3 = [0 \ 0 \ I],$$

$$e_{12} = e_1 - e_2, \quad e_{123} = e_1 + e_2 - 2e_3,$$

$$M_{11} = Ae_1 + A_1e_2.$$

则采样系统 (3) 是渐近稳定的.

证明 显然, 由 Lyapunov 泛函 (7) 的定义可知, Lyapunov 泛函 (7) 满足引理 1 的条件 (4) 和 (5).

下面证明 Lyapunov 泛函 (7) 满足引理 1 的条件 (6). 首先, 定义变量

$$\nu_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-t_k} \int_{t_k}^t x(s)ds, & t \in (t_k, t_{k+1}); \\ x(t_k), & t = t_k. \end{cases}$$

$$\xi(t) = [x^T(t) \ x^T(t_k) \ \nu_1^T(t)]^T, \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

当 $t_k \leq t < t_{k+1}$ ($k \in \mathbf{N}$) 时, Lyapunov 泛函 (7) 沿着采样系统 (3) 关于时间 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) = \\ \dot{V}_1(x(t)) + \dot{V}_2(x(t), t) + \dot{V}_3(x(t), t). \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\dot{V}_1(x(t)) = \xi^T(t)(e_1^T P M_{11} + M_{11}^T P e_1)\xi(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x(t), t) = \\ -2\xi^T(t)(e_1^T X - e_2^T X_1^T)e_{12}\xi(t) + (t_{k+1} - \\ t)\xi^T(t)(\text{He}(M_{11}^T X e_{12} + (e_1^T X - e_2^T X_1^T)M_{11}) + \\ M_{11}^T Q M_{11})\xi(t) - \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x(t), t) = \\ (t_{k+1} - t)x^T(t)Q_1x(t) + \\ (t_{k+1} - t)\xi^T(t)(\text{He}(e_1^T M e_2) + \\ e_2^T Q_2 e_2)\xi(t) - (t - t_k)\xi^T(t)(\text{He}(e_3^T M e_2) + \\ e_2^T Q_2 e_2)\xi(t) - \int_{t_k}^t x^T(s)Q_1x(s)ds. \end{aligned}$$

由引理 2 可得

$$- \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)ds \leq - \frac{1}{(t-t_k)}\xi^T(t)(e_{12}^T Q e_{12} + 3e_{123}^T Q e_{123})\xi(t). \quad (11)$$

另外, 由文献 [12] 可知, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbf{R}^{3n \times n}$ 使得如下不等式成立:

$$- \frac{1}{(t-t_k)}e_{12}^T Q e_{12} \leq (t-t_k)N_1Q^{-1}N_1^T - N_1e_{12} - e_{12}^T N_1^T, \quad (12)$$

$$- \frac{3}{(t-t_k)}e_{123}^T Q e_{123} \leq 3(t-t_k)N_2Q^{-1}N_2^T - 3N_2e_{123} - 3e_{123}^T N_2^T. \quad (13)$$

对采样系统 (3) 两边在 $[t_k, t)$ 上积分, 可得

$$x(t) - x(t_k) = A \int_{t_k}^t x(s)ds + (t-t_k)A_1x(t_k). \quad (14)$$

于是, 存在 $N_3 \in \mathbf{R}^{3n \times n}$ 使得如下等式成立:

$$\begin{aligned} 0 = -2\xi^T(t)N_3(x(t) - x(t_k)) + \\ 2(t-t_k)\xi^T(t)N_3(A\nu_1(t) + A_1x(t_k)). \end{aligned} \quad (15)$$

由 Jensen 不等式^[13]可得

$$- \int_{t_k}^t x^T(s)Q_1x(s)ds \leq -(t-t_k)\nu_1^T(t)Q_1\nu_1(t). \quad (16)$$

综合式 (10)~(16), 可得

$$\dot{V}(x(t), t) \leq \xi^T(t)W(t)\xi(t), \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} W(t) = \\ \Omega_0 + (t-t_k)(\Omega_1 - e_2^T Q_2 e_2) + (t-t_k)(N_1Q^{-1}N_1^T + \\ 3N_2Q^{-1}N_2^T) + (t_{k+1} - t)(\Omega_2 + e_2^T Q_2 e_2). \end{aligned} \quad (18)$$

由条件 (8) 和 (9) 以及 Schur 补引理可知, 对于 $h \in \{h, \bar{h}\}$, 下面的不等式成立:

$$\begin{aligned} \Omega_0 + h\Omega_1 - he_2^T Q_2 e_2 + hN_1Q^{-1}N_1^T + \\ 3hN_2Q^{-1}N_2^T < 0, \\ \Omega_0 + h\Omega_2 + he_2^T Q_2 e_2 < 0. \end{aligned}$$

考虑到 $\Omega_0 + h_k\Omega_1 - h_k e_2^T Q_2 e_2 + h_k N_1 Q^{-1} N_1^T + 3h_k N_2 Q^{-1} N_2^T$ 和 $\Omega_0 + h_k\Omega_2 + h_k e_2^T Q_2 e_2$ 关于 h_k 的线性性质, 对于 $h_k \in [h, \bar{h}]$, 有

$$\begin{aligned} \Omega_0 + h_k\Omega_1 - h_k e_2^T Q_2 e_2 + h_k N_1 Q^{-1} N_1^T + \\ 3h_k N_2 Q^{-1} N_2^T < 0, \\ \Omega_0 + h_k\Omega_2 + h_k e_2^T Q_2 e_2 < 0. \end{aligned}$$

