

文章编号: 1001-0920(2017)01-0176-05

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1233

振荡序列的分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型及其应用

王俊芳[†], 罗 党

(华北水利水电大学 数学与信息科学学院, 郑州 450046)

摘 要: 针对 GM(1, 1) 幂模型从离散的参数估计到连续的预测函数所产生的固有误差, 提出一种新的分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型, 并针对可能存在的病态性, 利用正则化算法替代最小二乘法估计部分参数以提高参数估计的精度; 为了提高模型的预测精度, 提出新的累加阶数及幂参数的确定方法. 对工业废水排放率及城市用水量两个实例的预测结果表明, 所提出的模型及确定参数的方法对于振荡时间序列有着很好的预测精度.

关键词: 离散 GM(1, 1) 幂模型; 分数阶灰色模型; 正则化; 病态模型; 振荡序列

中图分类号: N945.1

文献标志码: A

Fractional order discrete grey GM(1, 1) power model based on oscillation sequences and its application

WANG Jun-fang[†], LUO Dang

(School of Mathematics and Information Science, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: To overcome the system errors of the grey GM(1, 1) power model, in which the parameters estimation is discrete and the forecast function is continuous, a new fractional order grey discrete GM(1, 1) power model is constructed, and the method of regularization is used in stead of the least square method in some parameters' estimation because of the problem of ill-condition to improve the accuracy of parameters estimation. A new method is proposed to determine the optimization values of accumulation order and power exponential so as to increase the forecast precision. The tests on the forecast of industrial waste emissions rate and urban water consumption show that the proposed model and the methods of parameters estimation have higher forecast accuracy in oscillation sequences.

Keywords: discrete GM(1, 1) power model; fractional order grey model; regularization; ill-condition model; oscillation sequences

0 引 言

自邓聚龙教授^[1]针对“小样本、贫信息”的灰色序列提出灰色系统以来, 其应用范围越来越广泛, 涉及工业、农业、水文、环境、管理、军事等各个领域^[2]; GM(1, 1) 模型作为一个最基础且应用范围较广的模型, 是针对单变量通过合适的累加算子来弱化序列的随机性, 从而寻找变化规律, 并以此规律为基础建立时间序列的预测模型.

作为灰色 GM(1, 1) 模型的推广, Verhulst 模型针对“S”型序列有着更高的建模精度, 它对单调序列建模效果较好, 但是对于振荡序列并不能直接应用. 大多数文献着重于数据处理方面, 例如对原始数据采取

反三角变换、平移变换、指数变换、几何平均变换等. 钱吴永等^[3]提出了加速平移变换, 变序列为单调序列, 再经过均值生成建立灰色模型; 杨芬^[4]提出了正数化平移变换和加权几何平均变换, 弱化了随机性, 建立了加权几何平均 DGM(1, 1) 模型. GM(1, 1) 幂模型作为传统的 GM(1, 1) 模型和 Verhulst 模型的推广, 由于其取值灵活的幂参数使得它能更好地描述系统的非线性的本质, 针对振荡序列可以提高建模的精度, 但模型中的幂参数为非线性部分, 给参数估计带来一定的困难. 幂值的选取往往凭经验或者直接取为 2, 不利于幂模型的推广应用. 王正新等^[5]利用信息覆盖原理提出了幂指数白化公式, 解决了幂参数的确定问

收稿日期: 2015-10-09; 修回日期: 2016-02-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271086, 71571119); 国家自然科学基金青年基金项目(11501199); 河南省科技厅重点科技攻关项目(142102310123).

作者简介: 王俊芳(1979—), 女, 讲师, 硕士, 从事灰色系统理论与决策分析的研究; 罗党(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与决策分析等研究.

[†]通信作者. E-mail: wangjunfang@ncwu.edu.cn

题, 并讨论了不同的幂参数对模型解的极限性质的影响. 王正新^[6]又将 GM(1, 1) 幂模型添加了系统延迟参数和时变参数, 使得发展系数与灰作用量随时间变化, 提高了模型的适应能力. 为了提高幂模型对振荡序列的适应性, 王正新^[7]利用傅立叶级数提取残差序列规律, 构建了小样本振荡序列的灰色模型.