由 $W(t)$ 的定义可知

$$W(t_k) < 0, \quad W(t_{k+1}) < 0.$$

考虑到 $W(t)$ 关于 t 的线性性质, 对于 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 有

$$W(t) < 0.$$

由式 (17) 和 (18) 可得

$$\dot{V}(x(t), t) \leq \xi^T(t)W(t)\xi(t) < 0.$$

至此, Lyapunov 泛函 (7) 满足引理 1 的所有条件. 所以, 采样系统 (3) 是渐近稳定的. \square

注 3 由定理 1 可知, Lyapunov 泛函 (7) 只要在采样时刻正定, 通过它分析采样系统 (3) 的稳定性可以导出保守性小的稳定性结果. 另外, 在估计 Lyapunov 泛函 (7) 的导数时, 一方面利用采样系统 (3) 的积分方程 (14) 引入状态积分 $\int_{t_k}^t x(s)ds$; 另一方面利用改进的 Jensen 不等式予以估计, 可以得到较小的上界, 由此可导出改进的稳定性结果.

注 4 定理 1 通过适当的变换可以推广到多面体不确定变周期采样系统.

3 数值仿真

下面给出两个数值实例, 说明本文给出的稳定性

结果具有较小的保守性.

例 1 考虑采样系统 (3), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.375 & -1.15 \end{bmatrix}.$$

当 $h = 0$ 时, 运用 Matlab 中的 LMI 工具箱, 根据本文定理 1 和文献 [2-4, 7-8, 11] 中的稳定性结果可得变周期采样区间的上界 \bar{h} , 详见表 1.

表 1 例 1 中变周期采样区间的上界 \bar{h}

方法	文献 [8]	文献 [7]	文献 [3]	文献 [11]	文献 [4]	文献 [2]	本文定理 1
\bar{h}	1.36	1.69	1.72	1.721 6	1.708	1.723 2	1.729

从表 1 可见, 与文献 [2-4, 7-8, 11] 中的稳定性结果相比, 由本文定理 1 得到的变周期采样区间的上界 \bar{h} 较大, 由此可知, 本文定理 1 给出的稳定性结果与文献 [2-4, 7-8, 11] 相比, 具有较小的保守性.

为了进一步说明本文所得稳定性结果比文献 [10-12] 中稳定性结果的保守性小, 引出如下算例.

例 2 考虑采样系统 (3), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.6 & 0.1 \\ -3 & -2 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.4 \\ -1 & 1 & 0.05 \\ 0.5 & 0.05 & -0.9 \end{bmatrix}.$$

当 $h = 10^{-2}$ 时, 运用 Matlab 中的 LMI 工具箱, 根据本文定理 1 和文献 [3-4, 10-12] 中的稳定性结果, 可得变周期采样区间的上界 \bar{h} , 详见表 2.

表 2 例 2 中变周期采样区间的上界 \bar{h}

方法	文献 [4]	文献 [3]	文献 [11]	文献 [12]	文献 [10]	本文定理 1
\bar{h}	1.009	2.008	2.009	2.338	2.138	2.669

从表 2 可见, 与文献 [3-4, 10-12] 中的稳定性结果相比, 通过本文定理 1 得到的 \bar{h} 较大, 说明本文定理 1 比文献 [3-4, 11-12] 中的稳定性结果的保守性小.

4 结 论

本文采用一种新的 Lyapunov 泛函分析了变周期采样系统的渐近稳定性. 首先, 引入状态积分以及该积分与采样状态的交叉项, 得到了一个新的 Lyapunov 泛函; 然后, 利用改进 Jensen 不等式估计该 Lyapunov 泛函的导数, 以得到较小上界, 从而导出了变周期采样系统渐近稳定性结果; 最后, 举例说明了本文得到的稳定性结果具有较小的保守性. 变周期采样系统的镇定是下一步将要研究的问题.

参考文献(References)

[1] 刘于之, 李木国, 杜海. 具有时延和丢包的 NCS 鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 517-522.

(Liu Y Z, Li M G, Du H. Robust H_∞ control of NCS with delay and packet dropout[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 517-522.)

- [2] Zhu X L, Yue D. Stability of sampled-data systems with application to networked control systems[C]. Proc of the 32nd Chinese Control Conf. Xi'an: IEEE, 2013: 6572-6577.
- [3] Zhang C K, Jiang L, He Y, et al. Stability analysis for control systems with aperiodically sampled data using an augmented Lyapunov functional method[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(9): 1219-1226.
- [4] Seuret A, Briat C, Gouaisbaut F. Stability analysis of asynchronous sampled-data systems with discrete-time constant input delay[C]. Proc of the 53rd IEEE Conf on Decision and Control. Los Angeles: IEEE, 2014: 4342-4347.
- [5] Fujioka H. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(10): 2440-2445.
- [6] Naghshtabrizi P, Hespanha J P, Teel A R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(5): 378-385.
- [7] Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control[J]. Automatica, 2010, 46(2): 421-427.
- [8] Liu K, Fridman E. Wirtinger's inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization[J]. Automatica, 2012, 48(1): 102-108.
- [9] Shao H Y, Han Q L, Zhang Z Q, et al. Sampling-interval-dependent stability for sampled-data systems with state quantization[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2014, 24(17): 2995-3008.
- [10] Shao H Y, Lam J, Feng Z G. Sampling-interval-dependent stability for linear sampled-data systems with non-uniform sampling[J]. Int J of Systems Science, 2016, 47(12): 2893-2900.
- [11] Seuret A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings[J]. Automatica, 2012, 48(1): 177-182.
- [12] Seuret A, Gouaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [13] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney: IEEE, 2000: 2805-2810.

(责任编辑: 闫 妍)