虽然人们对 GM(1, 1) 幂模型做了各种改进, 但始终不能克服灰色模型以离散形式估计参数, 而预测函数为连续形式所带来的误差. 谢乃明等^[8]提出的离散灰色预测模型, 直接用差分方程形式求解参数, 并用递推形式得到预测函数, 从而使拟合精度得到大幅提高. 近年来, 该模型得到了广泛的关注, 涌现了不少研究成果^[9-11]. 为了减少数据的随机性, 提高光滑度, 凸显蕴藏的规律, 需要对原始数据做累加运算. 研究表明: 累加的次数越多, 老数据参与运算的次数相对于新数据越多, 会使得新数据的变动对模型的影响低于老数据的变动所带来的影响, 这与新信息优先原理相违背; 并且累加次数越多, 解的扰动界越大. 为了改进上述问题, 人们提出了分数阶累加算子, 研究了分数阶累加 GM(1, 1) 模型与 GM(1, 1) 模型解的关系, 提供了白化解替代内涵解的条件^[12]. 杨保华等^[13]提出了离散 GM(1, 1) 幂模型, 并引入分数阶累加算子, 构建了分数阶离散灰色 GM(1, 1) 幂模型; Wu 等^[14]提出了分数阶非齐次指数离散灰色模型, 讨论了初始值变动对模型解的影响, 从预测效果角度论证了模型的有效性, 并提出了分数阶离散 GM(2, 1) 模型^[15]. 灰色幂模型的病态性也被众多学者所讨论, 人们从对原始数据实施初等变换^[16]、优化岭回归算法^[17]等方面改善了模型的病态性, 但还存在还原误差和有偏性等问题.

受分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型的启发, 本文针对振荡序列重新构建一种新的分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型, 讨论该模型在病态情况下线性部分参数的正则估计法, 然后给出非线性部分的幂参数及累加阶数的确定方法. 实例预测结果表明了所提出模型和方法的有效性.

1 分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型

首先给出 GM(1, 1) 幂模型的定义, 再由幂模型引出分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型.

1.1 GM(1, 1) 幂模型

定义 1^[18] 给定分数 q/p 和原始序列 $X^{(0)}$, 称下式为原始序列的分数 q/p 阶生成序列:

$$x^{(q/p)}(k) = \sum_{j=1}^k C_{k-j+\frac{q}{p}-1}^{k-j} x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

其中

$$C_{\frac{q}{p}-1}^0 = 1,$$

$$C_{k-j+\frac{q}{p}-1}^{k-j} = \frac{\left(k-j+\frac{q}{p}-1\right)\left(k-j+\frac{q}{p}-2\right)\cdots\left(\frac{q}{p}+1\right)\left(\frac{q}{p}\right)}{(k-j)!}.$$

记 $r = q/p$, 称矩阵

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & C_r^1 & \cdots & C_{r+n-3}^{n-2} & C_{r+n-2}^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & C_{r+n-4}^{n-3} & C_{r+n-3}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & C_r^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为分数 r 阶累加生成矩阵, 其逆矩阵 A^{-r} 为累减生成矩阵.

定义 2^[2] 给定非负原始序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 满足灰建模三条件的非线性模型

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^\gamma, \quad (2)$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^\gamma \quad (3)$$

分别为 GM(1, 1) 幂模型和 GM(1, 1) 幂模型的白化方程.

1.2 分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型

由于传统的累加生成算子在模型分析时, 利用老信息相对于新信息较多, 导致越新的数据对参数估计的影响越小, 与新信息优先原理相违背; 而分数阶累加模型可以根据数据特点, 选择合适的累加阶数, 从而能够有效改善这类现象. 传统的 GM(1, 1) 幂模型无法克服通过离散形式估计参数和连续形式求模型解所导致的误差. 本文提出一种分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型, 可以有效避免从差分方程的参数估计到微分方程的模型求解再到离散的预测的转换, 全程均用离散形式进行参数估计、模拟、预测, 通常可以提高模型的模拟和预测的精度.

定义 3 设 $x^{(r)}$ 为原始序列 $x^{(0)}$ 的 r 阶累加序列, 分数 r 阶 GM(1, 1) 幂模型定义为

$$x^{(r-1)}(k) + az^{(r)}(k) = b[z^{(r)}(k)]^\gamma, \quad (4)$$

其白化方程为

$$\frac{dx^{(r)}}{dt} + ax^{(r)} = b[x^{(r)}]^\gamma. \quad (5)$$

将白化方程 (5) 变形为

$$\frac{dx^{(r)}^{1-\gamma}}{dt} + (1-\gamma)ax^{(r)}^{1-\gamma} = b(1-\gamma). \quad (6)$$

令 $y = x^{(r)}^{1-\gamma}$, 式 (6) 变形为

$$\frac{dy}{dt} + (1-\gamma)ay = b(1-\gamma), \quad (7)$$

其离散形式为

$$y(k+1) = \beta_1 y(k) + \beta_2. \quad (8)$$

定义 4 设原始序列为 $X^{(0)}$, r 阶生成序列为 $X^{(r)} = (x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \dots, x^{(r)}(n))$, 称满足下式的非线性模型为分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型:

$$\begin{cases} y(k+1) = \beta_1 y(k) + \beta_2, \\ y(k) = (x^{(r)}(k))^{(1-\gamma)}. \end{cases} \quad (9)$$

将模型 (9) 引入矩阵形式, 记矩阵

$$B = \begin{bmatrix} y(1) & 1 \\ y(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y(n-1) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

2 分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型预测函数及参数估计

对模型 (9) 的第 1 个式子利用递推法可得

$$y(k+1) = \beta_1^k y(1) + \beta_2 \frac{1 - \beta_1^k}{1 - \beta_1}, \quad (11)$$

从而

$$x^{(r)}(k+1) = \left[\frac{\beta_2}{1 - \beta_1} + \left(x^{(0)}(1)^{1-\gamma} - \frac{\beta_2}{1 - \beta_1} \right) \beta_1^k \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (12)$$

通过 $X^{(0)} = A^{-r} X^{(r)}$ 即可得到模型 (9) 的还原值.

2.1 分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型参数 β_1 和 β_2 的估计

引理 1 [19] 设 $A \in C^{n \times n}$, $\Delta A \in C^{n \times n}$, $b \in C^n$, $\Delta b \in C^n$, 若对 $C^{n \times n}$ 上的某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A^{-1}\| \times \|\Delta A\| < 1$, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 与 $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ 的解满足

$$\frac{\|\Delta x\|_v}{\|x\|_v} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|_v}{\|b\|_v} \right). \quad (13)$$

其中: $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ 为矩阵 A 的条件数, $\|\cdot\|_v$ 是 C^n 上与矩阵范数 $\|\cdot\|$ 相容的向量范数.

当矩阵 A 为正规矩阵, 范数采用 2 范数时, 有

$$\kappa(A) = |\lambda_1 / \lambda_n|,$$

其中 λ_1 、 λ_n 为矩阵 A 的最大、最小特征值.

实际应用中, 模型参数 β_1 和 β_2 经常采用最小二乘估计. 由引理 1 可知, 当矩阵 $B'B$ 的条件数很大时, 该方程解的稳定性变差, 从而影响模型的参数估计及预测的精度. 本文采用基于条件数控制的正则化方法 [20] 使得系数矩阵的条件数变小, 从而提高参数估计的精度. 下面对最小二乘法和基于条件数控制的正则化法求解病态方程组的优劣进行比较.

设方程组 $V\beta = Y$, 其中

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.000\,001 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.000\,001 \end{bmatrix}.$$

矩阵 V 的条件数为 4×10^6 , 其最小二乘解记为 β_1^* , 正

则解记为 β_2^* , 即

$$\beta_1^* = (0.999\,7, 0.999\,8)', \beta_2^* = (1, 1)'$$

很明显正则解为精确解, 而最小二乘解由于受到矩阵的病态性影响不能得到精确解. 灰色模型病态性是不可避免的, 所以参数 β_1 和 β_2 的求解采用基于条件数的正则化算法求解优于最小二乘法. 下面介绍基于条件数控制的正则化算法.

记矩阵 $V = B'B$, 其顺序特征值 $\lambda_1 \leq \lambda_2$, 所对应的单位正交特征向量分别为 α_1 、 α_2 . 令 $k = (\lambda_2 - \lambda_1) / \lambda_1^2$, 记

$$C = B'B + kB'B\alpha_1\alpha_1'B'B,$$

$$D = B' + kB'B\alpha_1\alpha_1'B'.$$

基于条件数控制的正则化算法不再通过方程组 $V\beta = B'Y$ 求解 β , 而是通过调整过的方程组 $C\beta = DY$ 求解参数 β_1 和 β_2 .

定理 1 方程组 $V\beta = B'Y$ 与 $C\beta = DY$ 同解, 且矩阵 C 的条件数为 1.

证明 要证明两方程组同解, 只需证

$$kB'B\alpha_1\alpha_1'B'B\beta = kB'B\alpha_1\alpha_1'B'Y. \quad (14)$$

因为 $B'B\beta = B'Y$, 所以式 (14) 成立.

下面计算调整后的矩阵 C 的条件数. 因为

$$C\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_1 kB'B\alpha_1\alpha_1'\alpha_1 =$$

$$(\lambda_1 + k\lambda_1^2)\alpha_1 = \lambda_2\alpha_1,$$

$$C\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2,$$

所以 $\kappa(C) = \lambda_2 / \lambda_2 = 1$. \square

由定理 1 可知, 根据条件数可以判别原模型是否存在病态性. 如果存在, 则 β_1 和 β_2 的最小二乘解精度不高, 可以利用基于条件数控制的正则化解法, 先调整系数矩阵使其条件数为 1, 再利用调整后的方程组求解参数, 不仅能保证同解, 而且还不受原模型病态性影响.

2.2 分数阶离散 GM(1, 1) 幂模型参数 γ 和 r 的确定

由模型 (9) 可知, 参数 γ 和 r 为模型的非线性部分, 确定其值比较困难, 文献 [13] 利用拟合相对误差最小化的方法, 即最小化下式确定 γ 和 r 的值:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^n \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right|. \quad (15)$$

模型的预测误差与拟合误差有很大的关系. 一般来说, 序列的拟合误差小也会有一个小的预测误差. 但是灰色序列数据较少, 取值也有一定的随机性, 只有当序列值与一个理论模型非常接近时, 拟合误差与预测误差的相关性才很强. 如果随机因素稍大, 两者并不能同时达到最小, 则不能完全根据极小化拟合误差的方法来估计参数从而建立模型. 如果一味地追求

小的拟合误差, 则可能使得过分拟合极个别点(随机因素作用强的点)的拟合误差而影响了序列的主题规律的提取, 从而预测效果并不是太好.

本文提出一种新方法来确定两参数的取值, 该方法旨在减小新数据的拟合误差, 从而减小后期数据的预测误差. 本方法同时兼顾拟合与预测误差双重因素, 具体建模步骤如下.

1) 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 先对序列的前 $n-1$ 项 $x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n-1)$ 在给定参数 γ 和 r 下, 利用正则化法初步估计 β_1 和 β_2 . 求出前 $n-1$ 项的平均拟合相对误差与第 n 项的预测相对误差的和, 记为 **PMAPE**, 即

$$\text{PMAPE}(\gamma, r) = \frac{1}{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| + \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(n) - x^{(0)}(n)}{x^{(0)}(n)} \right|. \quad (16)$$

2) 极小化目标函数 **PMAPE**(γ, r), 确定参数 γ, r 的最优取值参数 γ^* 和 r^* .

3) 用最优参数 γ^* 和 r^* , 对序列 $x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)$ 利用正则化法确定参数 β_1, β_2 的最终估计值 β_1^*, β_2^* .

4) 将上述参数估计值代入式(12), 求出拟合值和预测值并对数据还原, 得到 $x^{(0)}$ 的拟合值与预测值.

为了能直观比较上述两种确定参数的方法的优劣, 下面从模型(9)中随机模拟一个原始序列, 并对该序列加一个干扰. 当固定 r 时, **MAPE**、一步预测相对误差和 **PMAPE** 随着 γ 的变化曲线如图 1 所示.

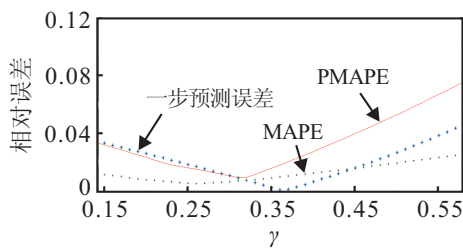


图 1 MAPE(-)、PMAPE(-)、一步预测误差(*)随 γ 的变化曲线

由图 1 可知, 当给定 r 时, 通过极小化 **MAPE** 确定的 γ 值相对于极小化 **PMAPE** 法确定的 γ 值更远, 使一步预测相对误差极小的 γ 值, 所以极小化式(16)确定出的参数 γ 的值能使预测误差更小.

3 实例分析

3.1 工业废水排放率的预测

以文献[5]中的数据为例, 验证本文提出的新模型针对振荡序列的预测效果. 2000~2009年某省工业废水排放达标率的数据序列 $X^{(0)} = (84.79, 96.47, 96.33, 97.2, 95.94, 96.65, 86.38, 86.09, 90.83, 95.28)$ (单位: %). 记文献[5]中的幂参数确定方法建立的 **GM**(1,

1) 幂模型为方法 1, 文献[13]中利用最小化 **MAPE** 确定幂参数和累加阶数的分数阶离散 **GM**(1, 1) 幂模型为方法 2, 对 2000~2008 年数据利用方法 1、方法 2 和本文方法分别拟合模型, 并对 2009 年和 2010 年的达标率进行预测, 3 个模型的建模效果见表 1.

表 1 工业废水排放达标率的预测结果

年份	原始数据	方法 1		方法 2		本文方法	
		预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%
2009	95.28	84.94	10.85	83.03	12.85	95.03	0.26
2010	96.21	82.76	13.97	80.91	15.90	97.76	1.61
MAPE	-	-	2.46	-	2.09	-	8.38

由表 1 可知, 利用本文提供的方法建模, 所得一步与两步预测误差分别为 0.26% 和 1.6%, 虽然拟合效果稍差, 但预测效果明显优于上述两种方法, 表明本文提供的模型是有效的, 本文提出的确定幂参数与累加阶数的方法较好.

3.2 城市用水量预测

以文献[4]中的实例为例, 某市 2000~2006 年的城市用水量为 $X_0 = (10.35, 10.89, 9.52, 9.04, 9.45, 10.28, 11.97)$ (单位: 10^8m^3), 该数据为振荡序列. 文献[4]提出了正数化平移变换和加权几何平均 **DGM**(1, 1) 模型, 以下记该方法为方法 3. 以 2000~2005 年的城市用水量为原始数据建立模型, 对 2006 年的用水量进行预测. 表 2 列出了方法 2、方法 3 和本文方法的拟合和预测结果.

表 2 城市用水量的拟合及预测结果

年份	实际值	方法 2	方法 3	本文方法
2001	10.89	10.89	10.73	10.63
2002	9.52	9.52	9.73	10.65
2003	9.04	9.04	9.41	7.64
2004	9.45	9.45	9.27	9.40
2005	10.28	10.28	9.33	10.66
MAPE	-	0.002%	3.76%	6.76%
2006RPE	11.97	4.69%	19.71%	1.79%

由表 2 可知, 本文方法对于振荡序列的模拟效果未必太好, 但预测效果较以上方法均有显著的优势.

4 结 论

对于序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 当它为振荡序列时, 本文提出了新的离散 **GM**(1, 1) 幂模型. 为了减小解的扰动性, 采用分数阶累加算子. 在运算过程中, 会遇到病态模型的情况. 为了提高参数 β_1, β_2 的求解精度, 采用基于条件数控制的正则化方法替代传统的最小二乘法; 幂参数及累加的阶数是通过极小化 $x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n-1)$ 的平均相对误差与 $x^{(0)}(n)$ 的预测相对误差的和确定的, 这样相对减小了最新数据的模拟误差. 通过实例表明, 这种确定幂参数和累加参数的方法对于振荡序列在减小

预测误差方面效果明显,达到了建模的目的.该模型有一定的适用范围,其对振荡序列预测效果较好,针对单调序列预测效果稍差.如何对模型的结构稍作调整,使得拟合相对误差和预测误差均更小、适用范围更广,将是下一步研究的问题.

参考文献(References)

- [1] Deng J L. Introduction of grey system[J]. J of Grey System, 1989, 1(1): 1-24.
- [2] 刘思峰, 谢乃明, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 97-108.
(Liu S F, Xie N M, et al. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2013: 97-108.)
- [3] 钱吴永, 党耀国. 基于振荡序列的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 149-154.
(Qian W Y, Dang Y G. GM(1,1) model based on oscillation sequences[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2009, 29(3): 149-154.)
- [4] 杨芬. 离散灰色预测模型的拓展研究及应用[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2014.
(Yang F. Research on development of discrete grey model and its application[D]. Nanjing: College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014.)
- [5] 王正新, 党耀国, 刘思峰, 等. GM(1,1)幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2380-2383.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. Solution of GM(1,1) power model and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2380-2383.)
- [6] 王正新. 振荡型GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1459-1464.
(Wang Z X. Oscillating GM(1,1) power model and its application[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1459-1464.)
- [7] 王正新. 基于傅立叶级数的小样本振荡序列的灰色预测方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 270-274.
(Wang Z X. Grey forecasting method for small sample oscillating sequences based on Fourier series[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 270-274.)
- [8] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.)
- [9] 郭丽云, 吴正朋, 李梅. 二次时变参数离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2887-2893.
(Wu L Y, Wu Z P, Li M. Quadratic time-varying parameters discrete grey model[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(11): 2887-2893.)
- [10] 杨宝华, 方志耕, 张可. 基于级比序列的离散GM(1,1)模型[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(4): 715-718.
(Yang B H, Fang Z G, Zhang K. Discrete GM(1,1) model based on sequence of stepwise ratio[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(4): 715-718.)
- [11] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [12] 高命运, 毛树华. 分数阶累加GM(1,1)模型解之间的误差分析[C]. 第25届全国灰色系统会议论文集. 北京, 2014: 451-458.
(Gao M Y, Mao S H. Error analysis between the solutions of fractional order accumulation GM(1,1)[C]. The 25th National Symposium on Grey System. Beijing, 2014: 451-458.)
- [13] 杨保华, 赵金帅. 分数阶离散灰色GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2015, 30(7): 1264-1268.
(Yang B H, Zhao J S. Fractional order discrete grey GM(1,1) power model and its application[J]. Control and Decision, 2015, 30(7): 1264-1268.)
- [14] Wu L F, Liu S F, Cui W, et al. Non-homogenous discrete grey model with fractional-order accumulation[J]. Neural Computing and Applications, 2014, 25(5): 1215-1221.
- [15] Wu L F, Liu S F, Xu R T, et al. Using fractional order accumulation to reduce errors from inverse accumulated generating operator of grey model[J]. Soft Computer, 2015, 19(1): 483-488.
- [16] 王正新, 党耀国, 刘思峰. GM(1,1)幂模型的病态性[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(7): 1859-1866.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. The morbidity of GM(1,1) power model[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(7): 1859-1866.)
- [17] 郑照宁, 刘德顺. 灰色系统模型的优化岭回归算法[J]. 运筹与管理, 2004, 13(3): 16-18.
(Zheng Z N, Liu D S. The optimized ridge regression algorithm for grey system models[J]. Operations Research and Management Science, 2004, 13(3): 16-18.)
- [18] Wu L F, Liu S F, Yao L, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [19] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 192-193.
(Dai H. Theory of matrices[M]. Beijing: Science Press, 2001: 192-193.)
- [20] 顾勇为, 归庆明, 张璇, 等. 大地测量与地球物理中病态性问题的正则化迭代解法[J]. 测绘学报, 2014, 43(4): 331-336.
(Gu Y W, Gui Q M, Zhang X, et al. Iterative solution of regularization to ill-conditioned problems in geodesy and geophysics[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(4): 331-336.)